



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中外物理学精品书系

前沿系列 · 18

数学物理方法专题

——复变函数与积分变换

吴崇试 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

中外物理学精品书系·前沿系列18

数学物理方法专题——数理方程与特殊函数

吴崇试 1938年生。1962年毕业于北京大学物理系。北京大学物理学院教授，博士生导师。享受政府特殊津贴。1996年起被推举为高校数学物理方法研究会理事长。1998年被聘为北京大学主干基础课主持人。两度获得北京大学年度教学优秀奖。

科研方面也曾获得北京大学首届科学研究二等奖和国家教委科技进步奖（甲类二等）。

长期在北京大学主讲“数学物理方法”课程。该课程是北京大学优秀主干基础课程，2003年被评为北京市高等学校精品课程，2004年被评为国家级精品课程，并获得北京大学2004年教学成果奖一等奖和北京市2004年高等教育教学成果奖一等奖。

ISBN 978-7-301-22816-6



9 787301 228166 >

定价：86.00元



国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

中 外 物 理 学 精 品 书 系

前 沿 系 列 · 18

数学物理方法专题

——复变函数与积分变换

吴崇试 编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法专题：复变函数与积分变换/吴崇试编著. —北京：北京大学出版社，
2013.7

(中外物理学精品书系·前沿系列)

ISBN 978-7-301-22816-6

I. ①数… II. ①吴… III. ①数学物理方法②复变函数③积分变换
IV. ①O411.1②O174.5③O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 153006 号

书 名：数学物理方法专题——复变函数与积分变换

著作责任者：吴崇试 编著

责任编辑：尹照原

标准书号：ISBN 978-7-301-22816-6/O · 0943

出版发行：北京大学出版社

地 址：北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址：<http://www.pup.cn> 新浪官方微博：@北京大学出版社

电 话：邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752021

出版部 62754962

电子邮箱：zpup@pup.pku.edu.cn

印 刷 者：北京中科印刷有限公司

经 销 者：新华书店

730 毫米×980 毫米 16 开本 33.5 印张 657 千字

2013 年 7 月第 1 版 2013 年 7 月第 1 次印刷

定 价：86.00 元

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究

举报电话：010-62752024 电子信箱：fd@pup.pku.edu.cn

“中外物理学精品书系”

编委会

主任：王恩哥

副主任：夏建白

编委：（按姓氏笔画排序，标*号者为执行编委）

王力军	王孝群	王牧	王鼎盛	石兢
田光善	冯世平	邢定钰	朱邦芬	朱星
向涛	刘川*	许宁生	许京军	张酣*
张富春	陈志坚*	林海青	欧阳钟灿	周月梅*
郑春开*	赵光达	聂玉昕	徐仁新*	郭卫*
资剑	龚旗煌	崔田	阎守胜	谢心澄
解士杰	解思深	潘建伟		

秘书：陈小红

序 言

物理学是研究物质、能量以及它们之间相互作用的科学。她不仅是化学、生命、材料、信息、能源和环境等相关学科的基础，同时还是许多新兴学科和交叉学科的前沿。在科技发展日新月异和国际竞争日趋激烈的今天，物理学不仅囿于基础科学和技术应用研究的范畴，而且在社会发展与人类进步的历史进程中发挥着越来越关键的作用。

我们欣喜地看到，改革开放三十多年来，随着中国政治、经济、教育、文化等领域各项事业的持续稳定发展，我国物理学取得了跨越式的进步，做出了很多为世界瞩目的研究成果。今日的中国物理正在经历一个历史上少有的黄金时代。

在我国物理学科快速发展的背景下，近年来物理学相关书籍也呈现百花齐放的良好态势，在知识传承、学术交流、人才培养等方面发挥着无可替代的作用。从另一方面看，尽管国内各出版社相继推出了一些质量很高的物理教材和图书，但系统总结物理学各门类知识和发展，深入浅出地介绍其与现代科学技术之间的渊源，并针对不同层次的读者提供有价值的教材和研究参考，仍是我国科学传播与出版界面临的一个极富挑战性的课题。

为有力推动我国物理学研究、加快相关学科的建设与发展，特别是展现近年来中国物理学者的研究水平和成果，北京大学出版社在国家出版基金的支持下推出了“中外物理学精品书系”，试图对以上难题进行大胆的尝试和探索。该书系编委会集结了数十位来自内地和香港顶尖高校及科研院所的知名专家学者。他们都是目前该领域十分活跃的专家，确保了整套丛书的权威性和前瞻性。

这套书系内容丰富，涵盖面广，可读性强，其中既有对我国传统物理学发展的梳理和总结，也有对正在蓬勃发展的物理学前沿的全面展示；既引进和介绍了世界物理学研究的发展动态，也面向国际主流领域传播中国物理的优秀专著。可以说，“中外物理学精品书系”力图完整呈现近现代世界和中国物理

科学发展的全貌，是一部目前国内为数不多的兼具学术价值和阅读乐趣的经典物理丛书。

“中外物理学精品书系”另一个突出特点是，在把西方物理的精华要义“请进来”的同时，也将我国近现代物理的优秀成果“送出去”。物理学科在世界范围内的重要性不言而喻，引进和翻译世界物理的经典著作和前沿动态，可以满足当前国内物理教学和科研工作的迫切需求。另一方面，改革开放几十年来，我国的物理学研究取得了长足发展，一大批具有较高学术价值的著作相继问世。这套丛书首次将一些中国物理学者的优秀论著以英文版的形式直接推向国际相关研究的主流领域，使世界对中国物理学的过去和现状有更多的深入了解，不仅充分展示出中国物理研究和积累的“硬实力”，也向世界主动传播我国科技文化领域不断创新的“软实力”，对全面提升中国科学、教育和文化领域的国际形象起到重要的促进作用。

值得一提的是，“中外物理学精品书系”还对中国近现代物理学科的经典著作进行了全面收录。20 世纪以来，中国物理界诞生了很多经典作品，但当时大都分散出版，如今很多代表性的作品已经淹没在浩瀚的图书海洋中，读者们对这些论著也都是“只闻其声，未见其真”。该书系的编者们在这方面下了很大工夫，对中国物理学科不同时期、不同分支的经典著作进行了系统的整理和收录。这项工作具有非常重要的学术意义和社会价值，不仅可以很好地保护和传承我国物理学的经典文献，充分发挥其应有的传世育人的作用，更能使广大物理学人和青年学子切身体会我国物理学研究的发展脉络和优良传统，真正领悟到老一辈科学家严谨求实、追求卓越、博大精深的治学之美。

温家宝总理在 2006 年中国科学技术大会上指出，“加强基础研究是提升国家创新能力、积累智力资本的重要途径，是我国跻身世界科技强国的必要条件”。中国的发展在于创新，而基础研究正是一切创新的根本和源泉。我相信，这套“中外物理学精品书系”的出版，不仅可以使所有热爱和研究物理学的人们从中获取思维的启迪、智力的挑战和阅读的乐趣，也将进一步推动其他相关基础科学更好更快地发展，为我国今后的科技创新和社会进步做出应有的贡献。

“中外物理学精品书系”编委会 主任
中国科学院院士，北京大学教授
王恩哥

2010 年 5 月于燕园

内 容 简 介

本书共十六章. 内容比较独立的是第一章与第十章. 前者涉及解析函数理论中的部分基本问题, 后者讨论了 Γ 函数及相关函数的幂级数展开, 以及与之有关的级数与积分. 其余各章大体可分为三部分.

第二章到第五章围绕无穷级数而展开. 内容包括: 一、由解析函数 Taylor 展开而演绎出的各种变型; 二、将常微分方程的幂级数解法用于求解已知函数的幂级数展开; 三、卷积型级数的 Möbius 反演问题.

第六章至第九章的中心是应用留数定理计算定积分, 包括从一些简单的积分出发而演绎出许多新的积分. 特别是, 笔者综合已有的引理, 提出了一个新的引理; 并在此基础上, 建立了计算含三角函数无穷积分的新方法.

第十一章至第十六章讨论的是积分变换, 介绍了有关 Fourier 变换和 Laplace 变换的一些理论问题. 书中还介绍了 Mellin 变换, 它与 Fourier 变换或 Laplace 变换密切相关, 是处理某类问题的有用工具, 在计算涉及柱函数的积分时尤为突出.

本书不是数学物理方法的教材, 而是笔者对于传统教材内容的解读与发挥. 书中还汇集了笔者自己的许多计算, 例如, 有超过 700 个积分及 300 多个和式(有限和或无穷级数)的计算结果.

前言

(一)

五十余年前,笔者就读于北京大学物理系,得到诸位前辈大师的教诲.毕业之后,更在王竹溪与郭敦仁二位先生的指导下,从事数学物理方法课程的教学,迄今已届五十载.笔者得到了二位先生生前的诸多教益.在教学实践中,面对学生的各种诘问,促进了对于相关问题的深入思考;在与校内外同行的交流切磋中,更获益良多.退休以后,笔者将这些收获与记录,汇集为《数学物理方法专题——复变函数与积分变换》及《数学物理方法专题——数理方程与特殊函数》二书,以此奉献给中国近代物理教育 100 年.

需要说明,这两本书都不是数学物理方法的教材,而是笔者备课与教学过程中笔记与练习的汇集.从某种意义上说,这两本书所涉及的内容,恰恰是在传统教材之外,包括笔者对于教材中正面表述之外的解读与发挥.笔者以一孔之见,希望能就教于国内从事数学物理方法课程教学的同行,希望能对于此门课程的教学有所裨益.需要特别申明,这两本书均不以数学物理方法的初学者为对象.当然,对于已经学习并掌握了数学物理方法课程基本内容的青年学子来说,这两本书或许也能成为他们进一步学习与思考的辅助读物.他们将会发现,从已有的知识出发,只要再往前迈一小步,展现在面前的将是一片绚丽多彩的新天地.

正因为不是教材,所以这两本书的内容不受教学大纲的约束,与数学物理方法传统教材基本上不相重复,既不追求与数学物理方法教材的完全对应与覆盖,也不刻意追求理论的系统性与完整性.书中有些内容可能是教材的补充与提高,但也有不少内容是现在教学中所不涉猎的.

正因为不是教材,所以这两本书可能存在内容前后倒置的情形.尽管在整理书稿时,尽量希望理顺各章节乃至具体内容的前后次序,但也不排除有前面的内容需要用到后面的知识.

或许值得提到,这两本书中汇集了笔者自己的许多计算.例如,这两本书中提供了超过 1200 个积分及超过 1200 个和式(有限和或无穷级数)的计算,这些结果,绝大多数都未出现在 I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik 的千页巨著 *Table of Integrals, Series, and Products* (7th ed., Elsevier (Singapore) Pte Ltd., 2007) 中.

或许这就是这两本书的特点.

(二)

本书《数学物理方法专题 —— 复变函数与积分变换》，共十六章。内容比较独立的有两章，即第一章与第十章。第一章涉及解析函数理论中的部分基本问题，包括以问答形式讨论了数学物理方法课程教学中的若干常见而教材中又很少展开的问题。第十章则讨论了 Γ 函数的幂级数展开，以及与 Γ 函数 (包括 B 函数与 ψ 函数) 有关的级数与积分。在本书的其余章节中会引用到其中的部分结果。

除了这两章之外，其余各章大体上可分为三个板块：

第二章到第五章是一个板块，围绕无穷级数而展开。在给出了几个略带技巧的展开式后，第二章与第三章进一步介绍了根据解析函数 Taylor 展开而演绎出的各种变型，包括 Lagrange 展开公式、倍乘公式以及加法公式。这些理论公式，大部分已由前人导出。笔者的工作是将它们系统地应用于常见的特殊函数，得到了 200 多个公式，其中只有极少数几个能在现有的文献中找到。第四章并非直接讨论常微分方程的幂级数解法，而是讨论了它的一种特殊应用：将已知函数的幂级数展开问题转化为求常微分方程幂级数解的问题。进一步发展这一思想，也可以将已知函数的级数展开问题转化为偏微分方程的求解问题，这方面的例子可以在《数学物理方法专题 —— 数理方程与特殊函数》一书中找到。第五章介绍了卷积型级数的 Möbius 反演。这一创见是由陈难先院士提出的，他称之为加性 Möbius 反演，应用于求解 Fermi 体系的逆问题。该章讨论了各类特殊函数的 Möbius 反演，特别是涉及柱函数的级数反演，也得到了 100 多个新结果，遗憾的是未能给出在物理问题中的应用。将卷积型级数 Möbius 反演的思想发展，由离散过渡到连续，可以建立卷积型积分变换的 Möbius 反演 (见 §5.4)，但未展开。

第六章至第九章是另一个板块，中心是应用留数定理计算定积分。第六章按照围道分类，介绍了几种基本的围道，计算了形式各异的几十个定积分。这里需要特别提到 §6.6，笔者综合已有的引理，提出了一个新的引理；在此基础上，建立了计算含三角函数无穷积分的新方法。采用这一方法，原来一些较难 (或较烦) 计算的积分，现在就可以方便地计算出。第七章是第六章的继续，但仅限于多值函数的积分，着重于介绍应用留数定理计算时，如何选择合适的复变积分，亦即被积函数与积分围道。第八章又是前两章的发展。通过变量代换将 Jordan 引理变换为处理本性奇点出现在有限远处 (例如坐标原点) 的情形，从而可以计算形式更为复杂的积分。将半圆形围道加以修正，又计算了三角函数在有界区间上的瑕积分。在应用留数定理计算定积分时，经常用到半圆形的围道。在多数情况下，当圆弧的半径趋于 ∞ 时，沿半圆弧的积分趋于确定的极限，0 或者非零极限值。该章 §8.3 还讨论了沿半圆弧的积积极限不存在的情形。只要 (实的) 定积分确实存在，那么这些发

散项总会互相抵消. 第九章则是从一些简单的积分出发, 或是稍作变化后而重新组合, 或是将积分构成的无穷级数求和, 从而演绎出许多新的积分. 在这几章中出现了 500 多个积分, 但多数也难以在前述 *Table of Integrals, Series, and Products* 一书中找到.

第十一章至第十六章是又一个板块, 讨论的是积分变换, 包括 Fourier 变换、Laplace 变换和 Mellin 变换. 第十一章和第十二章先后简要介绍了 Fourier 级数和 Fourier 积分收敛性的基本结论, 并应用 Fourier 变换方法计算了一些积分, 包括初等函数的积分和特殊函数的积分. 在计算这些积分时, Fourier 变换方法特别有效, 而 Fourier 变换的 Parseval 公式和卷积公式更是两个重要的工具. 第十三章讨论了 Laplace 变换, 也只着重于理论概念的介绍, 如 Laplace 积分的收敛性、一致收敛性与解析性, 以及据此定义的收敛横标、绝对收敛横标与正则横标, 这都超出了数学物理方法课程的教学要求. 第十四章至第十六章集中介绍了 Mellin 变换, 它与 Fourier 变换或 Laplace 变换密切相关, 在数学物理方法课程中鲜有触及, 然而却又是处理某类问题的有用工具, 在计算涉及柱函数的积分时尤为突出. 读者在第十五章与第十六章中可以找到这方面的大量例子. 这两章中计算了 200 多个积分, 半数左右也未曾收录入 *Table of Integrals, Series, and Products* 一书.

(三)

需要声明, 本书成书于现在, 但资料积累跨越数十年. 尽管书中的计算均为笔者所为, 但也不乏某些内容, 或是直接采自某书籍资料, 或是受其启发而就. 现在由于笔者记录不全, 原始资料也难以寻觅, 以致无法一一列出文献出处. 有些计算结果, 或许可能已经见诸文献, 但笔者孤陋寡闻, 还误以为是新结果, 因此文字表述亦有不实之嫌. 笔者深致歉意之余, 亦请知情者指出, 本书再版时, 自当补正.

最后, 在此书付梓之际, 笔者感谢“中外物理学精品书系”编委会诸位对于本书的支持. 在本书出版过程中, 北京大学出版社提供了方便, 陈小红和尹照原二位编辑为此付出了辛勤劳动, 笔者一并致谢.

吴崇试

2012 年于蓝旗营

本书常用符号

数 学 符 号

\forall	任何; 凡
\exists	有; 存在
$\exists!$	存在唯一的
\nexists	不存在
\wedge	并且; 与
\vee	或

$a \in A$	(元素) a 属于 (集合) A
$a \notin A$	a 不属于 A
\cup	并集
\cap	交集
\supset	包含
\subset	子集
$A \setminus B$	$\{a : a \in A, a \notin B\}$

$\overline{\lim}$	上极限
$\underline{\lim}$	下极限
\Rightarrow	一致收敛
$\ \cdot\ $	范数
$(\alpha)_n$	$\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$

$\mathcal{F}\{f\}$	f 的 Fourier 变换
$\mathcal{M}\{f\}$	f 的 Mellin 变换
$\mathcal{L}\{f\}$	f 的 Laplace 变换
$F(p) \doteq f(t)$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

\mathbb{N}	非负整数 (自然数)
\mathbb{Z}	整数
\mathbb{R}	实数
\mathbb{R}^+	正数
\mathbb{R}^-	负数
\mathbb{C}	复数; 复平面
$\overline{\mathbb{C}}$	复数 (包括 ∞) 扩充的复平面

\mathcal{R}_n	n 维实空间
\mathcal{C}_n	n 维复空间
\mathcal{E}_n	n 维 Euclid 空间
\mathcal{C}	连续函数空间
\mathcal{C}^n	\mathcal{C}^n 类函数空间 (n 阶 连续可微函数的集合)
\mathcal{H}	Hilbert 空间
\mathcal{S}	分段连续且只有有限个 第一类间断点的函数类
\mathcal{L}_1	绝对可积函数类
\mathcal{L}_2	平方可积函数类

$\mathcal{F}^{-1}\{f\}$	f 的 Fourier 逆变换
$\mathcal{M}^{-1}\{f\}$	f 的 Mellin 逆变换
$\mathcal{L}^{-1}\{f\}$	f 的 Laplace 逆变换
$f(t) \doteq F(p)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$

特殊函数与常数符号一览表

符 号	名 称
$A_n(z; a)$	Abel 多项式
$\text{Ai}(z)$	Airy 函数
$B(p, q)$	Beta 函数
$B_\alpha(p, q)$	不完全 Beta 函数
$\text{bei}_\nu(z)$	Kelvin 函数
$\text{ber}_\nu(z)$	Kelvin 函数
$\text{Bi}(z)$	Airy 函数
$B_k^{(n)}$	广义 Bernoulli 数
$B_k^{(n)}(x)$	广义 Bernoulli 多项式
B_n	Bernoulli 数
$B_n(x)$	Bernoulli 多项式
$C(z)$	Fresnel 积分
$\text{ci}(z)$	余弦积分
$C_\alpha^\lambda(z)$	Gegenbauer 函数
$C_n^\lambda(z)$	Gegenbauer 多项式
$D_\nu(z)$	抛物线柱函数 (Weber 函数)
$\text{Ei}(z)$	指数积分
E_n	Euler 数
$E_n(x)$	Euler 多项式
$\mathbb{E}_\nu(z)$	Weber 函数
$\text{erf}(z)$	误差函数
$\text{erfc}(z)$	余误差函数
$F(\alpha, \beta; \gamma; z)$	超几何函数
$F(\alpha; \gamma; z)$	合流超几何函数 (Kummer 函数)
${}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_q; z)$	广义超几何级数
$G_n(\zeta; \alpha, \beta)$	Gould 多项式

(续表)

符 号	名 称
γ	Euler 常数
$\gamma(\nu, z), \Gamma(\nu, z)$	不完全 Gamma 函数
$\Gamma(z)$	Gamma 函数
$H_n(x)$	Hermite 多项式
$\mathbb{H}_\nu(z)$	Struve 函数
$h_\nu^{(1)}(z), h_\nu^{(2)}(z)$	球 Hankel 函数
$H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(1)}(z)$	第三类柱函数 (Hankel 函数)
$I_\nu(z)$	虚宗量 Bessel 函数
$J_\nu(z)$	第一类柱函数 (Bessel 函数)
$\mathbb{J}_\nu(z)$	Anger 函数
$j_\nu(z)$	球 Bessel 函数
$K_\nu(z)$	虚宗量 Bessel 函数
$\text{li}(z)$	对数积分
$L_n(x)$	Laguerre 多项式
$L_n^{(\alpha)}(x)$	广义 Laguerre 多项式
$L_n^{(n+\alpha)}(x)$	赝 Laguerre 多项式
$M_{k,\mu}(z)$	Whittaker 函数
$M_n(z)$	Mittag-Leffler 多项式
$n_\nu(z)$	球 Neumann 函数
$N_\nu(z)$	第二类柱函数 (Neumann 函数)
$O_n(t)$	Neumann 多项式
$P_l^m(x)$	m 阶 l 次第一类连带 Legendre 函数
$P_n(z)$	Legendre 多项式
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	Jacobi 多项式
$P_n^\lambda(x; a, b)$	Pollaczek 多项式
$P_n^\lambda(x, \phi)$	Pollaczek 多项式
$P_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \eta)$	圆环函数

(续表)

符 号	名 称
$P_\nu(z)$	第一类 Legendre 函数
$P_\nu^\mu(z)$	第一类连带 Legendre 函数
$P_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z)$	超球函数
$P_{-\frac{1}{2}+ip}^\mu(\cos \theta)$	圆锥函数
$\psi(z)$	Psi 函数
$Q_l^m(x)$	m 阶 l 次第二类连带 Legendre 函数
$Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\cosh \eta)$	圆环函数
$Q_\nu(z)$	第二类 Legendre 函数
$Q_\nu^\mu(z)$	第二类连带 Legendre 函数
$Q_{-\frac{1}{2}+ip}^\mu(\cos \theta)$	圆锥函数
$Q_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z)$	超球函数
$R_{m,\nu}(z)$	Lommel 多项式
$S(z)$	Fresnel 积分
$\text{Si}(z), \text{si}(z)$	正弦积分
$s_{\mu,\nu}(z)$	Lommel 函数
$S_{\mu,\nu}(z)$	Lommel 函数
$S_n(t)$	Schläfli 多项式
$T_n(x)$	第一类 Chebyshev 多项式
$U(\alpha; \gamma; z)$	合流型超几何函数 (Kummer 函数)
$U_n(x)$	第二类 Chebyshev 多项式
$W_{k,\mu}(z)$	Whittaker 函数
$Y_\nu(z)$	第二类 Bessel 函数 (Neumann 函数)
$Z_\nu(z)$	柱函数
$\zeta(s)$	Reimann ζ 函数
$\zeta(s, a)$	广义 ζ 函数

目 录

第一章 解析函数	(1)
§ 1.1 关于复变函数的若干问答	(1)
§ 1.2 函数可导的充分必要条件	(12)
§ 1.3 Cauchy 定理与 Cauchy 积分公式	(13)
第二章 无穷级数	(19)
§ 2.1 无穷级数的收敛性	(19)
§ 2.2 幂级数的收敛半径	(25)
§ 2.3 无穷级数的 Cesàro 和与 Abel 和	(27)
§ 2.4 解析函数的幂级数展开	(29)
§ 2.5 几个级数的和	(38)
§ 2.6 Lagrange 展开公式	(43)
§ 2.7 Taylor 展开的倍乘公式	(47)
第三章 Taylor 展开公式新认识	(51)
§ 3.1 Taylor 展开公式的一个特殊形式	(51)
§ 3.2 超几何函数	(53)
§ 3.3 特殊的超几何函数	(55)
§ 3.4 合流超几何函数	(60)
§ 3.5 Whittaker 函数	(66)
§ 3.6 Taylor 展开公式的变型	(69)
§ 3.7 柱函数	(77)
§ 3.8 特殊函数的加法公式	(79)
第四章 常微分方程的幂级数解法	(85)
§ 4.1 二阶线性常微分方程按奇点分类	(85)
§ 4.2 二阶线性常微分方程的不变式	(87)
§ 4.3 由解反求常微分方程	(93)
§ 4.4 解析函数的幂级数展开	(94)

第五章 卷积型级数的 Möbius 反演	(113)
§ 5.1 定义	(113)
§ 5.2 应用	(116)
§ 5.3 卷积型级数 Möbius 反演与柱函数	(124)
§ 5.4 卷积型积分变换的 Möbius 反演	(134)
第六章 应用留数定理计算定积分	(136)
§ 6.1 几个引理	(136)
§ 6.2 圆形围道	(140)
§ 6.3 半圆形围道和扇形围道	(144)
§ 6.4 矩形围道	(152)
§ 6.5 实轴上有奇点的情形	(163)
§ 6.6 计算含三角函数无穷积分的新方法	(173)
第七章 多值函数的积分	(180)
§ 7.1 含根式函数的积分	(180)
§ 7.2 含对数函数的积分	(189)
§ 7.3 含 $\ln \tan \theta$ 的积分	(200)
§ 7.4 含 $\ln \sin \theta$ 或 $\ln \cos \theta$ 的积分	(206)
§ 7.5 含 $\arctan x$ 的积分	(217)
第八章 应用留数定理计算定积分: 进一步的例子	(224)
§ 8.1 有限远处出现本性奇点的情形	(224)
§ 8.2 含多值函数的积分	(238)
§ 8.3 应用留数定理的非常规方式	(248)
第九章 既有积分的进一步演绎	(263)
§ 9.1 既有积分的简单演绎	(263)
§ 9.2 由既有积分构成无穷级数	(267)
§ 9.3 再讨论含 $\ln \tan \theta$ 的积分	(279)
§ 9.4 再讨论含 $\ln \sin \theta$ 的积分	(303)
第十章 Γ 函数	(307)
§ 10.1 Γ 函数的幂级数展开	(307)
§ 10.2 导致 Γ 函数或 B 函数的积分	(314)
§ 10.3 含 ψ 函数的级数	(323)

第十一章 Fourier 级数	(332)
§ 11.1 Fourier 级数	(332)
§ 11.2 Fourier 级数的收敛性	(333)
§ 11.3 Fourier 级数的 Cesàro 和与 Abel 和	(342)
第十二章 Fourier 积分与 Fourier 变换	(351)
§ 12.1 Fourier 积分	(351)
§ 12.2 Fourier 变换的 Parseval 公式	(358)
§ 12.3 Fourier 变换的卷积公式	(364)
§ 12.4 Γ 函数的 Fourier 变换	(370)
§ 12.5 复平面上的 Fourier 变换	(383)
§ 12.6 用 Fourier 变换方法解积分方程	(387)
第十三章 Laplace 变换	(391)
§ 13.1 Laplace 积分	(391)
§ 13.2 Laplace 积分的收敛半平面	(392)
§ 13.3 Laplace 积分的解析性	(395)
§ 13.4 Laplace 变换举例	(397)
§ 13.5 Laplace 变换的反演	(406)
§ 13.6 Laplace 变换像函数的必要条件	(413)
§ 13.7 Laplace 变换像函数的充分条件	(416)
§ 13.8 Laplace 变换卷积定理的应用	(419)
第十四章 Mellin 变换	(423)
§ 14.1 Mellin 变换的定义	(423)
§ 14.2 Mellin 变换举例	(428)
§ 14.3 特殊函数的 Mellin 变换	(433)
§ 14.4 Mellin 变换的卷积公式	(436)
第十五章 柱函数的 Mellin 变换	(445)
§ 15.1 柱函数的 Mellin 变换	(445)
§ 15.2 柱函数乘积的 Mellin 变换	(449)
§ 15.3 导致柱函数的初等函数 Mellin 变换	(458)
§ 15.4 导致柱函数的初等函数积分	(464)

第十六章	应用 Mellin 变换计算含柱函数的定积分	(477)
§ 16.1	柱函数与初等函数乘积的积分.....	(477)
§ 16.2	两个柱函数乘积的积分	(486)
§ 16.3	三个柱函数乘积的积分	(498)
§ 16.4	积分值不连续的情形	(501)
参考文献	(507)
索引	(509)

第一章 解析函数

§1.1 关于复变函数的若干问答

1. 为什么不能比较复数的大小?

我们知道,两个实数能够比较大小.因此,复数作为实数的推广,如果能比较大小,则其比较的规则一定不能和实数中的规则矛盾.与之相适应的是,有关不等式的运算法则也必须与实数一致.

所谓比较两个复数的大小,完全等价于定义何谓一个复数大于0(“正复数”),何谓一个复数小于0(“负复数”);而且,除了复数0之外,不允许存在既不大于0,又不小于0(即既非“正复数”又非“负复数”)的复数.根据这样的理解,我们不妨考察下列几种可供选择的比较规则:

(1) 按照实部的正、负定义“正复数”和“负复数”.这个法则明显不合要求,因为这里遗漏了纯虚数(实部为0).

(2) 按照虚部的正、负定义“正复数”和“负复数”.这个法则同样明显不合要求,因为这里恰恰又遗漏了实数(虚部为0).

(3) 规定“正复数”的实部和虚部必须同时为正,而其余的复数则必为“负复数”或0.这样必然导出一个荒谬的后果:“正复数”自乘可以是“负复数”,只要这个复数的辐角(主值)在 $\pi/4$ 与 $\pi/2$ 之间.

(4) 还可以尝试其他的比较规则,也都会导出明显的悖论.

尽管两个复数不能比较大小,但是对于两个复数的模(它们是实数),显然可以比较大小.

2. 关于 ∞ 的理解.

在复数中, ∞ 是一个(复)数,其模大于任意正数.相应地,在复平面上,无穷远点就是一个点.之所以如此定义,依我理解,是希望在变换 $z = 1/t$ 之下,保持 t 与 z 的一一对应关系,包括 $t = 0$ 与 $z = \infty$ 之间(或 $t = \infty$ 与 $z = 0$ 之间)的一一对应关系.

但是,复数 ∞ 毕竟是一个特殊的复数,其特殊性至少表现在:(1)所谓“全平面”并不包括 ∞ 点,除非明确称为“扩充的全平面”;(2)若函数在某一点取值为 ∞ ,则该点为函数的奇点,有别于函数值为有限值的情形;(3)一些概念(例如解析、留数等)应用于 ∞ 点时,需要重新定义;(4)适用于有限远处的结论(定理、公式)不能无条件地推广到包含有 ∞ 点的无界区域.

3. 举例说明函数可以在全平面连续而处处不可导.

在复变函数的框架内回答此问题, 其实很简单: 取 $f(z) = \operatorname{Re} z$ 即可. 也可以取 $f(z) = g(x)$, 只要 $g'(x) \neq 0$. 更进一步, 还可以将这类函数乘上虚单位 i 或任意复常数.

其实, 在建立函数概念的过程中, 正确认识函数连续与可导两概念之间的区别与联系, 是具有标志性的重要一步. 本来, 许多数学家都以为最多除了少数孤立点之外, 连续函数总是可导的. 直到 1872 年, Weierstrass 提出了后来以他的名字命名的实值函数^①

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad 0 < a < 1, b \text{ 为正奇数}, ab > 1 + \frac{3}{2}\pi,$$

证明了这类函数处处连续而处处不可导. Weierstrass 函数是数学上著名的反例, 它的提出深化了人们对于连续函数的认识.

在谈到连续函数时, 还值得提到 Cantor 函数^② $c(x)$, 它的定义是:

$$c(x) = \sum_j 2^{-n_j}, \quad x \in [0, 1],$$

其中的 n_j 与自变量 x 的三进制表示有关:

$$x = \sum_j 2 \cdot 3^{-n_j}.$$

这一定义也可描述为下列步骤:

- (1) 将 x 转换为三进制;
- (2) 若此三进制数中含有数字 1, 去掉第 1 个 1 以后的所有数字;
- (3) 将所有的数字 2 换为 1;
- (4) 将得到的数字解读为二进制, 此数值即为 $c(x)$ 之值.

Cantor 函数 $c(x)$ 被称为魔鬼阶梯 (devil's staircase), 它是 $[0, 1]$ 上的单调连续函数, 然而导数却几乎处处为 0, 它一致连续而又不绝对连续.

4. 应该如何定义函数在 ∞ 点的导数?

这也许不应该成为问题, 因为作为复变函数的核心概念, 解析与解析函数的概念, 对于 ∞ 点来说, 与函数是否可导没有任何联系. 或许正因为如此, 绝大多数教材中都未涉及函数在 ∞ 点可导的定义.

^① 引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_function.

^② 引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_function.

问题的症结可归结为如何定义 $f(z) = z$ 在 $z = \infty$ 点的导数. 显然, 这个函数在有限远处的任意一点均可导, 导数值为常数 1. 如果规定 $f(z) = z$ 在 $z = \infty$ 点的导数仍为 1, 这当然是一个比较自然的选择. 如此定义的结果就是尽管 $z = \infty$ 点是 $f(z) = z$ 的奇点 (一阶极点), 但函数在 ∞ 点仍可导. 这当然不是什么了不得的、不可接受的结论, 在讨论留数概念时, 我们也是面对着同样的状况: 函数在 ∞ 点的留数来自该函数的正则部分, 因此, 函数在 ∞ 点解析, 留数却可以不为 0. 而如果硬要规定函数在 ∞ 点的解析性与在该点及其邻域内的可导性挂钩, 即规定 $f(z) = z$ 在 ∞ 点不可导, 似乎并不是一个理想的解决办法.

依笔者之见, 要定义函数 $f(z)$ 在 ∞ 点的导数, 前提是该函数在 ∞ 点的 (空心) 邻域内可导 (否则 ∞ 点就是非孤立奇点, 无须再追问函数在 ∞ 点是否可导), 即 $f'(z)$ 存在, 而后就可以根据连续性的要求, 用极限 $\lim_{z \rightarrow \infty} f'(z)$ 作为 $f'(\infty)$ 的定义. 这样做的实质, 也就是认为在有限远处的微商法则对于 ∞ 点仍然适用.

如此定义函数在 ∞ 点的导数的后果就是, 函数 $f(z)$ 在 $z = \infty$ 点及其邻域内可导, 但仍可不在 $z = \infty$ 点解析.

也可以尝试通过作变换 $z = 1/t$ 来定义函数在 $z = \infty$ 点的导数. 在此变换下, $z = \infty$ 变为 $t = 0$. 我们当然不能简单地将 $f'(\infty)$ 定义为 $\left. \frac{df(1/t)}{dt} \right|_{t=0}$, 因为这违反了自变量变换下微商运算的变换规则. 合理的做法是将 $f'(\infty)$ 定义为 $\left. -t^2 \frac{df(1/t)}{dt} \right|_{t=0}$, 准确地说, 可以定义为 $\lim_{t \rightarrow 0} \left[-t^2 \frac{df(1/t)}{dt} \right]$. 例如, 对于函数 $f(z) = z$, $f(1/t) = 1/t$, $1/t$ 在 $t = 0$ 并不可导, 但 $\lim_{t \rightarrow 0} \left[-t^2 \frac{df(1/t)}{dt} \right] = 1$ 存在.

5. 关于解析函数的中值定理.

数学分析中关于 (微分) 中值定理的叙述为: 若一元函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可微, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

这样表述的中值定理对复变函数不成立: 若 a, b 是两复数, 则满足要求 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ 的 ξ 点不一定位于 a, b 两点的连线 $b - a$ 上. 例如对于 $f(z) = z^3 + z^2$, $f'(z) = 3z^2 + 2z$. 若取 $a = 0$, $b = i$, 则由

$$f(i) - f(0) = f'(\xi)(i - 0), \quad \text{即} \quad 3\xi^2 + 2\xi = -1 + i$$

解得的 $\xi = (-1 \pm \sqrt{-2 + 3i})/3$ 不为纯虚数, 显然不在连接 0 与 i 的线段上.

对于复变函数, 所谓 Darboux 中值定理成立, 其内容为: 若

(1) 函数 $f(z)$ 在 G 内具有连续导数;

(2) 直线段 $L \in G$, L 的端点为 a 与 b ,
则存在 λ 及 ζ ($|\lambda| \leq 1, \zeta \in L$), 使得

$$f(b) - f(a) = \lambda |b - a| f'(\zeta).$$

由于额外出现的 λ 是复数, 可以起着调节作用, 保证了 ζ 点处在直线段 L 上.

6. 关于 l'Hôpital 法则.

l'Hôpital 法则^①是求 ∞/∞ 或 $0/0$ 型极限的重要法则, 它将两个函数的商的极限转化为此二函数的导数的商的极限. 就实函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 而言, 若

- (1) 函数 f, g 在 (a, b) 内可微;
- (2) 对所有 $x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$ 或 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = +\infty$ (或 $-\infty$);
- (4) 极限 $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在,

则

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

类似的结论对 $x \rightarrow b-$ 或 $x \rightarrow +\infty$ (或 $-\infty$) 也成立. 而且, 如果 $\lim [f'(x)/g'(x)]$ 仍是 $0/0$ 或 ∞/∞ 型, 仍可继续使用这个法则.

l'Hôpital 法则对于解析函数仍然成立: 若 $z = z_0$ 是函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的零点 (或极点), 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

将 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 $z = z_0$ 的邻域内作幂级数展开 (Taylor 展开或 Laurent 展开), 即可证明.

7. 任意解析函数的围道积分均为 0 吗?

先要明确两点共识: (1) 所谓解析函数, 当然总是和一定区域相联系的; (2) 积分路径 (围道) 位于函数的解析区域内.

一般说来, 解析函数的围道积分不一定为 0.

要判断解析函数的围道积分是否为 0, 首先要明确区分围道所包围的是无界区域抑或有界区域. 我们知道, 如果积分围道所包围的是无界区域, 即使被积函数在区域内 (包含 ∞ 点) 解析, 此围道积分也可以不为 0.

^① l'Hôpital 法则是 Bernoulli Johann I 发现的, 而由他的学生 Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital (以前写为 l'Hospital) 于 1696 年发表.

如果积分围道所包围的是有界区域, 则又需要区分单连通区域或复连通区域.

若函数 $f(z)$ 在单连通区域内解析, 且积分围道 C 为光滑或分段光滑的简单闭合曲线, 则积分 $\oint_C f(z)dz$ 一定为 0. 这就是单连通区域的 Cauchy 定理. 而复连通区域的 Cauchy 定理告诉我们, 如果函数 $f(z)$ 在复连通区域内解析, 则围道积分 $\oint_C f(z)dz$ 一般不为 0. 这里所说的复连通区域, 总是由单连通区域内部挖去若干个“洞”而构成, 函数在“洞”内不解析, 或者说, 函数在“洞”内有奇点. 这些“洞”的形状, 视奇点为 (单值函数的) 孤立奇点或是非孤立奇点, 或是 (多值函数的) 枝点而定. 如果含有 (多值函数的) 枝点, 则需要作适当的割线 (其效果也是将这些枝点挖去). 不必考虑函数本来在单连通区域内就解析、而故意挖“洞”以形成复连通区域的人为之举.

在复连通区域的情形下, 如果 C 内包含的只是孤立奇点, 则可用留数定理计算 $\oint_C f(z)dz$, 无须详述.

8. 若 $\oint_C f(z)dz = 0$, 则 $f(z)$ 在 C 内解析.

这个说法当然不对. 从留数定理就可以判断, 即使 C 内有奇点, 只要留数为 0, 则仍然有 $\oint_C f(z)dz = 0$.

9. 在不改变求和次序的条件下, 收敛级数可以并项. 反过来说, 能否将收敛级数的项 u_n 拆为几项之和 (例如 $u_n = v_n + w_n$), 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n + \sum_{n=1}^{\infty} w_n$?

当然不能, 即使是绝对收敛级数或一致收敛级数也不能按照上述方式拆成两个或多个级数. 原因是, 即使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 并不能保证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 收敛, 甚至不能保证 v_n 与 w_n 都满足级数收敛的必要条件. 极端的例子就是取 $v_n = 1/n$, $w_n = u_n - 1/n$, 甚至 $v_n = 1$, $w_n = u_n - 1$.

10. 能否举出复函数级数收敛而不绝对收敛的例子?

不难举出这类级数的例子, 它们其实都和实的交错级数或调和级数有关. 例如, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1-z^n}{1+z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(1 - \frac{2z^n}{1+z^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{2}{1+z^n} - 1\right)$$

就是这样的例子. 此级数在单位圆内 ($|z| < 1$) 或单位圆外 ($|z| > 1$) 均收敛, 但并

不绝对收敛. 这是因为, 若令 $z = re^{i\theta}$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \frac{1-z^n}{1+z^n} \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1-2r^n \cos n\theta + r^{2n}}{1+2r^n \cos n\theta + r^{2n}}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{1 - \frac{4r^n \cos n\theta}{1+2r^n \cos n\theta + r^{2n}}},\end{aligned}$$

其通项

$$\frac{1}{n} \sqrt{1 - \frac{4r^n \cos n\theta}{1+2r^n \cos n\theta + r^{2n}}} \sim \frac{1}{n} \left(1 - \frac{2r^n \cos n\theta}{1+2r^n \cos n\theta + r^{2n}} \right).$$

由此就可以判断, 原级数在单位圆内 ($|z| < 1$) 或单位圆外 ($|z| > 1$) 都不绝对收敛.

收敛而不绝对收敛的级数肯定不可能是幂级数, 因为幂级数在收敛圆内一定绝对收敛.

11. 幂级数相乘后的收敛范围.

不言而喻, 应当限于收敛圆同心的两个级数相乘.

若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 G_1 内收敛 (因而一定绝对收敛), 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 在 G_2 内收敛 (因而也一定绝对收敛), 则它们的乘积 $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_m v_n$ 在 $G_1 \cap G_2$ 内一定收敛. 不仅如此, $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_m v_n$ 还可以在更大的区域内收敛, 甚至可以超出 $G_1 \cup G_2$. 准确说, 乘法是在 $G_1 \cap G_2$ 内有效, 但乘积 $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_m v_n$ 可能在更大的区域内解析. 原因是幂级数的收敛范围是由其奇点决定的: 在收敛区域的边界上一定有奇点^①, 但两幂级数相乘后奇异性有可能抵消. 例如, 如果

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

它们的收敛范围分别为 $|z| < 2$ 与 $|z| < 1$, 但它们的乘积

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_m v_n &= \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n \right) \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} z^{k+l}\end{aligned}$$

^① 证明见文献: E. C. Titchmarsh. *The Theory of Functions*. Oxford University Press, 1952: §4.21.

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \right) z^n \\
 &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) z^n \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

却在全平面收敛. 事实上, 因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n = \frac{1-z}{2-z},$$

所以, 奇点 $z=2$ 就决定了收敛半径 $R_1=2$; 同样, 由于

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{2}{1-z}.$$

奇点 $z=1$ 就决定了收敛半径 $R_2=1$. 它们的乘积当然在全平面收敛.

按照这样的思路, 读者不难举例说明下列各种可能出现的情形:

- (1) 级数 $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_m v_n$ 只在 $G_1 \cap G_2$ 内收敛;
- (2) 级数 $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_m v_n$ 在 $G_1 \cup G_2$ 内收敛;
- (3) 级数 $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_m v_n$ 的收敛范围, 大于 $G_1 \cap G_2$, 但小于 $G_1 \cup G_2$;
- (4) 级数 $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_m v_n$ 的收敛范围超出 $G_1 \cup G_2$.

12. 函数在扩充的全平面上的留数和为 0 吗?

这只对于全平面有有限个奇点的单值函数才成立. 如果函数有无穷多个奇点 (例如 $\tan z$), 其留数和 (无穷级数) 甚至不存在 (级数不收敛). 如果是多值函数, 即使是多值函数的一个单值分枝, 这个结论也不成立. 从根本上说, 留数概念只适用于单值函数的孤立奇点.

顺便说到, 如果略去“扩充的”三字, 只表述为“函数在全平面上的留数和为 0”, 则即使对于在全平面上有有限个奇点的单值函数, 这一说法也不一定成立.

13. 既然 ∞ 点是扩充的复平面上的一个点, 为什么不能直接将定积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ 看成围道积分?

需要从理论与实用两个角度来回答这个问题.

(1) 首先要回到定积分本身, 其定义本来就是

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{R_1 \rightarrow \infty \\ R_2 \rightarrow \infty}} \int_{-R_1}^{R_2} f(x) dx,$$

或其主值

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx,$$

复变函数中自然应当继承数学分析中的这个定义.

(2) 还值得讨论一下函数在 ∞ 处的性质. 如果 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的奇点, 积分路线当然不能直接通过 ∞ 点. 如果 $f(z)$ 在 ∞ 点解析, 积分路线其实也不见得能直接通过 ∞ 点, 因为这涉及在 ∞ 点附近的线段 (记为 L) 上的积分是否有定义. 事实上, 作变换 $z = 1/t$, 有

$$\int_L f(z) dz = - \int_{L'} f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2},$$

L' 是位于 $t = 0$ 附近的线段 (L 的映射). 这说明, 即使 $f(z)$ 在 $z = \infty$ 点解析, 即 $f(1/t)$ 在 $t = 0$ 点解析, $t = 0$ 仍可以是 $t^{-2} f(1/t)$ 的奇点. 因此, 仍然必须绕开 $t = 0$ 点. 相应地, 在 z 平面上, 必须绕开 ∞ 点, 其效果也就是作辅助路径 C_R .

(3) 退一步说, 对于这样的积分围道, 留数定理并不成立, 因为作为导出留数定理的理论基础, 需要用到复连通区域的 Cauchy 定理, 它只适用于有界区域. 因此将无穷积分看成围道积分, 在实用上也没有实际意义.

14. 应用留数定理计算定积分 $\int_{-\infty}^{\infty} Q(x) \sin px \, dx$ 或 $\int_{-\infty}^{\infty} Q(x) \cos px \, dx$, 其中 $p > 0$.

对于这两种类型的积分, 都需要假设 $Q(z)$ 满足一定要求, 例如, $Q(z)$ 在全平面都只有有限个奇点, 并且在 $0 \leq \arg z \leq \pi$ 的范围内, 当 $z \rightarrow \infty$ 时, $Q(z)$ 一致趋于 0; 而在实际的大量计算中, 往往在 $\arg z$ 的更大范围内, 甚至无论 $\arg z$ 取何值, 都有 $\lim_{z \rightarrow \infty} Q(z) = 0$. 以下的讨论还要求 $Q(z)$ 为单值函数, 且 $z = \infty$ 不是它的非孤立奇点. 如果这些附加的条件不满足, 当然需要另作具体讨论.

在采用留数定理计算这两种类型的积分时, 通常都是采用上半平面内的半圆围道计算复变积分 $\oint_C Q(z) e^{ipz} dz$, 其中的关键在于: 应用 Jordan 引理判断, 当半径 $R \rightarrow \infty$ 时, 沿半圆弧的积分 $\int_{C_R} Q(z) e^{ipz} dz \rightarrow 0$. 具体细节无须重复. 通常教学中可能都会强调, 复变积分的被积函数不应取为 $Q(z) \sin pz$ 或 $Q(z) \cos pz$. 但解释这种做法的理由, 有时可能并不正确. 为了阐述这一观点, 不妨将之提炼为下面两个问题:

(1) 我们之所以不直接考虑复变积分 $\oint_C Q(z) \sin pz dz$ 或 $\oint_C Q(z) \cos pz dz$, 是因为 ∞ 点为 $\sin pz$ 和 $\cos pz$ 的本性奇点, 导致 $R \rightarrow \infty$ 时极限 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) \sin pz dz$ 和 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) \cos pz dz$ 不存在. 这个说法对不对?

(2) 如果直接考虑复变积分 $\oint_C Q(z) \sin pz dz$, 能否算出 $\int_{-\infty}^{\infty} Q(x) \sin px dx$?

对这两个问题的正确回答是: 问题 (1) 中关于“ ∞ 是 $\sin pz$ 和 $\cos pz$ 的本性奇点”的说法当然是正确的, 而且, 正因为 ∞ 是本性奇点, 所以当 z 按不同方式逼近 ∞ 时, $\sin pz$ 或 $\cos pz$ 可以逼近不同的值, 或者说 $z \rightarrow \infty$ 时 $\sin pz$ 和 $\cos pz$ 的极限均不存在. 但是, 由此并不能推出“ $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) \sin pz dz$ 和 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) \cos pz dz$ 不存在”的结论. 理由是: 如果以 R 为半径作圆, 只要 R 足够大, 在圆外除 ∞ 外别无奇点, 则

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=R} Q(z) e^{ipz} dz &= -2\pi i \times \{Q(z) e^{ipz} \text{ 在 } \infty \text{ 处的留数}\}, \\ \oint_{|z|=R} Q(z) e^{-ipz} dz &= -2\pi i \times \{Q(z) e^{-ipz} \text{ 在 } \infty \text{ 处的留数}\}\end{aligned}$$

都是存在的. 再进一步, 应用 Jordan 引理, 就能证明下列四个积分均存在:

$$\begin{aligned}\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) \cos pz dz &= -\pi i \times \{Q(z) e^{-ipz} \text{ 在 } \infty \text{ 处的留数}\}, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) \sin pz dz &= \pi \times \{Q(z) e^{-ipz} \text{ 在 } \infty \text{ 处的留数}\}, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} Q(z) \cos pz dz &= -\pi i \times \{Q(z) e^{ipz} \text{ 在 } \infty \text{ 处的留数}\}, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} Q(z) \sin pz dz &= -\pi \times \{Q(z) e^{ipz} \text{ 在 } \infty \text{ 处的留数}\},\end{aligned}$$

其中 C_R 与 C'_R 分别为位于上半平面与下半平面内的半圆弧, 半径为 R . 在此基础上, 自然就能回答问题 (2): 直接考虑复变积分 $\oint_C Q(z) \sin pz dz$, 也能够应用留数定理计算出定积分

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} Q(x) \sin px dx &= 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} \{Q(z) \sin pz\} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) \sin pz dz \\ &= 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} \{Q(z) \sin pz\} - \pi \times \operatorname{res} \{Q(z) e^{-ipz}\}_{z=\infty}.\end{aligned}$$

例如, 我们就可以通过围道积分 $\oint_C \frac{\sin z}{z} dz$ 来计算定积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

至于在实际计算中,从计算的可行性与简便性来看,到底应当采用传统的围道积分 $\oint_C Q(z)e^{ipz}dz$, 还是直接计算 $\oint_C Q(z)\sin pz dz$ 或 $\oint_C Q(z)\cos pz dz$, 应该视具体问题而定. 在第六章中有更详细的讨论.

15. $1/\Gamma(z)$ 有没有奇点, ∞ 点是什么点?

函数 $1/\Gamma(z)$ 在有限远处没有奇点 (因为 $\Gamma(z)$ 在有限远处只有一阶极点, 而且没有零点), 所以 $z = \infty$ 一定是奇点 (否则 $1/\Gamma(z)$ 只能是常数), 而且不可能是极点 (否则 $1/\Gamma(z)$ 就是多项式). 这样就能断定 $z = \infty$ 一定是 $1/\Gamma(z)$ 的本性奇点 (因为 $\Gamma(z)$ 是单值函数).

16. 举例说明函数不满足 Laplace 变换存在的充分条件, 其 Laplace 变换仍可存在.

$\sin e^{t^2}$ 满足 Laplace 变换存在的充分条件, $|\sin e^{t^2}| \leq 1$, 其 Laplace 变换一定存在.

$\sin e^{t^2}$ 的导数 $2te^{t^2} \cos e^{t^2}$ 显然不满足 Laplace 变换存在的充分条件, 即不存在使 $|2te^{t^2} \cos e^{t^2}| < Me^{s_0 t}$ 成立的 s_0 值, 但其 Laplace 变换存在:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{2te^{t^2} \cos e^{t^2}\} &= \int_0^\infty 2te^{t^2} \cos e^{t^2} \cdot e^{-pt} dt \\ &= \sin e^{t^2} \cdot e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty \sin e^{t^2} \cdot e^{-pt} dt \\ &= p \int_0^\infty \sin e^{t^2} \cdot e^{-pt} dt.\end{aligned}$$

17. 间断函数的 Laplace 变换: Laplace 变换反演的唯一性问题.

对于具有第一类间断点 (函数在该点的左、右极限均存在, 但不相等) 的函数, 只要满足 Laplace 变换存在的充分条件, 其 Laplace 变换当然存在. 这种例子可以举出很多. 例如, 对于方形波

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 2n\pi < t < (2n+1)\pi, \\ -1, & (2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

其 Laplace 变换就是

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\pi e^{-pt} dt - \int_\pi^{2\pi} e^{-pt} dt + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{-pt} dt - \int_{3\pi}^{4\pi} e^{-pt} dt + \dots$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (-1)^n e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [e^{-n\pi p} - e^{-(n+1)\pi p}] \\
&= \frac{1}{p} \frac{1 - e^{-\pi p}}{1 + e^{-\pi p}} = \frac{1}{p} \tanh \frac{\pi p}{2}.
\end{aligned}$$

$t = n\pi (n = 0, 1, 2, \dots)$ 是 $f(t)$ 的间断点, 上面我们甚至并没有给出函数 $f(t)$ 在这些点的取值. 例如, 可以假定 $f(n\pi) = 0$, 也可以假定 $f(n\pi)$ 取非零值, 但这些函数值都不会影响到 $\mathcal{L}\{f(t)\}$ 的计算. 当然, 反过来说, 这也就说明了

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \tanh \frac{\pi p}{2} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{1}{p} \tanh \frac{\pi p}{2} e^{pt} dp, \quad s > 0$$

并不会收敛到原来的 $f(t)$. 事实上, 令 $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, 可以证明^①, 若

- (1) 对于任意 $R > 0$, $\int_0^R |f(t)| dt$ 收敛;
- (2) 在直线 $\operatorname{Re} p = s$ 上, 积分 $\int_0^R |f(t) e^{-pt}| dt$ 收敛;
- (3) $f(u)$ 在 $u = t (t \geq 0)$ 的邻域内具有有限变差^②,

则我们有

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\tau}^{s+i\tau} F(p) e^{pt} dp = \begin{cases} \frac{1}{2} [f(t+) + f(t-)], & t > 0, \\ \frac{1}{2} f(0+), & t = 0. \end{cases}$$

18. 二阶线性齐次常微分方程有两个线性无关特解 (若存在第三个解, 则一定与之线性相关), 方程的通解就可以表示为这两个特解的线性组合, 因此一定含有两个叠加常数.

在经典微积分的范畴内, 这个说法是正确的. 然而, 在广义函数的范畴内, 这个说法不一定正确. 在广义函数的意义下, 二阶线性齐次常微分方程可以有三个线性无关的特解. 换言之, 除了原有的两个经典解之外, 还可以存在在经典意义下所不允许的广义函数解. 这出现在微分方程具有奇点的情形. 例如, 方程 $xw'' = 0$ 就有三个特解: $w_1 = 1$, $w_2 = x$, $w_3 = |x|$, 因此它的通解就是 $w = c_1 + c_2 x + c_3 |x|$. 注意 w_1 与 w_2 都是经典解, 而 $w_3 = |x|$ 是广义函数意义下增加的新的解.

① 参见文献: D. V. Widder. *The Laplace Transform*. Princeton: Princeton University Press, 1941: 66.

② 对于区间 $[a, b]$ 上的 n -元函数 $f(x)$,

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \right\} \quad (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的全变差. 若全变差有限, 则 $f(x)$ 称为区间 $[a, b]$ 上的有限变差函数.

二阶线性齐次常微分方程甚至还可以有更多个线性无关的特解, 例如, $x^2 u'' = 0$ 就有四个线性无关的特解: $w_1 = 1$, $w_2 = x$ 以及广义函数解 $w_3 = |x|$, $w_4 = \eta(x)$. 这里的 $\eta(x)$ 是 Heaviside 单位阶跃函数.

§1.2 函数可导的充分必要条件

关于函数 (在某点) z_0 可导的充分必要条件, 有下列几种说法^①:

(1) 如果 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 的实部 $u(x, y)$ 和虚部 $v(x, y)$ (作为实的二元函数) 均可微, 且满足 Cauchy-Riemann 方程, 则函数 $f(z)$ 可导.

(2) Let $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ be a given function, with A an open set. Then $f'(z_0)$ exists if and only if g is differentiable in the sense of real variables and, at $(x_0, y_0) = z_0$, u, v satisfy the Cauchy-Riemann equations.

(3) 函数 $f(z)$ 可导的充分必要条件是: 函数 $f(z)$ 的偏导数 $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ 和 $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ 存在且连续, 并且满足 Cauchy-Riemann 方程.

(4) 在 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 的偏导数 $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ 和 $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ 存在且连续的前提下, Cauchy-Riemann 方程才是函数可导的充分必要条件.

以上几种说法中, 前两种是正确的. 偏导数存在并且连续是二元函数可微的充分条件而非充分必要条件, 有关内容在数学分析的教材均有讨论, 此处从略. 在这一方面, 需要注意在实的二元函数中, “可导” (即偏导数存在) 与 “可微” (即全微分存在) 并不等价: 二元函数可导并不一定可微, 而可微则一定可导; 在复变函数中, 则可以证明, 可导与可微是互相等价的.

至于上面的第四种说法, 应该说, 与第一、二两种说法还是有一些差别的.

与函数可导的充分必要条件相关的问题是函数解析的充分必要条件. 既然函数在区域内每一点均可导, 则称函数在区域内解析. 那么, 函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域 D 内解析的充分必要条件便是 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 D 内可微, 且一阶偏导数在 D 内满足 Cauchy-Riemann 方程. 但是, 可以严格证明, 若函数 $f(z)$ 在区域内解析 (即 $f'(z)$ 在区域内每一点均存在), 则函数的任意阶导数均存在. 特别是, 函数的二阶导数存在, 故一阶导数必连续. 换言之, 只要函数在区域内每一点都可导, 则其一阶导数一定在区域内连续. 因此, 如果说 “函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析的充分必要条件是 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 对 x 与 y 有连续偏导数, 并且满足 Cauchy-Riemann 方程”, 这种说法并不错, 问题只是条件尚可减弱. 之所以出现 “偏导数连续” 这一要求, 或许有它的历史原因: 1814 年, Cauchy 给出解析函数的定义时, 就曾要求导函数连续, 并由此导出了 Cauchy 定理. 1900 年, Édouard-Jean-Baptiste Goursat

^① 笔者只是收集了现有教材中的一些论述, 并非针对具体文献作任何评述, 因此恕不列出引文出处.

证明: 若 $f = u + iv$ 为复函数, 实二元函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 均可微, 则 f 在区域 D 内解析的充分必要条件是它在该区域内满足 Cauchy-Riemann 方程 (Goursat 定理). 这里并未要求 u 和 v 的导函数连续. 而且 Goursat 定理中关于实二元函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 均可微的要求还可以大幅度减弱为 $f = u + iv$ 在 D 上连续, 而 f 对于 x 和 y 的偏导数在 D 中存在 (Looman-Menchoff 定理) ^①.

事实上, 今天所谓的 Cauchy-Riemann 方程, 最早可以追溯到 d'Alembert 关于流体理论的著作 (1752 年). 在 Euler (1777 年) 和 Lagrange 的著作中也曾出现过. 到了 1814 年, Cauchy 在讨论 (实) 二重积分换序时又一次得到这组方程. 然而他们都没有认识到它的重要性, 都没有把这组方程看成 (复) 函数论的基础. Riemann 是认识到 dw/dz 的存在性意味着对于 $z + \Delta z \rightarrow z$ 的任意方式 $\Delta w/\Delta z$ 都必须逼近于同一值的第一人. 他认识到函数 $f(z) = u + iv$ 在一点及其邻域内解析, 如果它连续可微并且满足 Cauchy-Riemann 方程.

函数解析的充分必要条件还有其他表述形式, 例如见 Morera 定理或 Cauchy 型积分, 也可见函数的 Taylor 展开. 也还可以用“变换”或“映射”的语言表述, 即解析函数的保角性或“保持无穷小圆”的特性.

解析函数的性质表现在方方面面. 在漫长的历史发展中, 由于从不同角度研究解析函数, 因而就出现了不同的称谓. 在历史文献中就曾出现过其他术语, 后来认识到了它们的等价性, 所以很少再用. 作为解析的同义词, 至今仍在使用的还有“全纯” (holomorphic)、“单演” (monogenic) 和“正则” (regular) 等.

§1.3 Cauchy 定理与 Cauchy 积分公式

例 1.1 证明实系数多项式必有零点, 除非该多项式恒为常数 (零次多项式).

证 用反证法. 设此多项式为

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ 均为实数. 按所设, 若 $P_n(z)$ 无零点, 则当 z 取实数值 x 时, $P_n(x)$ 一定不为 0, 且不变号, 因此

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P_n(2 \cos \theta)} \neq 0.$$

令 $z = e^{i\theta}$, 则上式化为

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{P_n(z + z^{-1})} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z^{n-1}}{Q_{2n}(z)} dz \neq 0, \quad (1.1)$$

^① 引自 http://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy-Riemann_Equations.

其中 $Q_{2n}(z) = z^n P_n(z + z^{-1})$ 为 $2n$ 次多项式. 因为 $P_n(z) \neq 0$, 所以 $z \neq 0$ 时 $P_n(z + z^{-1}) \neq 0$, 即 $Q_{2n}(z) \neq 0$. 又因为 $Q_{2n}(0) = a_n$ 亦不为 0, 所以 $z^{n-1}/Q_{2n}(z)$ (在全平面) 解析. 根据 Cauchy 定理, 一定有

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^{n-1}}{Q_{2n}(z)} dz = 0.$$

与 (1.1) 式矛盾. 因此 $P_n(z)$ 必有零点. 命题得证. \square

讨论 此结论对于复系数多项式仍正确. 因为即使 $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ 为复系数多项式, 则可以构造一个新的实系数多项式

$$(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0) \cdot (a_n^* z^n + a_{n-1}^* z^{n-1} + \cdots + a_0^*),$$

因此上述结论仍然成立.

例 1.2 设 G 为单连通区域, C 是它的边界, 若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 均在 \overline{G} 中解析, 且 $g(z)$ 在 G 内只有一个一阶零点 z_0 , 在 C 上无零点, 试证明

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta.$$

证 令 $g(z) = (z - z_0)h(z)$, 则 $h(z)$ 必在 \overline{G} 中解析, 且在 \overline{G} 中无零点, 因此

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{d \ln g(z)}{dz} = \frac{1}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

函数 $h'(z)/h(z)$ 也在 \overline{G} 中解析, 于是有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \left[\frac{1}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)} \right] d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\oint_C \frac{f(\zeta)}{z - z_0} d\zeta + \oint_C f(\zeta) \frac{h'(z)}{h(z)} d\zeta \right]. \end{aligned}$$

但上式右端第二个积分一定为 0 (因为被积函数解析), 因而证得

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta. \quad \square$$

讨论 若 z_0 为 n 阶零点, 则应该有

$$f(z_0) = \frac{1}{2n\pi i} \oint_C f(\zeta) \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta.$$

例 1.3 设 G 为单连通区域, C 是它的边界, $P(z)$ 为 n 次多项式, 其零点 z_1, z_2, \dots, z_n 均为一阶零点, 且全部处于 G 内, $f(z)$ 在 \overline{G} 中解析, 试证明

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{P(\zeta)} \frac{P(\zeta) - P(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

是一个 $n-1$ 次多项式, 且

$$Q(z_k) = f(z_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

如果 G 是复连通区域, 上述结果还正确吗?

证 由题设知 $P(z)$ 为 n 次多项式:

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

因此

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{z - z_2} + \cdots + \frac{A_n}{z - z_n},$$

其中 A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 为常数 (即函数 $1/P(z)$ 在奇点 $z = z_i$ 处的留数). 又因为

$$\frac{P(\zeta) - P(z)}{\zeta - z} \triangleq R_{n-1}(\zeta; z)$$

一定既是 ζ 的 $n-1$ 次多项式, 也是 z 的 $n-1$ 次多项式, 所以

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_i} R_{n-1}(\zeta; z) d\zeta,$$

其中 C_i 为足够小的闭合围道, 只包含 $P(z)$ 的一个零点 z_i . 根据 Cauchy 积分公式, 就立即得到

$$Q(z) = \sum_{i=1}^n f(z_i) R_{n-1}(z_i, z).$$

即证得 $Q(z)$ 为 $n-1$ 次多项式.

特别是当 $z = z_k$ 时,

$$Q(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{P(\zeta)} \frac{P(\zeta) - P(z_k)}{\zeta - z_k} d\zeta.$$

因为 $P(z_k) = 0$, 所以

$$Q(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_k} d\zeta = f(z_k).$$

显然, 当 G 是复连通区域时上述结果不成立. □

例 1.4 已知 $f(z) = \left(\frac{z}{e^z - 1}\right)^\alpha$ 在 $|z| < 1$ 内解析, 设它在 $z = 0$ 点的导数为 $f^{(n)}(0) = B_n(\alpha)$, 试计算

$$C_n(\alpha) = \left. \frac{d^n f(\ln(1+z))}{dz^n} \right|_{z=0}.$$

解 由解析函数的高阶导数公式知

$$B_n(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \left(\frac{z}{e^z - 1} \right)^\alpha \frac{dz}{z^{n+1}},$$

$$C_n(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C'} \left[\frac{\ln(1+z)}{z} \right]^\alpha \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

不妨取积分围道 C 与 C' 为以 $z=0$ 为圆心的圆周, 其半径足够小, 使在圆内除 $z=0$ 为被积函数的奇点外别无奇点. 因此, 作变换 $z = \ln(1+\zeta)$, 就有

$$B_n(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C'} \left[\frac{\ln(1+\zeta)}{\zeta} \right]^\alpha \left[\frac{1}{\ln(1+\zeta)} \right]^{n+1} \frac{d\zeta}{1+\zeta}.$$

注意到

$$\frac{d}{d\zeta} \frac{[\ln(1+\zeta)]^{\alpha-n}}{\zeta^\alpha} = \frac{\alpha-n}{1+\zeta} \frac{[\ln(1+\zeta)]^{\alpha-n-1}}{\zeta^\alpha} - \frac{\alpha}{\zeta^{\alpha+1}} [\ln(1+\zeta)]^{\alpha-n}.$$

所以就求得

$$B_n(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha-n} \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C'} \left[\frac{\ln(1+\zeta)}{\zeta} \right]^{\alpha-n} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}} = \frac{\alpha}{\alpha-n} C_n(\alpha-n),$$

亦即

$$\frac{C_n(\alpha-n)}{\alpha-n} = \frac{B_n(\alpha)}{\alpha} \quad \text{或} \quad \frac{C_n(\alpha)}{\alpha} = \frac{B_n(\alpha+n)}{\alpha+n}.$$

讨论

1. 本题实际上是讨论了函数 $f(z)$ 与 $f(\ln(1+z))$ 的 Taylor 展开

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k, \quad f(\ln(1+z)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{k!} z^k$$

之间的关系. 在文献中, 常将展开系数 $B_k(\alpha)$ 写成 $B_k^{(\alpha)}$, 称为广义 Bernoulli 数.

2. 在上面的计算中, 我们未加证明地引用了下列结论:

(1) 在变换 $z = \ln(1+\zeta)$ 下, 积分围道 C 将变为 ζ 平面上的围道 C'' , C 内区域变为 C'' 内区域. 这表现为: C 内含有 $z=0$ 点, C'' 内含有 $\zeta=0$ 点; 沿边界 C 正向一周则变为沿 C'' 正向一周.

(2) 不妨假设 C' 完全处于 C'' 内, 由 Cauchy 定理可知, 沿 C'' 一周的积分与沿 C' 一周的积分相等.

例 1.5 已知 $f(z) = \left(\frac{z}{e^z - 1} \right)^\alpha e^{tz}$ 在 $|z| < 1$ 内解析, 设它在 $z=0$ 点的导数为 $f^{(n)}(0) = B_n(\alpha; t)$, 试计算

$$C_n(\alpha; t) = \left. \frac{d^n f(\ln(1+z))}{dz^n} \right|_{z=0}.$$

解 显然

$$f(\ln(1+z)) = \left[\frac{\ln(1+z)}{z} \right]^\alpha (1+z)^t.$$

由解析函数的高阶导数公式知

$$\begin{aligned} B_n(\alpha; t) &= \frac{n!}{2\pi i} \oint_C e^{tz} \left(\frac{z}{e^z - 1} \right)^\alpha \frac{dz}{z^{n+1}}, \\ C_n(\alpha; t) &= \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C'} (1+z)^t \left[\frac{\ln(1+z)}{z} \right]^\alpha \frac{dz}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$

同例 1.4, 不妨取积分围道 C 与 C' 为以 $z=0$ 为圆心的圆周, 其半径足够小, 使在圆内除 $z=0$ 为被积函数的奇点外别无奇点. 于是, 作变换 $\zeta = \ln(1+z)$, 就有

$$\begin{aligned} C_n(\alpha; t) &= \frac{n!}{2\pi i} \oint_C e^{t\zeta} \left(\frac{\zeta}{e^\zeta - 1} \right)^\alpha \frac{e^\zeta}{(e^\zeta - 1)^{n+1}} d\zeta \\ &= \frac{k!}{2\pi i} \oint_C e^{(1+t)\zeta} \left(\frac{\zeta}{e^\zeta - 1} \right)^{n+\alpha+1} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}} \\ &= B_n(n+\alpha+1; 1+t). \end{aligned}$$

☞ 讨论 $B_n(\alpha; t)$ 与广义 Bernoulli 数 $B_k^{(\alpha)}$ 有关, 即

$$B_n(\alpha; t) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{\alpha}{\alpha-k} \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t-n+k+1)} B_k^{(k-\alpha)}.$$

而特别当 α 为整数时, $B_n(\alpha; t)$ 称为广义 Bernoulli 多项式, 记为 $B_n^{(\alpha)}(t)$.

$C_n(\alpha; t)$ 称为 Narumi 多项式^①, 记为 $s_n(t; -\alpha)$.

例 1.6 无界区域的高阶微商公式.

可以模仿有界区域高阶微商公式的证明方法. 我们知道^②, 如果 $f(\zeta)$ 在简单闭合围道 C 上及 C 外解析, 则对于圆外一点 z , 有

$$f(z) - f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

其中 C 为顺时针方向, 即绕 ∞ 点的正向. 因此

① 参见文献: R. P. Boas, Jr. & R. C. Buck, *Polynomial Expansions of Analytic Functions*. Berlin: Springer-Verlag, 1958: 37.

② 参见: 吴崇试. 数学物理方法. 第 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2003: 29.

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{h} \oint_C \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-z-h} - \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} \right] d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)} d\zeta.\end{aligned}$$

仿照有界区域的做法, 就可以证得

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta. \quad (1.2a)$$

重复以上计算, 就可以推得更普遍的结果:

$$f^{(n)}(z) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2b)$$

成立条件与 (1.2a) 式相同.

例 1.7 证明: 若 $\rho = 1/\xi$, 则对于解析函数 $f(z)$, 有变换公式

$$\frac{d^n f(\xi)}{d\xi^n} = (-1)^n \rho^{n+1} \frac{d^n}{d\rho^n} \left[\rho^{n-1} f\left(\frac{1}{\rho}\right) \right]. \quad (1.3)$$

证 利用有界区域和无界区域的高阶微商公式即可. 对于给定的 $z = \xi$, 有

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-\xi)^{n+1}} dz,$$

其中 $|\xi| < R$. 作变换 $\zeta = 1/z$, 则 z 平面上的围道 $|z| = R$ 变换为 ζ 平面上的围道 $|\zeta| = 1/R$, 且积分路径的走向由逆时针 (圆内区域的边界正向) 变为顺时针 (圆外区域的边界正向), 因此

$$\begin{aligned}f^{(n)}(\xi) &= \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1/R} \frac{f(1/\zeta)}{(\zeta^{-1}-\rho^{-1})^{n+1}} \left(-\frac{d\zeta}{\zeta^2} \right) \\ &= (-1)^n \rho^{n+1} \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=1/R} \frac{f(1/\zeta)}{(\zeta-\rho)^{n+1}} \zeta^{n-1} d\zeta.\end{aligned}$$

比较 (1.2b) 式, 即可证得 (1.3) 式.

第二章 无穷级数

§2.1 无穷级数的收敛性

例 2.1 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 皆为正项级数, 试举反例, 说明下列说法不正确:

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $a_{2n} < a_{2n+1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(3) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ 发散.

解 (1) 取 $a_n = \frac{1}{n \ln n}$, 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ 的要求, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散.

(2) 取 $a_{2n} = 0$, $a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ 收敛, 其和为 $\sinh 1$.

也可举出 a_n 均不为 0 的例子. 例如 $a_{2n} = 3^{-n}$, $a_{2n+1} = 2^{-n}$, 则 $a_{2n} < a_{2n+1}$, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 其和为 $2 + 1/2 = 5/2$.

(3) 同 (2).

(4) 可取

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数,} \\ 2^{-2n}, & n \text{ 为偶数,} \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} 2^{-2n}, & n \text{ 为奇数,} \\ 1, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均不满足级数收敛的必要条件, 但

$$\sqrt{a_n b_n} = 2^{-n},$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ 收敛.

例 2.2 讨论级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{k+l} \frac{kl}{(k+l)^2}$ 的收敛性^①.

解 按照有关级数收敛性的定义, 我们应当先求出部分和 $S_{m,n}$.

^① 参见: 吴崇试, 数学物理方法, 第 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2003: 39.

为了计算的方便, 需要区分 m, n 为奇数或偶数的情况.

下面先计算 $S_{2m, 2n}$, 只要 $m \neq n$, 就可以假设 $n < m$,

$$\begin{aligned}
 S_{2m, 2n} &= \sum_{k=1}^{2m} \sum_{l=1}^{2n} (-1)^{k+l} \frac{kl}{(k+l)^2} = \sum_{r=2}^{2m+2n} \frac{(-1)^r}{r^2} \left[\sum_{l=\max(1, r-2m)}^{\min(r-1, 2n)} l(r-l) \right] \\
 &= \sum_{r=2}^{2n+1} \frac{(-1)^r}{r^2} \left[\sum_{l=1}^{r-1} l(r-l) \right] + \sum_{r=2n+2}^{2m+1} \frac{(-1)^r}{r^2} \left[\sum_{l=1}^{2n} l(r-l) \right] \\
 &\quad + \sum_{r=2m+2}^{2m+2n} \frac{(-1)^r}{r^2} \left[\sum_{l=r-2m}^{2n} l(r-l) \right] \\
 &= \sum_{r=2}^{2n+1} \frac{(-1)^r}{r^2} \frac{(r-1)r(r+1)}{6} + \sum_{r=2n+2}^{2m+1} \frac{(-1)^r}{r^2} \frac{2n(2n+1)(3r-4n-1)}{6} \\
 &\quad + \sum_{r=2m+2}^{2m+2n} \frac{(-1)^r}{r^2} \left[\frac{2n(2n+1)(3r-4n-1)}{6} - \frac{(r-2m-1)(r-2m)(r+4m+1)}{6} \right] \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{r=2}^{2n+1} (-1)^r \left(r - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{3} n(2n+1) \sum_{r=2n+2}^{2m+2n} (-1)^r \frac{3r-4n-1}{r^2} \\
 &\quad - \frac{1}{6} \sum_{r=2m+2}^{2m+2n} (-1)^r \frac{r^3 - (12m^2 + 6m + 1)r + 2m(2m+1)(4m+1)}{r^2} \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{r=2}^{2n+1} (-1)^r \left(r - \frac{1}{r} \right) + n(2n+1) \sum_{r=2n+2}^{2m+2n} \frac{(-1)^r}{r} \\
 &\quad - \frac{1}{3} n(2n+1)(4n+1) \sum_{r=2n+2}^{2m+2n} \frac{(-1)^r}{r^2} \\
 &\quad - \frac{1}{6} \sum_{r=2m+2}^{2m+2n} (-1)^r \left[r - \frac{12m^2 + 6m + 1}{r} + \frac{2m(2m+1)(4m+1)}{r^2} \right]. \tag{2.1}
 \end{aligned}$$

在得到以上结果时用到了

$$\sum_{l=1}^s l(r-l) = r \sum_{l=1}^s l - \sum_{l=1}^s l^2 = \frac{s(s+1)(3r-2s-1)}{6}.$$

因为

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=2}^{2n+1} (-1)^r r &= -n, \\
 \sum_{r=2}^{2n+1} \frac{(-1)^r}{r} &= \frac{1}{2} \left[\psi(n+1) - \psi\left(n + \frac{3}{2}\right) + \psi\left(\frac{3}{2}\right) - \psi(1) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{r=2n+2}^{2m+2n} \frac{(-1)^r}{r} &= \frac{1}{2} \left[\psi(m+n+1) - \psi\left(m+n+\frac{1}{2}\right) + \psi\left(n+\frac{3}{2}\right) - \psi(n+1) \right], \\
\sum_{r=2n+2}^{2m+2n} \frac{(-1)^r}{r^2} &= -\frac{1}{4} \left[\psi'(m+n+1) - \psi'\left(m+n+\frac{1}{2}\right) + \psi'\left(n+\frac{3}{2}\right) - \psi'(n+1) \right], \\
\sum_{r=2m+2}^{2m+2n} (-1)^r r &= n+2m+1, \\
\sum_{r=2m+2}^{2m+2n} \frac{(-1)^r}{r} &= \frac{1}{2} \left[\psi(m+n+1) - \psi\left(m+n+\frac{1}{2}\right) + \psi\left(m+\frac{3}{2}\right) - \psi(m+1) \right], \\
\sum_{r=2m+2}^{2m+2n} \frac{(-1)^r}{r^2} &= -\frac{1}{4} \left[\psi'(m+n+1) - \psi'\left(m+n+\frac{1}{2}\right) + \psi'\left(m+\frac{3}{2}\right) - \psi'(m+1) \right],
\end{aligned}$$

代入即得

$$\begin{aligned}
S_{2m,2n} &= -\frac{n}{6} - \frac{1}{12} \left[\psi(n+1) - \psi\left(n+\frac{3}{2}\right) + \psi\left(\frac{3}{2}\right) - \psi(1) \right] \\
&\quad + \left[\frac{n(2n+1)}{2} + \frac{12m^2+6m+1}{12} \right] \left[\psi(m+n+1) - \psi\left(m+n+\frac{1}{2}\right) \right] \\
&\quad + \left[\frac{n(2n+1)(4n+1)}{12} + \frac{2m(2m+1)(4m+1)}{24} \right] \left[\psi'(m+n+1) - \psi'\left(m+n+\frac{1}{2}\right) \right] \\
&\quad + \frac{n(2n+1)}{2} \left[\psi\left(n+\frac{3}{2}\right) - \psi(n+1) \right] + \frac{12m^2+6m+1}{12} \left[\psi\left(m+\frac{3}{2}\right) - \psi(m+1) \right] \\
&\quad + \frac{n(2n+1)(4n+1)}{12} \left[\psi'\left(n+\frac{3}{2}\right) - \psi'(n+1) \right] \\
&\quad + \frac{2m(2m+1)(4m+1)}{24} \left[\psi'\left(m+\frac{3}{2}\right) - \psi'(m+1) \right] - \frac{1}{6}(n+2m+1). \quad (2.2)
\end{aligned}$$

事实上, 直接计算部分和 $S_{2m,2m}$, 就会发现 (2.2) 式也适用于 $m=n$ 的情形. 利用 $\psi(z)$ 在 $z \rightarrow \infty$ 时的渐近展开

$$\psi(z) \sim \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} - \cdots, \quad \psi'(z) \sim \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \cdots,$$

能够导出

$$\psi\left(z+\frac{1}{2}\right) - \psi(z) \sim \ln\left(1+\frac{1}{2z}\right) + \left(\frac{1}{2z} - \frac{1}{2z+1}\right) + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{(2z)^2} - \frac{1}{(2z+1)^2} \right] + \cdots,$$

因此

$$\psi\left(z+\frac{1}{2}\right) - \psi(z) \sim \frac{1}{2} \frac{1}{z} + \frac{1}{8} \frac{1}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^4}\right),$$

$$\psi'\left(z + \frac{1}{2}\right) - \psi'(z) = -\frac{1}{2} \frac{1}{z^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{z^3} + O\left(\frac{1}{z^5}\right).$$

由此得到

$$\begin{aligned} \psi\left(z + \frac{3}{2}\right) - \psi(z+1) &= \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} + \frac{1}{8} \frac{1}{(z+1)^2} + O\left(\frac{1}{z^4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{z} - \frac{3}{8} \frac{1}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right), \end{aligned} \quad (2.3a)$$

$$\psi'\left(z + \frac{3}{2}\right) - \psi'(z+1) = -\frac{1}{2} \frac{1}{z^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{z^3} + O\left(\frac{1}{z^4}\right), \quad (2.3b)$$

并且代入 $\psi(z)$ 的特殊值

$$\psi(1) = -\gamma, \quad \psi\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - \gamma - 2 \ln 2, \quad (2.4)$$

就能将 (2.2) 式化为

$$\begin{aligned} S_{2m,2n} &= -\frac{2m+2n+1}{6} + \frac{1}{6} (\ln 2 - 1) \\ &\quad + \frac{n(2n+1)}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{m+n} - \frac{1}{8} \frac{1}{(m+n)^2} + \frac{1}{2n} - \frac{3}{8} \frac{1}{n^2} \right] \\ &\quad - \frac{n(2n+1)(4n+1)}{12} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{(m+n)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{(m+n)^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} - \frac{3}{4} \frac{1}{n^3} \right] \\ &\quad + \frac{12m^2+6m+1}{12} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{m+n} - \frac{1}{8} \frac{1}{(m+n)^2} + \frac{1}{2m} - \frac{3}{8} \frac{1}{m^2} \right] \\ &\quad - \frac{m(2m+1)(4m+1)}{12} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{(m+n)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{(m+n)^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{m^2} - \frac{3}{4} \frac{1}{m^3} \right] + \cdots \\ &= -\frac{2m+2n+1}{6} + \frac{1}{6} (\ln 2 - 1) + \frac{2n+1}{4} \frac{(2n+1)(4n+1)}{24n} \\ &\quad + \frac{12m^2+6m+1}{24m} - \frac{(2m+1)(4m+1)}{24m} - \frac{3}{16} \frac{2n+1}{n} \\ &\quad + \frac{1}{16} \frac{(2n+1)(4n+1)}{n^2} - \frac{12m^2+6m+1}{32m^2} + \frac{1}{16} \frac{(2m+1)(4m+1)}{m^2} \\ &\quad + \frac{1}{m+n} \left[\frac{n(2n+1)}{4} + \frac{12m^2+6m+1}{24} \right] \\ &\quad - \frac{1}{(m+n)^2} \left[\frac{n(2n+1)(8n+5)}{48} + \frac{m(2m+1)(8m+5)}{48} + \frac{1}{96} \right] \\ &\quad + \frac{1}{(m+n)^3} \left[\frac{n(2n+1)(4n+1)}{48} + \frac{m(2m+1)(4m+1)}{48} \right] + \cdots, \end{aligned}$$

这里已经略去而未明确写出的均为无穷小量 $O\left(\frac{1}{n}\right)$, $O\left(\frac{1}{m}\right)$ 或 $O\left(\frac{1}{m+n}\right)$. 如此继续化简, 并注意到

$$\frac{1}{2} \frac{m^2 + n^2}{m+n} - \frac{1}{3} \frac{m^3 + n^3}{(m+n)^2} = \frac{1}{2} \frac{m^2 + n^2}{m+n} - \frac{1}{3} \frac{m^2 - mn + n^2}{m+n} = \frac{m+n}{6},$$

就能得到

$$\begin{aligned}
 S_{2m,2n} &= -\frac{m+n}{6} + \frac{1}{6} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{m+n} \left(\frac{m^2+n^2}{2} + \frac{m+n}{4} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{(m+n)^2} \left[\frac{m^3+n^3}{3} + \frac{3}{8} (m^2+n^2) \right] + \frac{1}{6} \frac{m^3+n^3}{(m+n)^3} + \cdots \\
 &= \frac{1}{6} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \frac{m^2+n^2}{(m+n)^2} + \frac{1}{6} \frac{m^2-mn+n^2}{(m+n)^2} + \cdots \\
 &= \frac{1}{6} (\ln 2 + 1) - \frac{1}{24} \frac{5m^2+4mn+5n^2}{(m+n)^2} + \cdots.
 \end{aligned} \tag{2.5a}$$

类似地, 还能计算另外几种部分和:

$$\begin{aligned}
 S_{2m,2n+1} &= \sum_{k=1}^{2m} \sum_{l=1}^{2n+1} (-1)^{k+l} \frac{kl}{(k+l)^2} = S_{2m,2n} + (2n+1) \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k+1}k}{(2n+k+1)^2}, \\
 S_{2m+1,2n} &= \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{l=1}^{2n} (-1)^{k+l} \frac{kl}{(k+l)^2} = S_{2m,2n} + (2m+1) \sum_{l=1}^{2n} \frac{(-1)^{l+1}l}{(2m+l+1)^2}, \\
 S_{2m+1,2n+1} &= \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{l=1}^{2n+1} (-1)^{k+l} \frac{kl}{(k+l)^2} \\
 &= S_{2m,2n} + (2m+1) \sum_{l=1}^{2n} \frac{(-1)^{l+1}l}{(2m+l+1)^2} + (2n+1) \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k+1}k}{(2n+k+1)^2} \\
 &\quad + \frac{(2m+1)(2n+1)}{(2m+2n+2)^2}.
 \end{aligned}$$

重复上面的计算, 可以得到

$$\begin{aligned}
 (2n+1) \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k+1}k}{(2n+k+1)^2} &= -\frac{1}{4} \frac{2n+1}{m+n} + \frac{1}{8} \left(\frac{2n+1}{m+n} \right)^2 + \cdots = -\frac{1}{2} \frac{mn}{(m+n)^2} + \cdots, \\
 (2m+1) \sum_{l=1}^{2n} \frac{(-1)^{l+1}l}{(2m+l+1)^2} &= -\frac{1}{4} \frac{2m+1}{m+n} + \frac{1}{8} \left(\frac{2m+1}{m+n} \right)^2 + \cdots = -\frac{1}{2} \frac{mn}{(m+n)^2} + \cdots.
 \end{aligned}$$

所以

$$S_{2m,2n+1} = \frac{1}{6} (\ln 2 + 1) - \frac{1}{24} \frac{5m^2+16mn+5n^2}{(m+n)^2} + \cdots, \tag{2.5b}$$

$$S_{2m+1,2n} = \frac{1}{6} (\ln 2 + 1) - \frac{1}{24} \frac{5m^2+16mn+5n^2}{(m+n)^2} + \cdots, \tag{2.5c}$$

$$S_{2m+1,2n+1} = \frac{1}{6} (\ln 2 + 1) - \frac{1}{24} \frac{5m^2+4mn+5n^2}{(m+n)^2} + \cdots. \tag{2.5d}$$

以上结果说明, 当 m, n 同时而又独立地趋于 ∞ 时, 部分和序列 $\{S_{m,n}\}$ 并不收敛. 换言之, 二重级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{k+l} \frac{kl}{(k+l)^2}$ 不收敛. 事实上, 作为 $m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ 的特殊方式, 如果 m 与 n 并不独立, 例如取 $n = \alpha m$, 则

$$\frac{5m^2 + 4mn + 5n^2}{(m+n)^2} = \frac{5 + 4\alpha + 5\alpha^2}{(1+\alpha)^2}, \quad \frac{5m^2 + 16mn + 5n^2}{(m+n)^2} = \frac{5 + 16\alpha + 5\alpha^2}{(1+\alpha)^2}.$$

于是

$$\lim_{\substack{n=\alpha m \\ m \rightarrow \infty}} S_{2m,2n} = \lim_{\substack{n=\alpha m \\ m \rightarrow \infty}} S_{2m+1,2n+1} = \frac{1}{6} (\ln 2 + 1) - \frac{1}{24} \frac{5 + 4\alpha + 5\alpha^2}{(1+\alpha)^2}, \quad (2.6a)$$

$$\lim_{\substack{n=\alpha m \\ m \rightarrow \infty}} S_{2m+1,2n} = \lim_{\substack{n=\alpha m \\ m \rightarrow \infty}} S_{2m,2n+1} = \frac{1}{6} (\ln 2 + 1) - \frac{1}{24} \frac{5 + 16\alpha + 5\alpha^2}{(1+\alpha)^2}. \quad (2.6b)$$

特别是, 当 $\alpha = 1$ 时, 有

$$\lim_{m=n \rightarrow \infty} S_{2m,2n} = \lim_{m=n \rightarrow \infty} S_{2m+1,2n+1} = \frac{1}{6} \left(\ln 2 + \frac{1}{8} \right), \quad (2.7a)$$

$$\lim_{m=n \rightarrow \infty} S_{2m+1,2n} = \lim_{m=n \rightarrow \infty} S_{2m,2n+1} = \frac{1}{6} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right). \quad (2.7b)$$

部分和序列正是在这两个数值之间震荡.

如果将上述二重级数先按行求和, 而后再将各行之和相加 (即“逐行求和”), 则有

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+l} \frac{kl}{(k+l)^2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} S_{mn} \right) = \frac{1}{6} \left(\ln 2 - \frac{1}{4} \right). \quad (2.8a)$$

这相当于在 (2.6) 式中代入 $\alpha = 0$. 由于级数对于 k, l 对称, 所以, 如果先按列求和, 而后再将各列之和相加 (即“逐列求和”), 也应当得到同样的结果:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{k+l} \frac{kl}{(k+l)^2} \right] = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_{mn} \right) = \frac{1}{6} \left(\ln 2 - \frac{1}{4} \right). \quad (2.8b)$$

这相当于在 (2.6) 式中令 $\alpha \rightarrow \infty$.

另一种求和方式是“按对角线求和”. 对于本题而言, 这样的和

$$\sum_{r=2}^{\infty} \left[\sum_{k+l=r} (-1)^{k+l} \frac{kl}{(k+l)^2} \right] = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r^2} \left[\sum_{l=1}^{r-1} l(r-l) \right] = \frac{1}{6} \sum_{r=2}^{\infty} (-1)^r \left(r - \frac{1}{r} \right)$$

并不存在.

§2.2 幂级数的收敛半径

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径, 有两个公式:

(1) Cauchy-Hadamard 公式 (基于 Cauchy 判别法):

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{c_n} \right|^{1/n}. \quad (2.9)$$

(2) 基于 d'Alembert 判别法: 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n} \right| = |z-a| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

存在, 则

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|. \quad (2.10)$$

在应用这两个公式时, 请记住 c_n 是幂级数中 z^n 项的系数.

这两个求收敛半径的公式各有优缺点. Cauchy-Hadamard 公式普遍成立, 而公式 (2.10) 则是有条件的 (要求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n/c_{n+1}|$ 存在). 作为相关概念的讨论, 以使用 Cauchy-Hadamard 公式为宜; 而在求收敛半径的具体计算中, 多使用公式 (2.10), 前提是满足该公式的适用条件, 即要求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n/c_{n+1}|$ 存在.

不难举出 $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n/c_{n+1}|$ 不存在的例子. 例如, 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} z^{2n}$,

$$c_n = \begin{cases} 0, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ 2^n, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

则有

$$\frac{c_{2n}}{c_{2n+1}} = \infty, \quad \frac{c_{2n+1}}{c_{2n+2}} = 0,$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n/c_{n+1}|$ 并不存在. 然而, 因为

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = 2,$$

立即就得到 $R = 1/2$.

读者可能会想出变通的解决办法, 即作变换 $\zeta = z^2$, 因而上列级数即变为 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \zeta^n$, 于是, 作为 ζ 的幂级数, 由公式 (2.10) 可以求出收敛半径 (即 ζ 平面上

收敛圆的半径) 为 $1/4$, 从而也导出作为 z 的幂级数, 收敛半径为 $1/2$. 但这种办法无法从根本上克服 $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n/c_{n+1}|$ 不存在的困难. 例如, 对于

$$c_n = \begin{cases} 3^n, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ 2^n, & n = 2, 4, 6, \dots. \end{cases}$$

由 Cauchy-Hadamard 公式即能求出 $R = 1/3$, 但却难以直接应用公式 (2.10). 尽管我们可以由级数收敛的必要条件判断 $|z| > 1/3$ 时级数发散, 而用比较判别法判断 $|z| < 1/3$ 时级数收敛, 显然这样不如应用 Cauchy-Hadamard 公式来得直截了当.

在极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n/c_{n+1}|$ 存在的条件下, 应用公式 (2.10) 求收敛半径往往比较简单, 原因是在系数比 c_n/c_{n+1} 中往往会有一些因子被消去, 而 Cauchy-Hadamard 公式中关于 $|c_n|^{1/n}$ 的计算却可能比较复杂. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ 就是一个很好的例子.

若已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2 , 则根据 Cauchy-Hadamard 公式, 可以得出下列结论:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$ 的收敛半径 $R \geq R_1 R_2$. 原因是

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n b_n|^{1/n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |b_n|^{1/n}.$$

例如

$$a_n = \begin{cases} 2^n, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad \text{与} \quad b_n = \begin{cases} 0, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ 3^n, & n = 2, 4, 6, \dots. \end{cases}$$

这时就有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 2, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |b_n|^{1/n} = 3,$$

但

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n b_n|^{1/n} = 0.$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} z^n$ 的收敛半径 $R \leq \frac{R_1}{R_2}$. 这其实只是 (1) 的特殊变型: 只需将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 看成 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \cdot b_n \right) z^n$ 即可.

作为这种情形的特例, 又应当有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} z^n \text{ 的收敛半径 } R \leq \frac{1}{R_2}.$$

(3) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)z^n$ 的收敛半径 $R \geq \min(R_1, R_2)$. 这是因为, 幂级数的收敛半径是由其和函数的奇点决定的: 幂级数收敛圆的圆周上, 一定有 (其和函数的) 奇点. 如果 $R_1 \neq R_2$, 或是尽管 $R_1 = R_2$ 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ 的奇点并不重合, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)z^n$ 的收敛半径 $R = \min(R_1, R_2)$. 但当 $R_1 = R_2$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ 在收敛圆圆周上的奇点也完全重合时, 它们的奇异性可能彼此抵消, 而使得这些点成为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)z^n$ 的可去奇点, 这样就会有 $R > \min(R_1, R_2)$. 从计算公式上说, 因为当 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \neq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |b_n|^{1/n}$ 时, 有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n + b_n|^{1/n} = \max \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |b_n|^{1/n} \right\}.$$

而当 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |b_n|^{1/n}$ 时, 则应有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n + b_n|^{1/n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \text{ 或 } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |b_n|^{1/n}.$$

读者不难按照奇点的可能分布以及函数在各奇点处的不同具体行为, 适当选取函数 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 与 $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, 验证上面所列举的结论.

§2.3 无穷级数的 Cesàro 和与 Abel 和

先看一个数项级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots, \quad (2.11)$$

它的部分和序列为 $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$, 因此, 按照定义, 此级数发散. 然而, 如果我们引进“级数和”的其他定义 (或者说, 引进求级数和的其他计算方法), 按照这些定义, 可以求出上面的级数和为 $1/2$.

任给定一个级数

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots, \quad (2.12)$$

其部分和为

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n. \quad (2.13)$$

将部分和求算术平均, 即

$$\sigma_n = \frac{1}{n} (s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n). \quad (2.14)$$

如果序列 $\{\sigma_n\}$ 收敛到 σ , 则称级数 (2.12) 的 Cesàro 和为 σ . 不难求出级数 (2.11) 部分和的算术平均序列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{1}{2}, \dots$$

所以级数 (2.11) 的 Cesàro 和为 $\sigma = 1/2$. 这种求级数和的方法称为 Cesàro 法 (算术平均法).

也可以将上述求和方法应用于三角级数

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots, \quad (2.15)$$

我们知道, 这个级数是发散的 (因为其通项不满足级数收敛的必要条件), 这同样表现在它的部分和

$$s_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin[(2n+1)x/2]}{2 \sin(x/2)} \quad (2.16)$$

的极限不存在. 但是, 如果求它的算术平均 (称为级数的 n 次算术平均)

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \frac{\sin[(2n+1)x/2]}{2 \sin(x/2)} \\ &= \frac{1}{2n} \frac{1}{\sin(x/2)} \sum_{k=0}^n \sin \frac{2n+1}{2} x = \frac{1}{2n} \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}, \end{aligned}$$

则对于 $x \in (-\pi, 0)$ 或 $(0, \pi)$, 就能求得级数 (2.15) 的 Cesàro 和 $\sigma = 0$. 可是, 如果 $x = 0$, 则 $\sigma_n(0) = n/2$. 故 Cesàro 和不存在.

根据 Cesàro 和的定义, 可以直接证明如下结论:

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 分别有 Cesàro 和 s 与 t , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 有 Cesàro 和 $s+t$;

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有 Cesàro 和 s , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ 有 Cesàro 和 ks ;

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有 Cesàro 和为 s , 则 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 有 Cesàro 和 $s - a_1$;

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 即其和 A 存在, 则其 Cesàro 和也是 A .

求级数和的另一种方法是 Abel 法 (收敛因子法), 即针对数项级数

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots, \quad (2.17a)$$

引进幂级数

$$u_0 + u_1 r + u_2 r^2 + u_3 r^3 + \dots, \quad (2.17b)$$

如果级数 (2.17b) 在区间 $0 \leq r < 1$ 上收敛, 且当 $r \rightarrow 1$ 时趋于有限值, 我们就把这个数值称为级数 (2.17a) 的 Abel 和. Abel 求和法的理论基础是 Abel 第二定理.

回顾刚刚举过的两个例子. 对于级数 (2.11), 我们可以构造幂级数

$$1 - r + r^2 - r^3 + \cdots, \quad (2.11')$$

它在区间 $(-1, 1)$ 上收敛到 $1/(1+r)$. 尽管级数 (2.11') 在 $r=1$ 处并不收敛, 但是 $\lim_{r \rightarrow 1} [1/(1+r)] = 1/2$, 因此级数 (2.11) 的 Abel 和为 $1/2$.

再看级数 (2.15). 按照 Abel 求和法, 引进幂级数

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^n e^{inx} \right), \quad (2.15')$$

它在区间 $0 \leq r < 1$ 上的和函数为

$$\frac{1}{2} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2}.$$

在 $-\pi \leq x < 0$ 或 $0 < x \leq \pi$ 的条件下, 当 $r \rightarrow 1$ 时, 此和函数趋于 0, 因此级数 (2.15) 的 Abel 和为 0; 而在 $x=0$ 的条件下, 当 $r \rightarrow 1$ 时, 和函数的极限不存在, 因此级数 (2.15) 没有 Abel 和.

Abel 和也具有与 Cesàro 和类似的运算性质, 即

- (1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 分别有 Abel 和 s 与 t , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 有 Abel 和 $s+t$;
- (2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有 Abel 和 s , 则 $\sum_{n=1}^{\infty} k a_n$ 有 Abel 和 ks ;
- (3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有 Abel 和为 s , 则 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 有 Abel 和 $s - a_1$;
- (4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 即其和 A 存在, 则其 Abel 和也是 A .

§2.4 解析函数的幂级数展开

例 2.3 求 $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^\alpha$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 展开.

解 直接利用二项式展开公式, 可得

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (iz)^k \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{l} (-iz)^l = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \binom{-\alpha}{l} i^{k-l} z^{k+l} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} \binom{-\alpha}{n-k} \right] z^n, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

因为

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k! \Gamma(\alpha-k+1)} = (-1)^k \frac{\Gamma(k-\alpha)}{k! \Gamma(-\alpha)},$$

所以

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{-n}}{n!} \left[\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha+k-n)} \right] z^n \\ &= 1 + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left[\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \underbrace{(\alpha+1-k)(\alpha+2-k)\cdots(\alpha+n-1-k)}_{n-1 \text{ 个因子相乘}} \right] z^n \\ &= 1 + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left. \frac{d^{n-1} [z^{\alpha-1}(1+z)^n]}{dz^{n-1}} \right|_{z=1} z^n \quad (2.18) \end{aligned}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n(\alpha) (iz)^n, \quad (2.19)$$

其中的 $M_n(\alpha)$ 称为 Mittag-Leffler 多项式^①:

$$M_0(\alpha) = 1, \quad (2.20a)$$

$$M_n(\alpha) = \frac{\alpha}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [z^{\alpha-1}(1+z)^n] \Big|_{z=1} \quad (2.20b)$$

$$= \frac{(\alpha)_n}{n!} F(-n, -\alpha; 1-n-\alpha; -1) \quad (2.20c)$$

$$= 2\alpha F(1-n, 1-\alpha; 2; 2), \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (2.20d)$$

例如, 对于前几个 n , 有

$$n=1: \quad M_1(\alpha) = \alpha z^{\alpha-1}(1+z) \Big|_{z=1} = 2\alpha.$$

$$n=2: \quad M_2(\alpha) = \frac{\alpha}{2!} \frac{d}{dz} [z^{\alpha-1}(1+z)^2] \Big|_{z=1} = \frac{4\alpha^2}{2!},$$

$$n=3: \quad M_3(\alpha) = \frac{\alpha}{3!} \frac{d^2}{dz^2} [z^{\alpha-1}(1+z)^3] \Big|_{z=1} = \frac{\alpha(8\alpha^2+4)}{3!},$$

$$n=4: \quad M_4(\alpha) = \frac{\alpha}{4!} \frac{d^3}{dz^3} [z^{\alpha-1}(1+z)^4] \Big|_{z=1} = \frac{\alpha^2(16\alpha^2+32)}{4!},$$

$$n=5: \quad M_5(\alpha) = \frac{\alpha}{5!} \frac{d^4}{dz^4} [z^{\alpha-1}(1+z)^5] \Big|_{z=1} = \frac{\alpha(32\alpha^4+160\alpha^2+48)}{5!},$$

$$n=6: \quad M_6(\alpha) = \frac{\alpha}{6!} \frac{d^5}{dz^5} [z^{\alpha-1}(1+z)^6] \Big|_{z=1} = \frac{\alpha^2(64\alpha^4+640\alpha^2+736)}{6!},$$

^① 参见文献: A. Erdélyi, et al. *Higher Transcendental Functions*. Vol. III. New York: McGraw-Hill. 1953: 248.

因此

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^\alpha &= 1 + 2\alpha(iz) + \frac{4\alpha^2}{2!}(iz)^2 + \frac{\alpha(8\alpha^2+4)}{3!}(iz)^3 + \frac{\alpha^2(16\alpha^2+32)}{4!}(iz)^4 \\ &\quad + \frac{\alpha(32\alpha^4+160\alpha^2+48)}{5!}(iz)^5 + \frac{\alpha^2(64\alpha^4+640\alpha^2+736)}{6!}(iz)^6 + \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

特别是, 因为 $\arctan z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz}$, 所以, 当 $\alpha = \frac{t}{2i} = -\frac{it}{2}$ 时,

$$\begin{aligned} e^{t \arctan z} &= \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{-it/2} \\ &= 1 + tz + \frac{t^2}{2!}z^2 + \frac{t(t^2-2)}{3!}z^3 + \frac{t^2(t^2-8)}{4!}z^4 \\ &\quad + \frac{t(t^4-20t^2+24)}{5!}z^5 + \frac{t^2(t^4-40t^2+184)}{6!}z^6 + \dots \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \left(-\frac{it}{2}\right) (iz)^n. \quad (2.23)$$

例 2.4 求 $\cos(\nu \arccos z)$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 展开, 规定 $\arccos z|_{z=0} = \pi/2$.

解 对于这个函数, 难以直接求得它的 Taylor 展开. 我们可以转而先求 $f(z) = e^{i\nu \arccos z}$ 的幂级数展开. 直接微商可得 $f(z)$ 满足的微分方程

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{i\nu}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \text{即} \quad \sqrt{1-z^2}f'(z) = -i\nu f(z), \quad (2.24)$$

令

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| < 1,$$

且 $c_0 = f(0) = e^{i\nu\pi/2}$, 并且注意到

$$\sqrt{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(-1/2)} z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

代入方程 (2.24), 即得

$$\begin{aligned} -i\nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(k-1/2)}{\Gamma(-1/2)} c_{l+1} (l+1) z^{2k+l} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n-2k+1}{k!} \frac{\Gamma(k-1/2)}{\Gamma(-1/2)} c_{n-2k+1} \right] z^n. \end{aligned}$$

比较系数, 就能够得到展开系数之间的递推关系

$$-i\nu c_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n-2k+1}{k!} \frac{\Gamma(k-1/2)}{\Gamma(-1/2)} c_{n-2k+1}.$$

逐次代入 $n=0, 1, 2, \dots$, 就能求出展开系数:

$$\begin{aligned} n=0: \quad & -i\nu c_0 = c_1, & c_1 &= -i\nu e^{i\nu\pi/2}; \\ n=1: \quad & -i\nu c_1 = 2c_2, & c_2 &= \frac{1}{2!}(i\nu)^2 e^{i\nu\pi/2}; \\ n=2: \quad & -i\nu c_2 = 3c_3 - \frac{1}{2}c_1, & c_3 &= -\frac{1}{3!}[(i\nu)^3 + i\nu] e^{i\nu\pi/2}; \\ n=3: \quad & -i\nu c_3 = 4c_4 - c_2, & c_4 &= \frac{1}{4!}[(i\nu)^4 + 4(i\nu)^2] e^{i\nu\pi/2}; \\ n=4: \quad & -i\nu c_4 = 5c_5 - \frac{3}{2}c_3 - \frac{1}{8}c_1, & c_5 &= -\frac{1}{5!}[(i\nu)^5 + 10(i\nu)^3 + 9(i\nu)] e^{i\nu\pi/2}; \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} e^{i\nu \arccos z} &= e^{i\nu\pi/2} \left[1 - i\nu z + \frac{\nu^2}{2} z^2 - \frac{i\nu(\nu^2-1)}{3!} z^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu^2(\nu^2-4)}{4!} z^4 - \frac{i\nu(\nu^2-1)(\nu^2-9)}{5!} z^5 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.25a)$$

将 ν 换成 $-\nu$, 上式变为

$$\begin{aligned} e^{-i\nu \arccos z} &= e^{-i\nu\pi/2} \left[1 + i\nu z + \frac{\nu^2}{2} z^2 + \frac{i\nu(\nu^2-1)}{3!} z^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu^2(\nu^2-4)}{4!} z^4 + \frac{i\nu(\nu^2-1)(\nu^2-9)}{5!} z^5 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.25b)$$

两式相加减, 最后就得到

$$\begin{aligned} \cos(\nu \arccos z) &= \cos \frac{\nu\pi}{2} \left[1 + \frac{\nu^2}{2!} z^2 + \frac{\nu^2(\nu^2-4)}{4!} z^4 + \dots \right] \\ &\quad + \sin \frac{\nu\pi}{2} \left[\nu z + \frac{\nu(\nu^2-1)}{3!} z^3 + \frac{\nu(\nu^2-1)(\nu^2-9)}{5!} z^5 + \dots \right], \end{aligned} \quad (2.26a)$$

$$\begin{aligned} \sin(\nu \arccos z) &= \sin \frac{\nu\pi}{2} \left[1 + \frac{\nu^2}{2!} z^2 + \frac{\nu^2(\nu^2-4)}{4!} z^4 + \dots \right] \\ &\quad - \cos \frac{\nu\pi}{2} \left[\nu z + \frac{\nu(\nu^2-1)}{3!} z^3 + \frac{\nu(\nu^2-1)(\nu^2-9)}{5!} z^5 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (2.26b)$$

现在反过来写出

$$\begin{aligned}\cos(\nu \arccos z) &= \cos\left(\frac{\nu\pi}{2} - \nu \arcsin z\right) \\ &= \cos \frac{\nu\pi}{2} \cos(\nu \arcsin z) + \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin(\nu \arcsin z),\end{aligned}$$

和上面已经得到的展开比较, 又能导出

$$\cos(\nu \arcsin z) = 1 + \frac{\nu^2}{2!} z^2 + \frac{\nu^2(\nu^2-4)}{4!} z^4 + \cdots, \quad (2.27a)$$

$$\sin(\nu \arcsin z) = \nu z + \frac{\nu(\nu^2-1)}{3!} z^3 + \frac{\nu(\nu^2-1)(\nu^2-9)}{5!} z^5 + \cdots. \quad (2.27b)$$

在以上得到的这些结果中, 不难猜测出展开系数的规律性, 但要证实这种猜测的正确性, 当然还必须要给出证明. 可以尝试用数学归纳法来证明.

例 2.5 已知 $\psi(z)$ 在 $z=0$ 点的 Taylor 展开:

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n,$$

讨论 $e^z \psi(tz)$ 型函数的展开^①.

解 直接作展开即可:

$$e^z \psi(tz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l t^l z^l = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^n \frac{\alpha_l}{(n-l)!} t^l \right] z^n.$$

所以

$$e^z \psi(tz) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(t) z^n, \quad \sigma_n(t) = \sum_{l=0}^n \frac{\alpha_l}{(n-l)!} t^l. \quad (2.28)$$

讨论

1. (2.28) 式表明 $\sigma_n(t)$ 是 t 的 n 次多项式, 而 $e^z \psi(tz)$ 则是 $\sigma_n(t)$ 的生成函数.

2. 可以进一步导出多项式 $\sigma_n(t)$ 的递推关系. 直接计算可得

$$\frac{\partial}{\partial z} [e^z \psi(tz)] = e^z \psi(tz) + te^z \psi'(tz), \quad \frac{\partial}{\partial t} [e^z \psi(tz)] = ze^z \psi'(tz),$$

所以

$$z \frac{\partial}{\partial z} [e^z \psi(tz)] - t \frac{\partial}{\partial t} [e^z \psi(tz)] = ze^z \psi(tz),$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sigma_n(t) z^n - \sum_{n=0}^{\infty} t \sigma'_n(t) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{n-1}(t) z^n.$$

^① 参见文献: E. D. Rainville. *Special Functions*. New York: Macmillan Co., 1960: Chap. 8.

比较系数, 就得到递推关系

$$\sigma'_0(t) = 0, \quad t\sigma'_n(t) - n\sigma_n(t) = -\sigma_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

3. 作为本题的特殊情形, 取

$$\psi(z) = z^{-\nu/2} J_\nu(2\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+\nu+1)} z^n,$$

于是就有

$$\sigma_n(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(n-l)! l! \Gamma(l+\nu+1)} t^l = \frac{1}{\Gamma(n+\nu+1)} L_n^{(\nu)}(t),$$

亦即

$$e^z (tz)^{-\nu/2} J_\nu(2\sqrt{tz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+\nu+1)} L_n^{(\nu)}(t) z^n. \quad (2.29a)$$

这正是广义 Laguerre 多项式

$$L_n^{(\nu)}(x) = \frac{(\nu+1)_n}{n!} \sum_{l=0}^n \frac{(-n)_l}{l! (\nu+1)_l} x^l = \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l}{l! (n-l)!} \frac{\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(l+\nu+1)} x^l \quad (2.29b)$$

的生成函数展开式之一.

例 2.6 仍假设 $\psi(z)$ 在 $z=0$ 点的 Taylor 展开为

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n.$$

于是就有

$$(1-z)^{-c} \psi\left(\frac{tz}{1-z}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \left(\frac{tz}{1-z}\right)^l (1-z)^{-c} = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l t^l z^l (1-z)^{-l-c}.$$

在上式中代入

$$(1-z)^{-l-c} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(c+l+k)}{\Gamma(c+l)} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c)_{l+k}}{k! (c)_l} z^k.$$

就得到

$$(1-z)^{-c} \psi\left(\frac{tz}{1-z}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l t^l z^l \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c)_{l+k}}{k! (c)_l} z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^n \frac{(c)_n}{(n-l)! (c)_l} \alpha_l t^l \right] z^n.$$

所以, 函数

$$(1-z)^{-c} \psi\left(\frac{tz}{1-z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n \quad (2.30a)$$

的展开系数即为

$$\beta_n = \frac{(c)_n}{n!} \sum_{l=0}^n \frac{n!}{(n-l)! (c)_l} \alpha_l t^l = \frac{(c)_n}{n!} \sum_{l=0}^n (-1)^l \frac{(-n)_l}{(c)_l} \alpha_l t^l. \quad (2.30b)$$

例如, 取 $\alpha_n = (-1)^n/n!$, 即 $\psi(z) = e^{-z}$, 则将得到广义 Laguerre 多项式的另一个生成函数展开式

$$(1-z)^{-c-1} \exp\left\{-\frac{tz}{1-z}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(c)}(t) z^n. \quad (2.30c)$$

例 2.7 完全仿照例 2.6, 也能得到

$$\begin{aligned} (1-z)^{-c} \psi\left(-\frac{4tz}{(1-z)^2}\right) &= \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \left[-\frac{4tz}{(1-z)^2}\right]^l (1-z)^{-c} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l 2^{2l} \alpha_l t^l z^l (1-z)^{-2l-c}. \end{aligned}$$

因为

$$(1-z)^{-2l-c} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(2l+c+k)}{\Gamma(2l+c)} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c)_{2l+k}}{k! (c)_{2l}} z^k$$

及

$$(c)_{2l} = \frac{\Gamma(c+2l)}{\Gamma(c)} = 2^{2l} \frac{\Gamma\left(\frac{c}{2}+l\right) \Gamma\left(\frac{c+1}{2}+l\right)}{\Gamma\left(\frac{c}{2}\right) \Gamma\left(\frac{c+1}{2}\right)} = 2^{2l} \left(\frac{c}{2}\right)_l \left(\frac{c+1}{2}\right)_l,$$

故可将上述结果化为

$$\begin{aligned} (1-z)^{-c} \psi\left(-\frac{4tz}{(1-z)^2}\right) &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l 2^{2l} \alpha_l t^l z^l \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(c)_{2l+k}}{(c)_{2l}} z^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^n \alpha_l \frac{(-1)^l}{(n-l)!} \frac{(c)_{n+l}}{(c/2)_l ((c+1)/2)_l} t^l \right] z^n. \end{aligned} \quad (2.31a)$$

这样就得到了函数 $(1-z)^{-c} \psi\left(-\frac{4tz}{(1-z)^2}\right)$ 的 Taylor 展开, 其展开系数为

$$\beta_n(t) = \sum_{l=0}^n \alpha_l \frac{(-1)^l}{(n-l)!} \frac{(c)_{n+l}}{(c/2)_l ((c+1)/2)_l} t^l = \frac{(c)_n}{n!} \sum_{l=0}^n \alpha_l \frac{(-n)_l (c+n)_l}{(c/2)_l ((c+1)/2)_l} t^l. \quad (2.31b)$$

同样, 若 $\psi(z) = e^z$, 则 $\alpha_n = 1/n!$, 从而有

$$(1-z)^{-c} \exp\left\{-\frac{4tz}{(1-z)^2}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_n}{n!} \left[\sum_{l=0}^n \frac{1}{l!} \frac{(-n)_l (c+n)_l}{(c/2)_l ((c+1)/2)_l} t^l \right] z^n. \quad (2.32a)$$

这里的展开系数中出现了广义超几何级数

$${}_2F_2(\alpha, \beta; \gamma, \delta; z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{(\alpha)_l (\beta)_l}{(\gamma)_l (\delta)_l} z^n. \quad (2.32b)$$

例 2.8 若在 (2.31) 式中取

$$\alpha_l = \frac{\delta_{n-l}}{l!} \left(\frac{c}{2}\right)_l \left(\frac{1+c}{2}\right)_l, \quad \text{即} \quad \beta_n(t) = \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l (c)_{n+l}}{l! (n-l)!} \delta_{n-l} t^l,$$

还可以进一步讨论级数

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n(t)}{(c)_n} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(c)_n} \left[\sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l (c)_{n+l}}{l! (n-l)!} \delta_{n-l} t^l \right] z^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{k! l!} \frac{(c)_{k+2l}}{(c)_{k+l}} \delta_k t^l z^{k+l} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{(c)_{k+2l}}{(c)_{k+l}} (tz)^l \right] \delta_k z^k. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} \frac{(c)_{k+2l}}{(c)_{k+l}} &= \frac{\Gamma(c+k+2l)}{\Gamma(c+k+l)} = \frac{2^{c+k+2l-1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(c+k+l)} \Gamma\left(\frac{c+k}{2}+l\right) \Gamma\left(\frac{c+k+1}{2}+l\right) \\ &= \frac{2^{c+k+2l-1}}{\sqrt{\pi} (c+k)_l} \left(\frac{c+k}{2}\right)_l \left(\frac{c+k+1}{2}\right)_l \frac{1}{\Gamma(c+k)} \Gamma\left(\frac{c+k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{c+k+1}{2}\right) \\ &= 2^{2l} \frac{1}{(c+k)_l} \left(\frac{c+k}{2}\right)_l \left(\frac{c+k+1}{2}\right)_l, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{(c)_{k+2l}}{(c)_{k+l}} (tz)^l &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{1}{(c+k)_l} \left(\frac{c+k}{2}\right)_l \left(\frac{c+k+1}{2}\right)_l (4tz)^l \\ &= F\left(\frac{c+k}{2}, \frac{c+k+1}{2}; c+k; -4tz\right). \end{aligned}$$

再利用参量取特殊值 $\beta = \alpha + 1/2$, $\gamma = 2\alpha$ 时的超几何函数 $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$, 有

$$2^{-2\alpha} F(\alpha+1/2, \alpha+1; 2\alpha+1; z) = (1-z)^{-1/2} (1+\sqrt{1-z})^{-2\alpha},$$

就导出关系式

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(c)_n} \left[\sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l (c)_{n+l}}{l! (n-l)!} \delta_{n-l} t^l \right] z^n \\ = (1+4tz)^{-1/2} \left(\frac{1+\sqrt{1+4tz}}{2} \right)^{1-c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta_k}{k!} \left(\frac{2z}{1+\sqrt{1+4tz}} \right)^k. \end{aligned} \quad (2.33)$$

取定特殊的 δ_k , 就可能将上式右端的级数求和. 例如, 取 $\delta_k = 1$, 则有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(c)_n} \left[\sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l (c)_{n+l}}{l! (n-l)!} t^l \right] z^n = \frac{1}{\sqrt{1+4tz}} \left(\frac{1+\sqrt{1+4tz}}{2} \right)^{1-c} \exp \left\{ \frac{2z}{1-\sqrt{1+4tz}} \right\}.$$

或者写成

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} {}_2F_0(-n, c+n; t) z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l n!}{l! (n-l)!} \frac{\Gamma(c+n+l)}{\Gamma(c+n)} t^l \right] z^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+4tz}} \left(\frac{1+\sqrt{1+4tz}}{2} \right)^{1-c} \exp \left\{ \frac{2z}{1+\sqrt{1+4tz}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

可以预料, 采用其他形式的 δ_k , 将会得到新的和式.

例 2.9 求级数和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+2n)}{n! \Gamma(a+n)} \left[\sum_{l=0}^n \frac{(-n)_l}{l! (a+n)_l} t^l \right] z^n.$$

解 仿照例 2.8, 先考虑二重级数

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+2n)}{n! \Gamma(a+n)} \left[\sum_{l=0}^n \frac{(-n)_l}{l! (a+n)_l} \delta_l t^l \right] z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l}{l! (n-l)!} \frac{\Gamma(a+2n)}{\Gamma(a+n+l)} \delta_l t^l \right] z^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{k! l!} \frac{\Gamma(a+2k+2l)}{\Gamma(a+k+2l)} \delta_l t^l z^{k+l} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(a+l)_{l+2k}}{(a+l)_{l+k}} z^k \right] \delta_l (tz)^l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} F \left(\frac{a}{2} + l, \frac{1+a}{2} + l; a+2l; 4z \right) \delta_l (tz)^l \\ &= (1-4z)^{-1/2} \left(\frac{1+\sqrt{1-4z}}{2} \right)^{1-a} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\delta_l}{l!} \left[-\frac{4zt}{(1+\sqrt{1-4z})^2} \right]^l. \end{aligned}$$

原题相当于 $\delta_l = 1$, 故得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+2n)}{n! \Gamma(a+n)} \left[\sum_{l=0}^n \frac{(-n)_l}{l! (a+n)_l} t^l \right] z^n \\ = (1-4z)^{-1/2} \left(\frac{1+\sqrt{1-4z}}{2} \right)^{1-a} \exp \left\{ -\frac{4zt}{(1+\sqrt{1-4z})^2} \right\}. \end{aligned}$$

而等式左端还可化为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^n \frac{(-1)^l}{l! (n-l)!} \frac{\Gamma(a+2n)}{\Gamma(a+n+l)} t^l \right] z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{2n}}{n! (a)_n} F(-n; a+n; t) z^n,$$

其中展开系数 $\frac{(a)_{2n}}{n!(a)_n} F(-n; a+n; t)$ 称为赝 Laguerre 多项式 (pseudo-Laguerre polynomials)^①:

$$\frac{(a)_{2n}}{n!(a)_n} F(-n; a+n; t) = L_n^{(a+n-1)}(t),$$

因此, 上面的和式又可以写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(a+n-1)}(t) z^n = (1-4z)^{-1/2} \left(\frac{1+\sqrt{1-4z}}{2} \right)^{1-a} \exp \left\{ -\frac{4zt}{(1+\sqrt{1-4z})^2} \right\}. \quad (2.35)$$

§2.5 几个级数的和

例 2.10 证明:

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (\beta)_k}{k! (\gamma)_k} = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma+n-\beta)}{\Gamma(\gamma+n) \Gamma(\gamma-\beta)}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (2.36)$$

证 这个结果可以看成超几何函数 $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ 在 $z=1$ 的值

$$F(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha) \Gamma(\gamma-\beta)}, \quad \operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta) > 0$$

的特例 ($\alpha = -n$), 但不同的是, 本题作为有限和而成立, 对于 β, γ 并无任何限制.

采用数学归纳法证明. 首先 $n=0$ 时显然成立. 设 $n=l$ 时成立, 即

$$\sum_{k=0}^l \frac{(-l)_k (\beta)_k}{k! (\gamma)_k} = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma+l-\beta)}{\Gamma(\gamma+l) \Gamma(\gamma-\beta)},$$

于是, 当 $n=l+1$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{l+1} \frac{(-l-1)_k (\beta)_k}{k! (\gamma)_k} &= \sum_{k=0}^{l+1} \frac{(-l-1)_k (\beta)_k}{k! (\gamma)_k} - \sum_{k=0}^l \frac{(-l)_k (\beta)_k}{k! (\gamma)_k} + \sum_{k=0}^l \frac{(-l)_k (\beta)_k}{k! (\gamma)_k} \\ &= \sum_{k=0}^l \frac{(\beta)_k}{k! (\gamma)_k} [(-l-1)_k - (-l)_k] + \frac{(-l-1)_{l+1} (\beta)_{l+1}}{(l+1)! (\gamma)_{l+1}} + \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma+l-\beta)}{\Gamma(\gamma+l) \Gamma(\gamma-\beta)}. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} (-l-1)_k - (-l)_k &= (-l-1)(-l)_{k-1} - (-l+k-1)(-l)_{k-1} = -k(-l)_{k-1}, \\ (\beta)_k &= \beta(\beta+1)_{k-1}, \quad (\gamma)_k = \gamma(\gamma+1)_{k-1}, \end{aligned}$$

^① 参见文献: E. D. Rainville. *Special Functions*. New York: Macmillan Co., 1960: 298. 这类多项式不具有正交性: 在任何一個区间上都无法找到正交权函数.

所以

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=0}^{l+1} \frac{(-l-1)_k (\beta)_k}{k! (\gamma)_k} \\
 &= -\frac{\beta}{\gamma} \sum_{k=1}^l \frac{(-l)_{k-1} (\beta+1)_{k-1}}{(k-1)! (\gamma+1)_{k-1}} - \frac{\beta (-l)_l (\beta+1)_l}{\gamma l! (\gamma+1)_l} + \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma+l-\beta)}{\Gamma(\gamma+l) \Gamma(\gamma-\beta)} \\
 &= -\frac{\beta}{\gamma} \sum_{k=0}^l \frac{(-l)_k (\beta+1)_k}{k! (\gamma+1)_k} + \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma+l-\beta)}{\Gamma(\gamma+l) \Gamma(\gamma-\beta)} \\
 &= -\frac{\beta \Gamma(\gamma+1) \Gamma(\gamma+l-\beta)}{\gamma \Gamma(\gamma+l+1) \Gamma(\gamma-\beta)} + \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma+l-\beta)}{\Gamma(\gamma+l) \Gamma(\gamma-\beta)} \\
 &= \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma+l-\beta+1)}{\Gamma(\gamma+l+1) \Gamma(\gamma-\beta)}.
 \end{aligned}$$

命题得证. □

例 2.11 Pollaczek 多项式^① $P_k^\lambda(x; a, b)$ 可用递推关系

$$P_{-1}^\lambda(x; a, b) = 0, \quad (2.37a)$$

$$P_0^\lambda(x; a, b) = 1, \quad (2.37b)$$

$$\begin{aligned}
 k P_k^\lambda(x; a, b) - 2[(k-1+\lambda+a)x+b] P_{k-1}^\lambda(x; a, b) \\
 + (k+2\lambda-2) P_{k-2}^\lambda(x; a, b) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned} \quad (2.37c)$$

定义, 其中 a, b, λ 均为实数, $x = \cos \theta$, $a \geq |b|$, $0 < \theta < \pi$. 为了求得 $P_k^\lambda(x; a, b)$ 的表达式, 下面先求出 $P_k^\lambda(x; a, b)$ 的生成函数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^\lambda(x; a, b) z^k.$$

为此, 将上述递推关系 (2.37c) 乘以 z^{k-1} , 并求和, 得

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} k P_k^\lambda(x; a, b) z^{k-1} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1+\lambda+a)x+b] P_{k-1}^\lambda(x; a, b) z^{k-1} \\
 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2\lambda-2) P_{k-2}^\lambda(x; a, b) z^{k-1} = 0.
 \end{aligned}$$

注意到

^① 参见文献: A. Erdélyi, et al. *Higher Transcendental Functions*. Vol. II. New York: McGraw-Hill, 1953: 219. 该处的限制条件 $\lambda > -1$ 似不必要.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} k P_k^{\lambda}(x; a, b) z^{k-1} &= f'(z), \\
\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) P_{k-1}^{\lambda}(x; a, b) z^{k-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} k P_k^{\lambda}(x; a, b) z^k = z f'(z), \\
\sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}^{\lambda}(x; a, b) z^{k-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{\lambda}(x; a, b) z^k = f(z), \\
\sum_{k=1}^{\infty} (k-2) P_{k-2}^{\lambda}(x; a, b) z^{k-1} &= -P_{-1}^{\lambda}(x; a, b) + \sum_{k=0}^{\infty} k P_k^{\lambda}(x; a, b) z^{k+1} = z^2 f'(z), \\
\sum_{k=1}^{\infty} P_{k-2}^{\lambda}(x; a, b) z^{k-1} &= P_{-1}^{\lambda}(x; a, b) + \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{\lambda}(x; a, b) z^{k+1} = z f(z),
\end{aligned}$$

因而得到微分方程

$$(1 - 2xz + z^2)f'(z) - 2\left\{[(\lambda + a)x + b] - \lambda z\right\}f(z) = 0,$$

即

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{2(\lambda + a)x + 2b - 2\lambda z}{1 - 2xz + z^2} = \frac{\lambda + i\xi}{z - e^{i\theta}} - \frac{\lambda - i\xi}{z - e^{-i\theta}},$$

其中 $\xi = (a \cos \theta + b)/\sin \theta$. 解此微分方程, 并注意到 $f(0) = P_0^{\lambda}(x; a, b) = 1$, 即得

$$f(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{\lambda}(x; a, b) z^k = (1 - ze^{-i\theta})^{-\lambda - i\xi} (1 - ze^{i\theta})^{-\lambda + i\xi}, \quad |z| < 1. \quad (2.38)$$

现在来求出 $P_k^{\lambda}(x; a, b)$ 的表达式. 为此, 将上式右端作展开, 得

$$(1 - ze^{\pm i\theta})^{-\lambda \pm i\xi} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{\Gamma(\lambda \mp i\xi + l)}{\Gamma(\lambda \mp i\xi)} (ze^{\pm i\theta})^l,$$

因此

$$\begin{aligned}
&(1 - ze^{-i\theta})^{-\lambda - i\xi} (1 - ze^{i\theta})^{-\lambda + i\xi} \\
&\quad - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{l! m!} \frac{\Gamma(\lambda + i\xi + l)}{\Gamma(\lambda + i\xi)} \frac{\Gamma(\lambda - i\xi + m)}{\Gamma(\lambda - i\xi)} z^{l+m} e^{-i\theta(l-m)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k!} \left[\sum_{l=0}^k \frac{k!}{l! (k-l)!} \frac{\Gamma(\lambda + i\xi + l)}{\Gamma(\lambda + i\xi)} \frac{\Gamma(\lambda - i\xi + k-l)}{\Gamma(\lambda - i\xi)} e^{-i2l\theta} \right] z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{ik\theta}}{k!} \left[\sum_{l=0}^k \frac{(-1)^l k!}{l! (k-l)!} \frac{\Gamma(\lambda + i\xi + l)}{\Gamma(\lambda + i\xi)} \frac{\Gamma(1 - \lambda + i\xi)}{\Gamma(1 - \lambda + i\xi - k + l)} e^{-i2l\theta} \right] z^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{ik\theta}}{k!} \frac{\Gamma(1-\lambda+i\xi)}{\Gamma(1-\lambda+i\xi-k)} \left[\sum_{l=0}^k \frac{(-k)_l}{l!} \frac{(\lambda+i\xi)_l}{(1-\lambda+i\xi-k)_l} e^{-i2l\theta} \right] z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(1-\lambda+i\xi)}{\Gamma(1-\lambda+i\xi-k)} e^{ik\theta} F(-k, \lambda+i\xi; 1-\lambda+i\xi-k; e^{-i2\theta}) z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(\lambda-i\xi+k)}{\Gamma(\lambda-i\xi)} e^{ik\theta} F(-k, \lambda+i\xi; 1-\lambda+i\xi-k; e^{-i2\theta}) z^k. \quad (2.39)
\end{aligned}$$

这样就求得了

$$P_k^\lambda(x; a, b) = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(1-\lambda+i\xi)}{\Gamma(1-\lambda+i\xi-k)} e^{ik\theta} F(-k, \lambda+i\xi; 1-\lambda+i\xi-k; e^{-i2\theta}) \quad (2.40a)$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(\lambda-i\xi+k)}{\Gamma(\lambda-i\xi)} e^{ik\theta} F(-k, \lambda+i\xi; 1-\lambda+i\xi-k; e^{-i2\theta}). \quad (2.40b)$$

还可以利用超几何函数 $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ 的变换公式

$$\begin{aligned}
F(\alpha, \beta; \gamma; z) &= \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha) \Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta; \alpha+\beta-\gamma+1; 1-z) \\
&\quad + \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma-\alpha-\beta+1; 1-z)
\end{aligned}$$

导出 $P_k^\lambda(x; a, b)$ 的另一表达式. 当 $\alpha = -k, k = 0, 1, 2, \dots$ 时, 上述变换关系简化为

$$F(-k, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma+k-\beta)}{\Gamma(\gamma+k) \Gamma(\gamma-\beta)} F(-k, \beta; \alpha+\beta-\gamma+1; 1-z),$$

因此

$$\begin{aligned}
P_k^\lambda(x; a, b) &= \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(1-2\lambda)}{\Gamma(1-2\lambda-k)} e^{ik\theta} F(-k, \lambda+i\xi; 2\lambda; 1-e^{-i2\theta}) \\
&= \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(2\lambda+k)}{\Gamma(2\lambda)} e^{ik\theta} F(-k, \lambda+i\xi; 2\lambda; 1-e^{-i2\theta}). \quad (2.41)
\end{aligned}$$

 **讨论** 显然 Legendre 多项式和 Gegenbauer 多项式都是 Pollaczek 多项式的特殊情形:

$$P_n(x) = P_n^{1/2}(x; 0, 0), \quad C_n^\lambda(x) = P_n^\lambda(x; 0, 0).$$

例 2.12 Pollaczek 还定义了多项式 $P_k^\lambda(x, \phi)$ ^①:

^① 参见文献: A. Erdélyi, et al. *Higher Transcendental Functions*. Vol. II. New York: McGraw-Hill, 1953: 220 - 221. 该处的限制条件 $\lambda > 0$ 似无必要.

$$P_{-1}^{\lambda}(x, \phi) = 0, \quad (2.42a)$$

$$P_0^{\lambda}(x, \phi) = 1, \quad (2.42b)$$

$$k P_k^{\lambda}(x, \phi) - 2[(k-1+\lambda) \cos \phi + x \sin \phi] P_{k-1}^{\lambda}(x, \phi) + (k+2\lambda-2) P_{k-2}^{\lambda}(x, \phi) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.42c)$$

其中 λ 为实数, $-\infty < x < \infty$, $0 < \phi < \pi$. $P_k^{\lambda}(x, \phi)$ 亦称为 Pollaczek 多项式.

重复例 2.11 的步骤, 设 $P_k^{\lambda}(x, \phi)$ 的生成函数为

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{\lambda}(x, \phi) z^k.$$

由递推关系 (2.42c) 可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k P_k^{\lambda}(x, \phi) z^{k-1} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1+\lambda) \cos \phi + x \sin \phi] P_{k-1}^{\lambda}(x, \phi) z^{k-1} \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2\lambda-2) P_{k-2}^{\lambda}(x, \phi) z^{k-1} = 0, \end{aligned}$$

因而就导出了微分方程

$$(1 - 2z \cos \phi + z^2) f'(z) - 2[(\lambda \cos \phi + x \sin \phi) - \lambda z] f(z) = 0,$$

即

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{2\lambda \cos \phi + 2x \sin \phi - 2\lambda z}{1 - 2z \cos \phi + z^2} = -\frac{\lambda + ix}{x - e^{i\phi}} - \frac{\lambda - ix}{x - e^{-i\phi}}.$$

解此微分方程, 并注意到 $f(0) = 1$, 即能得到

$$f(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{\lambda}(x, \phi) z^k = (1 - ze^{-i\phi})^{-\lambda - ix} (1 - ze^{i\phi})^{-\lambda + ix}, \quad |z| < 1. \quad (2.43)$$

将上式右端作展开 (其效果就是将例 2.11 相应计算中的 θ 换成 ϕ , ξ 换成 x), 即可导出 $P_k^{\lambda}(x, \phi)$ 的表达式

$$P_k^{\lambda}(x; \phi) = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(1-\lambda+ix)}{\Gamma(1-\lambda+ix-k)} e^{ik\phi} F(-k, \lambda+ix; 1-\lambda+ix-k; e^{-i2\phi}) \quad (2.44a)$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(\lambda-ix+k)}{\Gamma(\lambda-ix)} e^{ik\phi} F(-k, \lambda+ix; 1-\lambda+ix-k; e^{-i2\phi}) \quad (2.44b)$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(2\lambda+k)}{\Gamma(2\lambda)} e^{ik\phi} F(-k, \lambda+ix; 2\lambda; 1-e^{-i2\phi}). \quad (2.44c)$$

§2.6 Lagrange 展开公式

设 $f(z)$ 及 $\phi(z)$ 均在 \bar{G} 上解析, C 为 G 的边界. 若参数 t 满足

$$|t\phi(\zeta)| < |\zeta - a|, \quad \zeta \in C, a \in G,$$

则可以证明 (证明从略) 方程 $z = a + t\phi(z)$ 在 C 内有且只有一个根 (显然, 当 $t \rightarrow 0$ 时, 此根一定趋于 a), 或者说, 函数

$$g(\zeta) = \zeta - a - t\phi(\zeta)$$

在 C 内只有一个零点 (记为 z). 因此, 按照 Cauchy 积分公式, 有

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \frac{1 - t\phi'(\zeta)}{\zeta - a - t\phi(\zeta)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) [1 - t\phi'(\zeta)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[t\phi(\zeta)]^n}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n t^{n+1}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \frac{[\phi(\zeta)]^n}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{da^n} \{f(\zeta) [\phi(\zeta)]^n\}_{\zeta=a} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{da^n} \{f(a) [\phi(a)]^n\}, \\ \beta_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) \frac{[\phi(\zeta)]^n \phi'(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\zeta^n} \{f(\zeta) [\phi(\zeta)]^n \phi'(\zeta)\}_{\zeta=a} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^n}{d\zeta^n} \left\{ \frac{d}{d\zeta} [\phi(\zeta)]^{n+1} - f'(\zeta) [\phi(\zeta)]^{n+1} \right\}_{\zeta=a} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{da^{n+1}} \{f(a) [\phi(a)]^{n+1}\} - \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^n}{da^n} \{f'(a) [\phi(a)]^{n+1}\}. \end{aligned}$$

代入即得

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{da^n} \{f(a) [\phi(a)]^n\} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}}{da^{n+1}} \{f(a) [\phi(a)]^{n+1}\} t^{n+1} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^n}{da^n} \{f'(a) [\phi(a)]^{n+1}\} t^{n+1} \\ &= f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \{f'(a) [\phi(a)]^n\} t^n. \end{aligned} \quad (2.45)$$

此即为 Lagrange 展开公式, 它将 $f(z) \equiv f(a + t\phi(z))$ 展开为参数 t 的幂级数.

例 2.13 令 $\phi(z) = (z^2 - 1)/2$, 则 $z = a + t\phi(z)$ 的根为

$$z = \frac{1}{t} \left(1 - \sqrt{1 - 2at + t^2} \right).$$

显然, 当 $t \rightarrow 0$ 时, $z \rightarrow a$. 于是, 按照 Lagrange 展开公式, 取 $f(z) = z$, 则有

$$\frac{1}{t} \left(1 - \sqrt{1 - 2at + t^2} \right) = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left(\frac{a^2 - 1}{2} \right)^n t^n,$$

或者将 a 改写成 x , 即

$$\frac{1}{t} \left(1 - \sqrt{1 - 2xt + t^2} \right) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{x^2 - 1}{2} \right)^n t^n.$$

两端对 x 微商, 就得到

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} t^n. \quad (2.46)$$

上式左端是 Legendre 多项式的生成函数, 右端的展开系数就是 Legendre 多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}. \quad (2.47)$$

这又是 Legendre 多项式的微分表示.

例 2.14 求超越方程 $t = e^{\alpha z} (e^{\beta z} - 1)$ 的解 $z = z(t)$.

解 这是超越方程的求解问题, 也可以看成求超越函数的反函数问题. 由于无法直接解超越方程 $t = e^{\alpha z} (e^{\beta z} - 1)$ 从而求得 $z = z(t)$, 所以只得求出 $z = z(t)$ 的 Taylor 展开式. 为此, 取 $\phi(z) = z e^{-\alpha z} (e^{\beta z} - 1)^{-1}$, 则在

$$|t| < \frac{|z|}{|z - a|} |e^{\alpha z} (e^{\beta z} - 1)|$$

的条件下, 方程 $z = a + t\phi(z)$ 只有一个根 (当 $t \rightarrow 0$ 时, 此根 $z \rightarrow a$); 而且, 若 $a = 0$, 此根即为本题要求的 $z = z(t)$. 因此, 取 $f(z) = z$, 则由 Lagrange 展开公式, 有

$$\begin{aligned} z &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[z e^{-\alpha z} (e^{\beta z} - 1)^{-1} \right]^n \right\}_{z=0} t^n \\ &= \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{-n\alpha z/\beta} \left(\frac{z}{e^z - 1} \right)^n \right]_{z=0} t^n. \end{aligned}$$

因为^①

$$\left(\frac{z}{e^z - 1}\right)^n e^{\gamma z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B_k^{(n)}(\gamma) z^k,$$

其中 $B_k^{(n)}(x)$ 称为广义 Bernoulli 多项式,

$$B_k^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{k!} \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} [(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)], \quad k < n,$$

所以

$$\begin{aligned} B_{n-1}^{(n)}\left(-\frac{n\alpha}{\beta}\right) &= \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{-n\alpha z/\beta} \left(\frac{z}{e^z - 1}\right)^n\right]_{z=0} \\ &= \left(-\frac{n\alpha}{\beta} - 1\right) \left(-\frac{n\alpha}{\beta} - 2\right) \cdots \left(-\frac{n\alpha}{\beta} - n + 1\right) \\ &= (-1)^{n-1} \left(\frac{n\alpha}{\beta} + 1\right)_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{n\alpha}{\beta}\right)_n. \end{aligned}$$

最后就求得 $t = e^{\alpha z} (e^{\beta z} - 1)$ 的解

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \frac{1}{n\alpha} \left(\frac{n\alpha}{\beta}\right)_n t^n. \quad (2.48)$$

如果取 $f(z) = e^{\zeta z}$, 则有

$$\begin{aligned} e^{\zeta z} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (e^{\zeta z})' \left[z e^{-\alpha z} (e^{\beta z} - 1)^{-1} \right]^n \right\}_{z=t} t^n \\ &= 1 + \frac{\zeta}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{(\zeta - n\alpha)z/\beta} \left(\frac{z}{e^z - 1}\right)^n \right]_{z=0} t^n \\ &= 1 + \frac{\zeta}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma((\zeta - n\alpha)/\beta)}{\Gamma(1 - n + (\zeta - n\alpha)/\beta)} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\zeta}{\zeta - n\alpha} \left(\frac{n\alpha - \zeta}{\beta}\right)_n t^n. \end{aligned} \quad (2.49)$$

这里出现的展开系数

$$G_n(\zeta; \alpha, \beta) \equiv \frac{\zeta}{\beta} \frac{\Gamma((\zeta - n\alpha)/\beta)}{\Gamma(1 - n + (\zeta - n\alpha)/\beta)} \equiv (-1)^n \frac{\zeta}{\zeta - n\alpha} \left(\frac{n\alpha - \zeta}{\beta}\right)_n \quad (2.50)$$

称为 Gould 多项式^②.

① 参见文献: A. Erdélyi, et al. *Higher Transcendental Functions*. Vol. III. New York: McGraw-Hill, 1953: 252, 253.

② 参见 <http://mathworld.wolfram.com/GouldPolynomial.html>. 但请注意该处的 Pochhammer 记号 $(\alpha)_n$ 为递降阶乘 (descending factorial 或 falling factorial), 有别于本书一直采用的递增阶乘 (ascending factorial 或 upper factorial).

例 2.15 求超越方程 $t = ze^z$ 的解 $z = z(t)$, 并进而计算 $e^{\zeta z(at)/a}$.

解 同上例, 取 $\phi(z) = e^{-z}$, $f(z) = z$, 即可求得

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{-nz} \right)_{z=0} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} n^{n-1} t^n, \quad |t| < \frac{1}{e}. \quad (2.51a)$$

这就是 Lambert 定义的 W 函数 (或 Ω 函数) $W(t)$ ^①. 又, 若取 $f(z) = z^k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, 则

$$W^k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (kz^{k-1} e^{-nz}) \right]_{z=0} t^n.$$

注意到

$$\left. \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [kz^{k-1} e^{-nz}] \right|_{z=0} = \begin{cases} 0, & n < k, \\ \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} k! (-n)^{n-k}, & n \geq k, \end{cases}$$

因此

$$W^k(t) = k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} n^{n-k-1} t^n = k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (n+k)^{n-1} t^{n+k}. \quad (2.51b)$$

按照定义, $e^{-W(t)} = tW(t)$, 所以又有

$$e^{-kW(t)} = k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (n+k)^{n-1} t^n. \quad (2.51c)$$

再取 $f(z) = e^{\zeta z}$, 则有

$$e^{\zeta z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{(\zeta-n)z} \right]_{z=0} t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta}{n!} (\zeta-n)^{n-1} t^n.$$

作变换 $t \rightarrow at$, $\zeta \rightarrow \zeta/a$, 就得到

$$e^{\zeta z(at)/a} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta}{n!} (\zeta-na)^{n-1} t^n. \quad (2.52)$$

这里的展开系数

$$A_0(\zeta; a) = 1, \quad A_n(\zeta; a) = \zeta(\zeta-na)^{n-1} \quad (2.53)$$

称为 Abel 多项式^②.

① 准确地说, 是 $W(t)$ 的主值分枝. 参见 http://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_W_function.

② 引自 <http://mathworld.wolfram.com/AbelPolynomial.html>.

§2.7 Taylor 展开的倍乘公式

在 Lagrange 展开公式 (2.45) 中代入 $\phi(z) = z$, 且将 a 写成 x , 于是 $z = x + t\phi(z)$ 的根为 $z = x/(1-t)$. 按照 Lagrange 展开公式, 就有

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{1-t}\right) &= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}[x^n f'(x)]}{dx^{n-1}} t^n \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{ \frac{d[x^n f(x)]}{dx} - nx^{n-1} f(x) \right\} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n[x^n f(x)]}{dx^n} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}[x^{n-1} f(x)]}{dx^{n-1}} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n[x^n f(x)]}{dx^n} (1-t)t^n. \end{aligned}$$

这说明函数 $\frac{1}{1-t} f\left(\frac{x}{1-t}\right)$ 就是 $\frac{d^n[x^n f(x)]}{dx^n}$ 的生成函数:

$$\frac{1}{1-t} f\left(\frac{x}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n[x^n f(x)]}{dx^n} t^n. \quad (2.54)$$

将 (2.54) 式略加变形, 例如, 用 $x^{-1-c} f(x)$ 取代 $f(x)$, 就得到

$$(1-t)^c f\left(\frac{x}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{1-c}}{n!} \frac{d^n[x^{n-1-c} f(x)]}{dx^n} t^n.$$

此式可以用来求某些函数的 Taylor 展开:

$$(1-t)^c e^{\pm x/(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[x^{c+1} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n-1-c} e^{\pm x}) \right] t^n, \quad (2.55)$$

$$(1-t)^c e^{\pm x^2/(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[x^{c+1} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n-1-c} e^{\pm x^2}) \right] t^n. \quad (2.56)$$

$$(1-t^2)^c e^{\pm x^2/(1-t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \left[x^{2c+2} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n x^{2n-2-2c} e^{\pm x^2} \right] t^{2n}, \quad (2.57)$$

$$(1-t)^c e^{\pm x/\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \left[x^{2c+2} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n x^{2n-2-2c} e^{\pm x} \right] t^n. \quad (2.58)$$

稍作改变后也能得到

$$(1-2xt)^c \exp \left\{ \pm \frac{\sqrt{1-2xt}}{x} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[x^{n+2c+2} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n x^{2n-2-2c} e^{\pm 1/x} \right] t^n. \quad (2.59)$$

如果令 $\lambda = 1/(1-t)$, 则 (2.54) 式又可改写成所谓 Taylor 展开的倍乘公式:

$$\lambda f(\lambda x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^n \frac{d^n [x^n f(x)]}{dx^n}. \quad (2.60)$$

可以将公式 (2.60) 应用于超几何函数 $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$. 因为

$$\frac{d^n}{dz^n} [z^{\alpha+n-1} F(\alpha, \beta; \gamma; z)] = (\alpha)_n z^{\alpha-1} F(\alpha+n, \beta; \gamma; z),$$

所以, 取 $f(z) = z^{\alpha-1} F(\alpha, \beta; \gamma; z)$, 由 (2.60) 式可得

$$\lambda(\lambda z)^{\alpha-1} F(\alpha, \beta; \gamma; \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^n z^{\alpha-1} F(\alpha+n, \beta; \gamma; z).$$

消去 $z^{\alpha-1}$, 就得到

$$\lambda^\alpha F(\alpha, \beta; \gamma; \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^n F(\alpha+n, \beta; \gamma; z). \quad (2.61)$$

再进一步将 (2.60) 式改写成

$$\lambda f(\lambda(1-x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^n \frac{d^n [(1-x)^n f(1-x)]}{dx^n}, \quad (2.60')$$

则根据

$$\frac{d^n}{dz^n} [(1-z)^{\alpha+n-1} F(\alpha, \beta; \gamma; z)] = (-1)^n \frac{(\alpha)_n (\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n} (1-z)^{\alpha-1} F(\alpha+n, \beta; \gamma+n; z),$$

也可得到

$$\lambda^\alpha F(\alpha, \beta; \gamma; 1-\lambda+\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\alpha)_n (\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^n F(\alpha+n, \beta; \gamma+n; z). \quad (2.62)$$

类似地, 根据 $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ 的另外两个递推关系

$$\begin{aligned} & \frac{d^n}{dz^n} [z^{\gamma-\alpha+n-1} (1-z)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta; \gamma; z)] \\ &= (\gamma-\alpha)_n z^{\gamma-\alpha-1} (1-z)^{\alpha+\beta-\gamma-n} F(\alpha-n, \beta; \gamma; z), \\ & \frac{d^n}{dz^n} [z^{\gamma-1} (1-z)^{\beta-\gamma+n} F(\alpha, \beta; \gamma; z)] \\ &= (-1)^n \frac{\Gamma(1-\gamma+n)}{\Gamma(1-\gamma)} z^{\gamma-n-1} (1-z)^{\beta-\gamma} F(\alpha-n, \beta; \gamma-n; z), \end{aligned}$$

又可以得到

$$\lambda^{\gamma-\alpha}(1-\lambda z)^{\alpha+\beta-\gamma}F(\alpha, \beta; \gamma; \lambda z) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma-\alpha)_n}{n!} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^n (1-z)^{\alpha+\beta-\gamma-n} F(\alpha-n, \beta; \gamma; z), \quad (2.63)$$

$$\lambda^{\beta-\gamma+1} \left(\frac{1-\lambda+\lambda z}{z}\right)^{\gamma-1} F(\alpha, \beta; \gamma; 1-\lambda+\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma)_n}{n!} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^n z^{-n} F(\alpha-n, \beta; \gamma-n; z). \quad (2.64)$$

也可以将公式 (2.60) 应用于合流超几何函数 $F(\alpha; \gamma; z)$ 及 $U(\alpha; \gamma; z)$ ^①. 根据

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dz^n} [z^{\alpha+n-1} F(\alpha; \gamma; z)] &= (\alpha)_n z^{\alpha-1} F(\alpha+n; \gamma; z), \\ \frac{d^n}{dz^n} [e^{-z} z^{\gamma-\alpha+n-1} F(\alpha; \gamma; z)] &= (\gamma-\alpha)_n e^{-z} z^{\gamma-\alpha-1} F(\alpha-n; \gamma; z), \\ \frac{d^n}{dz^n} [z^{\alpha+n-1} U(\alpha; \gamma; z)] &= (\alpha)_n (\alpha-\gamma-1)_n z^{\alpha-1} U(\alpha+n; \gamma; z), \\ \frac{d^n}{dz^n} [e^{-z} z^{\gamma-\alpha+n-1} U(\alpha; \gamma; z)] &= (-1)^n e^{-z} z^{\gamma-\alpha-1} U(\alpha-n; \gamma; z), \end{aligned}$$

就能导出

$$\lambda^\alpha F(\alpha; \gamma; \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^n F(\alpha+n; \gamma; z), \quad (2.65)$$

$$\lambda^{\gamma-\alpha} e^{-\lambda z} F(\alpha; \gamma; \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma-\alpha)_n}{n!} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^n e^{-z} F(\alpha-n; \gamma; z), \quad (2.66)$$

$$\lambda^\alpha U(\alpha; \gamma; \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\alpha-\gamma-1)_n}{n!} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^n U(\alpha+n; \gamma; z), \quad (2.67)$$

$$\lambda^{\gamma-\alpha} e^{-\lambda z} U(\alpha; \gamma; \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^n e^{-z} U(\alpha-n; \gamma; z). \quad (2.68)$$

对于与合流超几何函数 $F(\alpha; \gamma; z)$ 有关的 Whittaker 函数, 则根据它们的递推关系

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dz^n} [e^{\pm z/2} z^{\mp k-1} M_{k, \mu}(z)] &= \left(\mu \mp k + \frac{1}{2}\right)_n e^{\pm z/2} z^{\mp k-1} M_{k \mp n, \mu}(z), \\ \frac{d^n}{dz^n} [e^{z/2} z^{n-k-1} W_{k, \mu}(z)] &= \left(\mu - k + \frac{1}{2}\right)_n \left(-\mu - k + \frac{1}{2}\right)_n e^{z/2} z^{-k-1} W_{k-n, \mu}(z), \end{aligned}$$

^① $F(\alpha; \gamma; z)$ 和 $U(\alpha; \gamma; z)$ 又分别称为 Kummer 函数和 Tricomi 函数. 它们构成合流超几何方程的基本解.

$$\frac{d^n}{dz^n} [e^{-z/2} z^{n+k-1} W_{k,\mu}(z)] = (-1)^n e^{-z/2} z^{k-1} W_{k+n,\mu}(z),$$

也能写出

$$\lambda^{\mp k} e^{\pm \lambda z/2} M_{k,\mu}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\mu \mp k + \frac{1}{2} \right)_n \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right)^n e^{\pm z/2} M_{k \mp n, \mu}(z), \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} & \lambda^{-k} e^{\lambda z/2} W_{k,\mu}(\lambda z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\mu - k + \frac{1}{2} \right)_n \left(-\mu - k + \frac{1}{2} \right)_n \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right)^n e^{z/2} W_{k-n,\mu}(z). \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\lambda^k e^{-\lambda z/2} W_{k,\mu}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right)^n e^{-z/2} W_{k+n,\mu}(z). \quad (2.71)$$

不完全 Γ 函数与合流超几何函数有关:

$$\gamma(a, z) = \frac{1}{a} z^a e^{-z} F(1; a+1; z), \quad \Gamma(a, z) = z^a e^{-z} U(1; a+1; z),$$

它们有递推关系

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dz^n} [e^z z^{n-a} \gamma(a, z)] &= \frac{n!}{a} F(n+1; a+1; z), \\ \frac{d^n}{dz^n} [e^z z^{n-a} \Gamma(a, z)] &= n! (1-a)_n F(n+1; a+1; z). \end{aligned}$$

因此也应该有

$$\lambda^{1-a} e^{-\lambda z} z^{-a} \gamma(a, \lambda z) = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right)^n F(n+1; a+1; z), \quad (2.72)$$

$$\lambda^{1-a} e^{-\lambda z} z^{-a} \Gamma(a, \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right)^n (1-a)_n U(n+1; a+1; z). \quad (2.73)$$

最后还要指出, 如果将 (2.61)–(2.73) 诸式中的 $1 - 1/\lambda$ 改写成 t , 这些公式又可以看成定义了相应特殊函数的生成函数.

第三章 Taylor 展开公式新认识

Taylor 展开公式是复变函数中的基本公式之一,也是读者熟悉的公式之一.在理论上, Taylor 展开公式可以用来定义函数解析性;在实用上,则是求解变系数常微分方程的重要手段之一.在教材中,常常将函数 $f(z)$ 在任意一点 z 的数值用该函数在 $z=0$ 点的各阶导数表示出来.但应该说, Taylor 展开公式绝不只有这样一种形式的应用(尽管是重要的应用). Taylor 展开公式,可以改写成许多我们可能并不太熟悉的形式,包括函数的倍乘公式及加法公式.

本章的内容是对 Taylor 展开公式认识的深化.下面的讨论中涉及许多特殊函数,得到了一系列有意义的公式.部分公式(基本上限于合流超几何函数及与之相关的柱函数)在相关文献中可以查到,但也不乏现有文献中没有出现的结果(至少是没有出现过以这种形式表述的结果).有些公式,例如 Bessel 函数的倍乘公式(见 §3.7),过去推导的方法比较麻烦,现在却十分简捷.因此,从这样一个角度,集中地、系统地讨论特殊函数,或许也是一件有意义的工作.

§3.1 Taylor 展开公式的一个特殊形式

考虑 Taylor 展开公式的一个特殊情形:若函数 $f(z)$ 在 G 内解析,则对于 G 内任意一点 z ,可以展开为

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(z)}{dz^n} (\zeta - z)^n, \quad |\zeta - z| < R. \quad (3.1)$$

我们现在关心的是,如果在上式中代入 ζ 的某一固定值,例如 $\zeta = a$,则可得到

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n f(z)}{dz^n} (z - a)^n. \quad (3.2a)$$

特别是如果 $a = 0$,则上式变为

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n f(z)}{dz^n} z^n. \quad (3.2b)$$

这里我们看到,和平常我们应用 Taylor 展开公式的方式不同,(3.2b)式是用函数在 z 点的各阶导数表示该函数在 $z=0$ 点的值.例如,对于 $f(z) = (1+z)^\alpha$,由(3.2b)式就能得到

$$(1+z)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_n}{n!} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n = 1, \quad \left|\frac{z}{1+z}\right| < 1, \text{ 即 } \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}. \quad (3.3)$$

对于对数函数 $f(z) = \ln(1+z)$, 则有

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z}{1+z} \right)^n, \quad \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}. \quad (3.4)$$

由于 (3.2) 式本来就只是 Taylor 展开公式的一个特殊情形, 其正确性毋庸置疑. 直接将无穷级数求和, 也可以验证 (3.3) 和 (3.4) 式的正确性. 应该说, 对于常见的初等函数, 并不会得到任何出人意料的新结果.

但是对于我们并不熟悉的特殊函数, 情况或许会有所不同. (3.2b) 式的右端并不是幂级数. 我们有可能以一种独特的方式导出某些特殊函数的等式, 至少是以我们所不熟悉的形式表述的等式. 而且, 在推导过程中, 只用到关系式 (3.2), 并不需要经过复杂的计算, 唯一需要计算的只是 $f^{(n)}(z)$ 的解析表达式.

作为第一个例子, 考察函数 $f(z) = \Gamma(1+z)$. 因为有 Taylor 展开式

$$\Gamma(1+\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Gamma^{(n)}(1+z) (\zeta-z)^n, \quad \operatorname{Re}(1+z) > 0, |\zeta-z| < |1+z|,$$

其中

$$\begin{aligned} \Gamma'(1+z) &= \Gamma(1+z) \psi(1+z), \\ \Gamma''(1+z) &= \frac{d}{dz} [\Gamma(1+z) \psi(1+z)] = \Gamma(1+z) [\psi^2(1+z) + \psi'(1+z)], \\ \Gamma'''(1+z) &= \frac{d^2}{dz^2} [\Gamma(1+z) \psi(1+z)] \\ &= \Gamma(1+z) [\psi^3(1+z) + 3\psi(1+z)\psi'(1+z) + \psi''(1+z)], \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

因此, 令 $\zeta = 0$, 则得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma^{(n)}(1+z) z^n = 1, \quad \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}. \quad (3.5)$$

同样, 对于 $\ln \Gamma(1+z)$, 因为

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \ln \Gamma(1+z) = \frac{1}{n!} \psi^{(n-1)}(1+z) = \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n, z+1),$$

其中 $\zeta(n, z)$ 为广义 Riemann ζ 函数, 代入 (3.2) 式, 就得到

$$\ln \Gamma(1+z) - \psi(1+z)z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \zeta(n, z+1) z^n = 0, \quad \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}. \quad (3.6)$$

而在 (3.2) 式中代入 $f(z) = \psi(1+z)$, 又能推出

$$\psi(1+z) - \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(n+1, z+1) z^n = -\gamma, \quad \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}, \quad (3.7)$$

其中 γ 为 Euler 常数, $\gamma = -\psi(1) = -\Gamma'(1)$.

我们在上面还回避了一个问题, 即级数 (3.2b) 的收敛范围. 注意 (3.2b) 式并不是幂级数, 它的收敛区域也不见得是圆形区域, 需要针对具体函数而具体分析讨论. 这个收敛区域, 可能只是级数 (3.1) 的收敛圆的子域. 我们的计算就是在这个子域内进行的. 但也不排除级数 (3.2b) 事实上是在更大的范围内收敛, 而解析延拓理论保证了结论的正确性. 例如前面给出的级数 (3.3) 和 (3.4), 根据它们的具体表达式, 就容易定出收敛区域为半平面 $\operatorname{Re} z > -1/2$. 要求得级数 (3.5) 的收敛范围, 需要应用级数的收敛判别法, 例如 Cauchy 判别法或 d'Alembert 判别法. 对于级数 (3.6) 与 (3.7), 也应当如此处理. 总之, (3.2b) 式的确切收敛范围, 从原则上说, 就可以由不等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z}{n} \frac{f^{(n)}(z)}{f^{(n-1)}(z)} \right| < 1$$

决定. 在超几何函数的情形下, 就需要用到它们的微商递推关系及其在 $n \rightarrow \infty$ 时的渐近表达式.

§3.2 超几何函数

对于超几何函数

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} z^n, \quad |z| < 1, \quad (3.8)$$

根据 (3.2b) 式, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n F(\alpha, \beta; \gamma; z)}{dz^n} z^n = 1.$$

利用超几何函数的微商递推关系

$$\frac{d^n F(\alpha, \beta; \gamma; z)}{dz^n} = \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} F(\alpha+n, \beta+n; \gamma+n; z), \quad (3.9)$$

就能得出

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} z^n F(\alpha+n, \beta+n; \gamma+n; z) = 1, \quad |z| < \frac{1}{2}. \quad (3.10)$$

类似地, 考虑到超几何函数的另一微商递推关系

$$\begin{aligned} & \frac{d^n}{dz^n} [(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta; \gamma; z)] \\ &= \frac{(\gamma-\alpha)_n (\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n} (1-z)^{\alpha+\beta-\gamma-n} F(\alpha, \beta; \gamma+n; z), \end{aligned} \quad (3.11)$$

因此, 根据 (3.1) 式, 有

$$\begin{aligned} & (1-\zeta)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta; \gamma; \zeta) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\gamma-\alpha)_n (\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n} (1-z)^{\alpha+\beta-\gamma-n} F(\alpha, \beta; \gamma+n; z) (\zeta-z)^n. \end{aligned}$$

置 $\zeta = 0$, 即得

$$(1-z)^{\alpha+\beta-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\gamma-\alpha)_n (\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n} \left(\frac{z}{1-z}\right)^n F(\alpha, \beta; \gamma+n; z) = 1, \quad \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}. \quad (3.12)$$

事实上, 根据超几何函数的恒等式

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma; z), \quad |z| < 1, \quad (3.13)$$

就能够将 (3.10) 式化为 (3.12) 式, 而后根据解析延拓原理, 扩大 (3.12) 式的收敛区域.

超几何函数还具有微商递推关系

$$\frac{d^n}{dz^n} [z^{\gamma-1} F(\alpha, \beta; \gamma; z)] = (-1)^n (1-\gamma)_n z^{\gamma-1-n} F(\alpha, \beta; \gamma-n; z), \quad (3.14)$$

所以, 由 (3.1) 式可得

$$\begin{aligned} \zeta^{\gamma-1} F(\alpha, \beta; \gamma; \zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} [z^{\gamma-1} F(\alpha, \beta; \gamma; z)] (\zeta-z)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (1-\gamma)_n z^{\gamma-1-n} F(\alpha, \beta; \gamma-n; z) (\zeta-z)^n, \end{aligned}$$

当 $\operatorname{Re} \gamma > 1$ 且 γ 不为整数时, 可取 $\zeta = 0$, 从而得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma)_n}{n!} F(\alpha, \beta; \gamma-n; z) = 0, \quad \operatorname{Re} \gamma > 1. \quad (3.15)$$

最后, 由递推关系

$$\begin{aligned} & \frac{d^n}{dz^n} [z^{\gamma-1} (1-z)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta; \gamma; z)] \\ &= (\gamma-n)_n z^{\gamma-1-n} (1-z)^{\alpha+\beta-\gamma-n} F(\alpha-n, \beta-n; \gamma-n; z), \end{aligned} \quad (3.16)$$

可以写出

$$\begin{aligned} & \zeta^{\gamma-1}(1-\zeta)^{\alpha+\beta-\gamma}F(\alpha, \beta; \gamma; \zeta) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\gamma-n)_n z^{\gamma-1-n} (1-z)^{\alpha+\beta-\gamma-n} F(\alpha-n, \beta-n; \gamma-n; z) (\zeta-z)^n, \end{aligned}$$

于是又能得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma)_n}{n!} (1-z)^{-n} F(\alpha-n, \beta-n; \gamma-n; z) = 0, \quad \operatorname{Re} \gamma > 1. \quad (3.17)$$

同样, 利用 (3.13) 式, 可以证明 (3.17) 式能够化为 (3.15) 式.

§3.3 特殊的超几何函数

作为特殊的超几何函数, 有 Legendre 函数、连带 Legendre 函数、Gegenbauer 函数以及 Jacobi 多项式等等, 它们各自对应于超几何函数中的参数 α, β, γ 取特定值或满足特定关系, 例如 Legendre 函数即对应于 $\alpha + \beta = 1, \gamma = 1$. 因此, 这些特殊函数, 作为超几何函数, 当然都满足上一节中得到的关系式 (3.10), (3.12), (3.15) 与 (3.17). 但这时可能出现两种情况: 一种是这四个关系式并不互相独立. 突出的例子是 Legendre 函数. 因为 $\alpha + \beta - \gamma = 0$, 且 $\gamma - 1 = 0$, 可以预料, 这四个关系式应当完全可以互相导出. 另一种情况是由于这些关系式中, 或三个参数 α, β, γ 同时改变, 或只是 γ 值改变, 从而出现新的函数. 所以, 如果要求将 (3.2b) 式应用于这些特殊函数, 并且限制在级数中只出现同一类函数的话, 则上面的四个关系式中就有可能 (部分) 不符合这个要求. 下面就在这种限制条件下, 分别讨论 Legendre 函数、连带 Legendre 函数、Gegenbauer 函数以及 Jacobi 多项式.

3.3.1 Legendre 函数

先讨论定义在复平面上的 Legendre 函数

$$P_{\nu}(z) = F\left(-\nu, \nu+1; 1; \frac{1-z}{2}\right), \quad \text{即} \quad P_{\nu}(1-2z) = F(-\nu, \nu+1; 1; z).$$

由于在 $P_{\nu}(z)$ 中限定了 $\gamma = 1$, 因此关系式 (3.10), (3.12), (3.15) 与 (3.17) 中都必然出现 Legendre 函数之外的特殊函数. 这里我们稍稍放松一下限制, 即在连带 Legendre 函数的范围内考察 Legendre 函数.

将 (3.10) 式应用于 $F(-\nu, \nu+1; 1; z)$, 即得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! n!} \frac{\Gamma(-\nu+n)}{\Gamma(-\nu)} \frac{\Gamma(1+\nu+n)}{\Gamma(1+\nu)} z^n F(-\nu+n, \nu+n+1; n+1; z) = 1, \quad \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}.$$

根据 Γ 函数的互余宗量定理, 上式可化为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)} z^n F(-\nu+n, \nu+n+1; n+1; z) = 1.$$

再将 z 改写成 $(1-z)/2$, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)} F\left(n-\nu, n+\nu+1; n+1; \frac{1-z}{2}\right) \left(\frac{1-z}{2}\right)^n = 1, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

利用 $P_{\nu}^n(z)$ 的定义:

$$\begin{aligned} P_{\nu}^n(z) &= (z^2-1)^{n/2} \frac{d^n P_{\nu}(z)}{dz^n} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)} (z^2-1)^{n/2} F\left(n-\nu, n+\nu+1; n+1; \frac{1-z}{2}\right), \end{aligned}$$

所以就得到公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{n/2} P_{\nu}^n(z) = 1, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (3.18a)$$

但对于割线 $-1 < x < 1$ 上的点 x , $P_{\nu}^n(x)$ 的定义是

$$P_{\nu}^n(x) = (-1)^n (1-x^2)^{n/2} \frac{d^n P_{\nu}(x)}{dx^n}.$$

所以有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n/2} P_{\nu}^n(x) = 1, \quad 0 < x < 1. \quad (3.18b)$$

(3.18a) 和 (3.18b) 式也适用于 ν 为整数的情形, 此时无穷级数退化为有限和. 类似地, 可以讨论连带 Legendre 函数

$$P_{\nu}^{\mu}(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2} F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right).$$

这时需先将 (3.2b) 式应用于 $F(-\nu, \nu+1; 1-\mu; z)$, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n F(-\nu, \nu+1; 1-\mu; z)}{dz^n} z^n = 1.$$

再将 z 换成 $(1-z)/2$, 变为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} F^{(n)}\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right) \left(\frac{1-z}{2}\right)^n = 1,$$

而后将 $F(-\nu, \nu+1; 1-\mu; (1-z)/2)$ 替换成连带 Legendre 函数, 从而得到

$$\Gamma(1-\mu) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left[\left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{\mu/2} P_{\nu}^{\mu}(z) \right] (1-z)^n = 1, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (3.19a)$$

而对于处于割线 $-1 \leq x \leq 1$ 上的连带 Legendre 函数

$$P_{\nu}^{\mu}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\mu/2} F\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2}\right),$$

则可得到

$$\Gamma(1-\mu) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-\mu/2} P_{\nu}^{\mu}(x) \right] (1-x)^n = 1, \quad 0 < x < 1. \quad (3.19b)$$

特别地, 当 μ 为自然数 m 时,

$$\begin{aligned} P_{\nu}^m(z) &= (z^2-1)^{m/2} \frac{d^m P_{\nu}(z)}{dz^m} \\ &= \frac{1}{2^m m!} \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)} (z^2-1)^{m/2} F\left(m-\nu, m+\nu+1; m+1; \frac{1-z}{2}\right), \\ P_{\nu}^m(x) &= (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_{\nu}(x)}{dx^m} \\ &= \frac{(-1)^m}{2^m m!} \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)} (1-x^2)^{m/2} F\left(m-\nu, m+\nu+1; m+1; \frac{1-x}{2}\right). \end{aligned}$$

仿照上面的做法也能得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} P_{\nu}^{m+n}(z) (z-1)^{(n-m)/2} (z+1)^{-(n+m)/2} = \frac{1}{2^m m!} \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)} \quad (3.20)$$

和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} P_{\nu}^{m+n}(x) (1-x)^{(n-m)/2} (1+x)^{-(n+m)/2} = \frac{1}{2^m m!} \frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\Gamma(\nu-m+1)}, \quad (3.21)$$

它们的成立条件也分别是 $\operatorname{Re} z > 0$ 与 $0 < x < 1$. 显然, (3.18a) 和 (3.18b) 两式是它们的特殊情形 ($m=0$).

3.3.2 Gegenbauer 函数

Gegenbauer 函数 $C_{\alpha}^{\nu}(z)$ 的定义是

$$C_{\alpha}^{\nu}(z) = \frac{\Gamma(\alpha+2\nu)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(2\nu)} F\left(-\alpha, \alpha+2\nu; \nu+\frac{1}{2}; \frac{1-z}{2}\right).$$

由于函数中的三个参数并不独立, 所以只讨论 (3.10) 与 (3.17) 型的两个关系式.

首先将 (3.10) 式改写为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-\alpha)_n (\alpha+2\nu)_n}{(\nu+1/2)_n} z^n F(-\alpha+n, \alpha+n+2\nu; \nu+n+1/2; z) = 1, \quad \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}.$$

再将 z 换成 $(1-z)/2$, 即可写成 Gegenbauer 函数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(-\alpha)_n (\alpha+2\nu)_n}{(\nu+1/2)_n} \left(\frac{1-z}{2}\right)^n \frac{\Gamma(\alpha-n+1) \Gamma(2\nu+2n)}{\Gamma(\alpha+2n+2\nu)} C_{\alpha-n}^{\nu+n}(z) = 1, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

利用 Γ 函数的倍乘公式及互余宗量定理加以化简, 就得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu)_n}{n!} C_{\alpha-n}^{\nu+n}(z) 2^n (1-z)^n = \frac{\Gamma(\alpha+2\nu)}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(2\nu)}, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (3.22)$$

类似地, 由 (3.17) 式可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\nu+1/2)_n}{n!} F(-\alpha-n, \alpha-n+2\nu; \nu-n+1/2; z) (1-z)^{-n} = 0, \quad \operatorname{Re} \nu > \frac{1}{2}.$$

将 z 换成 $(1-z)/2$, 再将超几何函数改写成 Gegenbauer 函数, 就有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\nu+1/2)_n}{n!} \frac{\Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(2\nu-2n)}{\Gamma(\alpha+2\nu-n)} C_{\alpha-n}^{\nu-n}(z) \left(\frac{1+z}{2}\right)^{-n} = 0, \quad \operatorname{Re} \nu > \frac{1}{2}.$$

或者进一步化简成

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\nu-n)}{\Gamma(\alpha+2\nu-n)} C_{\alpha-n}^{\nu-n}(z) (1+z)^{-n} = 0, \quad \operatorname{Re} \nu > \frac{1}{2}. \quad (3.23)$$

3.3.3 Jacobi 多项式

作为特殊的超几何函数, 还有 Jacobi 多项式

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n! \Gamma(\alpha+1)} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-z}{2}\right).$$

在超几何函数中有三个独立参数, 因此, 原则上, 会指望存在 (3.10), (3.12), (3.15) 和 (3.17) 型的四个关系式.

首先, 将 (3.10) 式应用于 $F(-\nu, \nu+\alpha+\beta+1; \alpha+1; z)$, 得

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(-\nu)_k (\nu+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k} z^k F(-\nu+k, \nu+\alpha+\beta+k+1; \alpha+k+1; z) = 1.$$

将 z 代换成 $(1-z)/2$, 于是有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(-\nu)_k (\nu+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k F\left(-\nu+k, \nu+\alpha+\beta+k+1; \alpha+k+1; \frac{1-z}{2}\right) = 1.$$

在 ν 是自然数 n 的情况下, 无穷级数截断为有限和:

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k F\left(-n+k, n+\alpha+\beta+k+1; \alpha+k+1; \frac{1-z}{2}\right) = 1.$$

再将超几何函数改写为 Jacobi 多项式, 从而得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (-n)_k}{k!} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \\ \times \frac{(n-k)! \Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(\alpha+2k-n+1)} P_{n-k}^{(\alpha+k, \beta+k)}(z) = 1. \end{aligned}$$

因为 $(-1)^k (-n)_k = n!/(n-k)!$, 所以最后有结果

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+k+1)}{\Gamma(\alpha+2k-n+1)} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k P_{n-k}^{(\alpha+k, \beta+k)}(z) = \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{n! \Gamma(\alpha+1)}. \quad (3.24)$$

再根据 (3.12) 式, 有

$$\left(\frac{1+z}{2}\right)^\beta \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(n+\alpha+1)_k (-n-\beta)_k}{(\alpha+1)_k} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^k F\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+k+1; \frac{1-z}{2}\right) = 1.$$

经过简单的化简, 就得到

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{1}{\Gamma(n-k+\beta+1)} \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^k P_n^{(\alpha+k, \beta-k)}(z) = \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)} \left(\frac{1+z}{2}\right)^{-\beta}. \quad (3.25)$$

同样, 将 (3.15) 式应用于 $F(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; (1-z)/2)$, 有

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-\alpha)_k}{k!} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha-k+1; \frac{1-z}{2}\right) = 0, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0.$$

再改写成 Jacobi 多项式, 即

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)} \frac{n! \Gamma(\alpha-k+1)}{\Gamma(\alpha+n-k+1)} P_n^{(\alpha-k, \beta+k)}(z) = 0,$$

于是就得到

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{\Gamma(\alpha+n-k+1)} P_n^{(\alpha-k, \beta+k)}(z) = 0, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0. \quad (3.26)$$

最后,由 (3.17) 式可得

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-\alpha)_k}{k!} \left(\frac{1+z}{2}\right)^{-k} F\left(-n-k, n-k+\alpha+\beta+1; \alpha-k+1; \frac{1-z}{2}\right) = 0, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0.$$

改写成 Jacobi 多项式后, 又能导出

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n+k)!}{k!} \left(\frac{1+z}{2}\right)^{-k} P_{n+k}^{(\alpha-k, \beta-k)}(z) = 0, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0. \quad (3.27)$$

根据上一节的讨论, 可以预料, (3.24) 与 (3.25) 两式并不互相独立; 同样, (3.24) 与 (3.25) 两式也不是互相独立的.

除了上面讨论过的几类特殊函数外, 与超几何函数有关的特殊函数还有 Chebyshev (Чебышев) 多项式, 包括 $T_n(z)$ 和 $U_n(z)$:

$$T_n(z) = F\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-z}{2}\right), \quad U_n(z) = (n+1) F\left(-n, n+2; \frac{3}{2}; z\right).$$

它们分别对应于超几何函数中的参数 $\alpha+\beta$ 及 γ 均取固定值, 因而无法应用 §3.2 中的 (3.10), (3.12), (3.15) 及 (3.17) 等关系式.

§3.4 合流超几何函数

3.4.1 合流超几何函数 $F(\alpha; \gamma; z)$

对于合流超几何函数

$$F(\alpha; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} z^n,$$

首先可以写出

$$F(\alpha; \gamma; \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n F(\alpha; \gamma; z)}{dz^n} (\zeta - z)^n, \quad |\zeta - z| < \infty.$$

因为合流超几何函数 $F(\alpha; \gamma; \zeta)$ 有微商递推关系

$$\frac{d^n F(\alpha; \gamma; \zeta)}{dz^n} = \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} F(\alpha + n; \gamma + n; z),$$

所以有

$$F(\alpha; \gamma; \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} F(\alpha + n; \gamma + n; z) (\zeta - z)^n, \quad |\zeta - z| < \infty.$$

特别取 $\zeta = 0$, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} F(\alpha+n; \gamma+n; z) z^n = 1, \quad |z| < \infty. \quad (3.28)$$

这正是 (3.2b) 式在合流超几何函数 $F(\alpha; \gamma; z)$ 上的体现.

如果将 (3.1) 式应用于 $z^{\gamma-1}F(\alpha; \gamma; z)$, 则有

$$\zeta^{\gamma-1}F(\alpha; \gamma; \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{dz^n} [z^{\gamma-1}F(\alpha; \gamma; z)] \right\} (\zeta - z)^n.$$

但因为

$$\frac{d^n}{dz^n} [z^{\gamma-1}F(\alpha; \gamma; z)] = (-1)^n (1-\gamma)_n z^{\gamma-1-n} F(\alpha; \gamma-n; z),$$

所以上式即化为

$$\zeta^{\gamma-1}F(\alpha; \gamma; \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (1-\gamma)_n z^{\gamma-1-n} F(\alpha; \gamma-n; z) (\zeta - z)^n.$$

令 $\zeta = 0$, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma)_n}{n!} z^{\gamma-1} F(\alpha; \gamma-n; z) = 0, \quad \operatorname{Re} \gamma > 1, |z| < \infty,$$

亦即

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma)_n}{n!} F(\alpha; \gamma-n; z) = 0, \quad \operatorname{Re} \gamma > 1, |z| < \infty. \quad (3.29)$$

根据合流超几何函数 $F(\alpha; \gamma; z)$ 的另一个微商递推关系

$$\frac{d^n}{dz^n} [e^{-z}F(\alpha; \gamma; z)] = (-1)^n \frac{(\gamma-\alpha)_n}{(\gamma)_n} e^{-z}F(\alpha; \gamma+n; z),$$

又能得到

$$\begin{aligned} e^{-\zeta} F(\alpha; \gamma; \zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{dz^n} [e^{-z}F(\alpha; \gamma; z)] \right\} (\zeta - z)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\gamma-\alpha)_n}{(\gamma)_n} e^{-z}F(\alpha; \gamma+n; z) (\zeta - z)^n, \end{aligned}$$

令 $\zeta = 0$, 即得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\gamma-\alpha)_n}{(\gamma)_n} e^{-z}F(\alpha; \gamma+n; z) z^n = 1, \quad |z| < \infty, \quad (3.30a)$$

或者写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\gamma-\alpha)_n}{(\gamma)_n} F(\alpha; \gamma+n; z) z^n = e^z, \quad |z| < \infty. \quad (3.30b)$$

合流超几何函数 $F(\alpha; \gamma; z)$ 还有第四个微商递推关系

$$\frac{d^n}{dz^n} [e^{-z} z^{\gamma-1} F(\alpha; \gamma; z)] = (-1)^n (1-\gamma)_n e^{-z} z^{\gamma-n-1} F(\alpha-n; \gamma-n; z),$$

由此可以推得

$$e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma)_n}{n!} F(\alpha-n; \gamma-n; z) = 0, \quad \operatorname{Re} \gamma > 1.$$

但利用合流超几何函数的 Kummer 公式: $e^{-z} F(\alpha; \gamma; z) = F(\gamma - \alpha; \gamma; -z)$, 它实际上就化成为 (3.29) 式的形式.

3.4.2 合流超几何函数 $U(\alpha; \gamma; z)$

合流超几何方程的另一解为

$$U(\alpha; \gamma; z) = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} F(\alpha; \gamma; z) + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1; 2-\gamma; z),$$

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

根据 $U(\alpha; \gamma; z)$ 的微商递推关系

$$\frac{d^n U(\alpha; \gamma; z)}{dz^n} = (-1)^n (\alpha)_n U(\alpha+n; \gamma+n; z).$$

可得

$$\begin{aligned} U(\alpha; \gamma; \zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n U(\alpha; \gamma; z)}{dz^n} (\zeta - z)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\alpha)_n U(\alpha+n; \gamma+n; z) (\zeta - z)^n, \quad |\zeta - z| < \infty. \end{aligned}$$

令 $\zeta = 0$ (因此必须要求 $-\pi/2 \leq \arg z \leq \pi/2$), 即得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} U(\alpha+n; \gamma+n; z) z^n = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}, \quad \operatorname{Re} \gamma < 1, |z| < \infty. \quad (3.31)$$

完全类似地, 根据 $U(\alpha; \gamma; z)$ 的另一个微商递推关系

$$\frac{d^n}{dz^n} [z^{\gamma-1} U(\alpha; \gamma; z)] = (-1)^n (\alpha-\gamma+1)_n z^{\gamma-n-1} U(\alpha; \gamma-n; z),$$

可以得到

$$\begin{aligned} \zeta^{\gamma-1} U(\alpha; \gamma; \zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{dz^n} [z^{\gamma-1} U(\alpha; \gamma; z)] \right\} (\zeta - z)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\alpha-\gamma+1)_n z^{\gamma-n-1} U(\alpha; \gamma-n; z) (\zeta - z)^n. \end{aligned}$$

令 $\zeta = 0$, 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha-\gamma+1)_n}{n!} z^{\gamma-1} U(\alpha; \gamma-n; z) = \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)}, \quad \operatorname{Re} \gamma > 1, |z| < \infty. \quad (3.32a)$$

或记为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha-\gamma+1)_n}{n!} U(\alpha; \gamma-n; z) = \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma}, \quad \operatorname{Re} \gamma > 1, |z| < \infty. \quad (3.32b)$$

最后, 利用递推关系

$$\frac{d^n}{dz^n} [e^{-z} U(\alpha; \gamma; z)] = (-1)^n e^{-z} U(\alpha; \gamma+n; z),$$

又能导出

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{-z} U(\alpha; \gamma+n; z) z^n = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma-1)}, \quad \operatorname{Re} \gamma < 1, |z| < \infty, \quad (3.33a)$$

或记为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} U(\alpha; \gamma+n; z) z^n = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma-1)} e^z, \quad \operatorname{Re} \gamma < 1, |z| < \infty. \quad (3.33b)$$

3.4.3 广义 Laguerre 函数

关于特殊的合流超几何函数, 首先应当提到广义 Laguerre 函数

$$L_{\nu}^{(\alpha)}(z) = \frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(\alpha+1)} F(-\nu; \alpha+1; z).$$

由 $F(\alpha; \gamma; z)$ 的递推关系, 可以导出

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dz^n} [L_{\nu}^{(\alpha)}(z)] &= (-1)^n L_{\nu-n}^{(\alpha+n)}(z), \\ \frac{d^n}{dz^n} [e^{-z} L_{\nu}^{(\alpha)}(z)] &= (-1)^n e^{-z} L_{\nu}^{(\alpha+n)}(z), \\ \frac{d^n}{dz^n} [z^{\alpha} L_{\nu}^{(\alpha)}(z)] &= \frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)}{\Gamma(\alpha+\nu-n+1)} z^{\alpha-n} L_{\nu}^{(\alpha-n)}(z), \\ \frac{d^n}{dz^n} [e^{-z} z^{\alpha} L_{\nu}^{(\alpha)}(z)] &= \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu+1)} e^{-z} z^{\alpha-n} L_{\nu+n}^{(\alpha-n)}(z), \end{aligned}$$

因此, 根据 (3.1) 式, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} L_{\nu-n}^{(\alpha+n)}(z) (\zeta-z)^n = L_{\nu}^{(\alpha)}(\zeta),$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e^{-z} L_{\nu}^{(\alpha+n)}(z) (\zeta-z)^n &= e^{-\zeta} L_{\nu}^{(\alpha)}(\zeta), \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+\alpha-n+1)} z^{\alpha-n} L_{\nu}^{(\alpha-n)}(z) (\zeta-z)^n &= \zeta^{\alpha} L_{\nu}^{(\alpha)}(\zeta), \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu+1)} e^{-z} z^{\alpha-n} L_{\nu+n}^{(\alpha-n)}(z) (\zeta-z)^n &= e^{-\zeta} \zeta^{\alpha} L_{\nu}^{(\alpha)}(\zeta).
\end{aligned}$$

令 $\zeta = 0$, 则得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} L_{\nu-n}^{(\alpha+n)}(z) z^n = \frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(\alpha+1)}, \quad |z| < \infty, \quad (3.34)$$

$$e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} L_{\nu}^{(\alpha+n)}(z) z^n = \frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(\alpha+1)}, \quad |z| < \infty \quad (3.35)$$

以及

$$z^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+\alpha-n+1)} L_{\nu}^{(\alpha-n)}(z) = 0, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, |z| < \infty, \quad (3.36)$$

$$e^{-z} z^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu+1)} L_{\nu+n}^{(\alpha-n)}(z) = 0, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, |z| < \infty. \quad (3.37)$$

这些结果当然适用于 Laguerre 多项式以及广义 Laguerre 多项式, 只是式中的无穷级数自然截断为有限项和.

3.4.4 其他特殊的合流超几何函数

作为特殊的合流超几何函数, 还可以提到不完全 Γ 函数和抛物线柱函数

$$\gamma(a, z) = \frac{1}{a} z^a e^{-z} F(1; a+1; z), \quad \Gamma(a, z) = z^a e^{-z} U(1; a+1; z),$$

$$D_{\nu}(z) = 2^{(\nu-1)/2} e^{-z^2/4} z U\left(\frac{1-\nu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right).$$

它们的递推关系是

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dz^n} [z^{-a} \gamma(a, z)] &= (-1)^n z^{-n-a} \gamma(a+n, z), \\
\frac{d^n}{dz^n} [e^z \gamma(a, z)] &= (-1)^n (1-a)_n e^z \gamma(a-n, z), \\
\frac{d^n}{dz^n} [z^{-a} \Gamma(a, z)] &= (-1)^n z^{-n-a} \Gamma(a+n, z), \\
\frac{d^n}{dz^n} [e^z \Gamma(a, z)] &= (-1)^n (1-a)_n e^z \Gamma(a-n, z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dz^n} [e^{z^2/4} D_\nu(z)] &= (-1)^n (-\nu)_n e^{z^2/4} D_{\nu-n}(z), \\ \frac{d^n}{dz^n} [e^{-z^2/4} D_\nu(z)] &= (-1)^n e^{z^2/4} D_{\nu-n}(z).\end{aligned}$$

因此有 Taylor 展开

$$\begin{aligned}\zeta^{-a} \Upsilon(a, \zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-n-a} \Upsilon(a+n, z) (\zeta-z)^n, \\ e^\zeta \Upsilon(a, \zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-a)_n}{n!} e^z \Upsilon(a-n, z) (\zeta-z)^n, \\ \zeta^{-a} \Gamma(a, \zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-n-a} \Gamma(a+n, z) (\zeta-z)^n, \\ e^\zeta \Gamma(a, \zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-a)_n}{n!} e^z \Gamma(a-n, z) (\zeta-z)^n, \\ e^{z^2/4} D_\nu(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-\nu)_n}{n!} e^{z^2/4} D_{\nu-n}(z) (\zeta-z)^n, \\ e^{-\zeta^2/4} D_\nu(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e^{-z^2/4} D_{\nu+n}(z) (\zeta-z)^n.\end{aligned}$$

在这些展开式中代入 $\zeta = 0$, 从而可以得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Upsilon(a+n, z) = \frac{1}{a} z^a, \quad a \neq 0, |z| < \infty, \quad (3.38)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-a)_n}{n!} z^n \Upsilon(a-n, z) = 0, \quad \operatorname{Re} a > 0, |z| < \infty, \quad (3.39)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Gamma(a+n, z) = -\frac{1}{a} z^a, \quad \operatorname{Re} a < 0, |z| < \infty, \quad (3.40)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-a)_n}{n!} z^n \Gamma(a-n, z) = e^{-z} \Gamma(a), \quad \operatorname{Re} a > 0, |z| < \infty, \quad (3.41)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_n}{n!} z^n D_{\nu-n}(z) = \frac{2^{\nu/2}}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{\nu\pi}{2} e^{-z^2/4} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right), \quad |z| < \infty, \quad (3.42)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n D_{\nu+n}(z) = \frac{2^{\nu/2}}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{\nu\pi}{2} e^{z^2/4} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right), \quad |z| < \infty. \quad (3.43)$$

由抛物线柱函数又可以定义 Hermite 函数

$$H_\nu(z) = 2^{\nu/2} e^{z^2/2} D_\nu(\sqrt{2} z),$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_n}{n!} (2z)^n H_{\nu-n}(z) = \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{\nu\pi}{2} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right), \quad |z| < \infty, \quad (3.44)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n H_{\nu+n}(z) = \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{\nu\pi}{2} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right), \quad |z| < \infty. \quad (3.45)$$

§3.5 Whittaker 函数

3.5.1 Whittaker 函数 $M_{k,\mu}(z)$

Whittaker 函数 $M_{k,\mu}(z)$

$$M_{k,\mu}(z) = z^{\mu+1/2} e^{-z/2} F(\mu-k+1/2; 2\mu+1; z)$$

是 Whittaker 方程的解, 它有微分递推关系

$$\frac{d^n}{dz^n} [e^{z/2} z^{-\mu-1/2} M_{k,\mu}(z)] = \frac{(\mu-k+1/2)_n}{(2\mu+1)_n} e^{z/2} z^{-\mu-1/2} z^{-n/2} M_{k-n/2, \mu+n/2}(z),$$

所以

$$\begin{aligned} e^{\zeta/2} \zeta^{-\mu-1/2} M_{k,\mu}(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{dz^n} [e^{z/2} z^{-\mu-1/2} M_{k,\mu}(z)] \right\} (\zeta-z)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\mu-k+1/2)_n}{(2\mu+1)_n} e^{z/2} z^{-\mu-1/2} z^{-n/2} M_{k-n/2, \mu+n/2}(z) (\zeta-z)^n. \end{aligned}$$

当 $\zeta=0$ 时, 就有

$$e^{z/2} z^{-\mu-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\mu-k+1/2)_n}{(2\mu+1)_n} z^{n/2} M_{k-n/2, \mu+n/2}(z) = 1. \quad (3.46)$$

根据 $M_{k,\mu}(z)$ 的另一个微分递推关系

$$\frac{d^n}{dz^n} [e^{z/2} z^{\mu-1/2} M_{k,\mu}(z)] = (-1)^n (-2\mu)_n e^{z/2} z^{\mu-1/2} z^{-n/2} M_{k-n/2, \mu-n/2}(z),$$

又能得到

$$\begin{aligned} e^{\zeta/2} \zeta^{\mu-1/2} M_{k,\mu}(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{dz^n} [e^{z/2} z^{\mu-1/2} M_{k,\mu}(z)] \right\} (\zeta-z)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (-2\mu)_n e^{z/2} z^{\mu-1/2} z^{-n/2} M_{k-n/2, \mu-n/2}(z) (\zeta-z)^n. \end{aligned}$$

代入 $\zeta = 0$, 即得

$$e^{z/2} z^{\mu-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2\mu)_n}{n!} z^{n/2} M_{k-n/2, \mu-n/2}(z) = 0, \quad \operatorname{Re} \mu > 0, |z| < \infty. \quad (3.47)$$

$M_{k, \mu}(z)$ 的第三个递推关系是

$$\frac{d^n}{dz^n} [e^{-z/2} z^{\mu-1/2} M_{k, \mu}(z)] = (-1)^n (-2\mu)_n e^{-z/2} z^{\mu-1/2} z^{-n/2} M_{k+n/2, \mu-n/2}(z),$$

由此也能得到

$$\begin{aligned} e^{-\zeta/2} \zeta^{\mu-1/2} M_{k, \mu}(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{dz^n} [e^{-z/2} z^{\mu-1/2} M_{k, \mu}(z)] \right\} (\zeta - z)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (-2\mu)_n e^{-z/2} z^{\mu-1/2} z^{-n/2} M_{k+n/2, \mu-n/2}(z) (\zeta - z)^n. \end{aligned}$$

作为特殊情形: $\zeta = 0$, 即有

$$e^{-z/2} z^{\mu-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2\mu)_n}{n!} z^{n/2} M_{k+n/2, \mu-n/2}(z) = 0, \quad \operatorname{Re} \mu > 0, |z| < \infty. \quad (3.48)$$

最后, 根据递推关系

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dz^n} [e^{-z/2} z^{-\mu-1/2} M_{k, \mu}(z)] \\ = (-1)^n \frac{(\mu+k+1/2)_n}{(2\mu+1)_n} e^{-z/2} z^{-\mu-1/2} z^{-n/2} M_{k+n/2, \mu+n/2}(z), \end{aligned}$$

即可导出

$$\begin{aligned} e^{-\zeta/2} \zeta^{-\mu-1/2} M_{k, \mu}(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{dz^n} [e^{-z/2} z^{-\mu-1/2} M_{k, \mu}(z)] \right\} (\zeta - z)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\mu+k+1/2)_n}{(2\mu+1)_n} e^{-z/2} z^{-\mu-1/2} z^{-n/2} M_{k+n/2, \mu+n/2}(z) (\zeta - z)^n. \end{aligned}$$

由此得到

$$e^{-z/2} z^{-\mu-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\mu+k+1/2)_n}{(2\mu+1)_n} z^{n/2} M_{k+n/2, \mu+n/2}(z) = 1, \quad |z| < \infty. \quad (3.49)$$

3.5.2 Whittaker 函数 $W_{k,\mu}(z)$

另一类 Whittaker 函数是

$$\begin{aligned} W_{k,\mu}(z) &= \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu-k+1/2)} M_{k,-\mu}(z) + \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(-\mu-k+1/2)} M_{k,-\mu}(z) \\ &= \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu-k+1/2)} e^{-z/2} z^{-\mu+1/2} F(-\mu-k+1/2; 1-2\mu; z) \\ &\quad + \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(-\mu-k+1/2)} e^{-z/2} z^{\mu+1/2} F(\mu-k+1/2; 1+2\mu; z). \end{aligned}$$

将 $W_{k,\mu}(z)$ 的四个递推关系

$$\begin{aligned} \frac{d^n [e^{z/2} z^{\mu-1/2} W_{k,\mu}(z)]}{dz^n} &= (-1)^n \left(-\mu-k+\frac{1}{2}\right)_n e^{z/2} z^{\mu-1/2} z^{-n/2} W_{k-n/2, \mu-n/2}(z), \\ \frac{d^n [e^{z/2} z^{-\mu-1/2} W_{k,\mu}(z)]}{dz^n} &= (-1)^n \left(\mu-k+\frac{1}{2}\right)_n e^{z/2} z^{-\mu-1/2} z^{-n/2} W_{k-n/2, \mu+n/2}(z), \\ \frac{d^n [e^{-z/2} z^{\mu-1/2} W_{k,\mu}(z)]}{dz^n} &= (-1)^n e^{-z/2} z^{\mu-1/2} z^{-n/2} W_{k+n/2, \mu-n/2}(z), \\ \frac{d^n [e^{-z/2} z^{-\mu-1/2} W_{k,\mu}(z)]}{dz^n} &= (-1)^n e^{-z/2} z^{-\mu-1/2} z^{-n/2} W_{k+n/2, \mu+n/2}(z) \end{aligned}$$

和 Taylor 展开公式结合起来, 有

$$\begin{aligned} e^{\zeta/2} \zeta^{\mu-1/2} W_{k,\mu}(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(-\mu-k+\frac{1}{2}\right)_n e^{z/2} z^{\mu-1/2} z^{-n/2} W_{k-n/2, \mu-n/2}(z) (\zeta-z)^n, \\ e^{\zeta/2} \zeta^{-\mu-1/2} W_{k,\mu}(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\mu-k+\frac{1}{2}\right)_n e^{z/2} z^{-\mu-1/2} z^{-n/2} W_{k-n/2, \mu+n/2}(z) (\zeta-z)^n, \\ e^{-\zeta/2} \zeta^{\mu-1/2} W_{k,\mu}(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e^{-z/2} z^{\mu-1/2} z^{-n/2} W_{k+n/2, \mu-n/2}(z) (\zeta-z)^n, \\ e^{-\zeta/2} \zeta^{-\mu-1/2} W_{k,\mu}(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e^{-z/2} z^{-\mu-1/2} z^{-n/2} W_{k+n/2, \mu+n/2}(z) (\zeta-z)^n. \end{aligned}$$

代入 $\zeta = 0$, 在 $\operatorname{Re} \mu > 0$, $|z| < \infty$ 的条件下就得到

$$e^{z/2} z^{\mu-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\mu-k+\frac{1}{2}\right)_n z^{n/2} W_{k-n/2, \mu-n/2}(z) = \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu-k+1/2)}, \quad (3.50)$$

$$e^{-z/2} z^{\mu-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n/2} W_{k+n/2, \mu-n/2}(z) = \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu-k+1/2)}, \quad (3.51)$$

而在 $\operatorname{Re} \mu < 0$, $|z| < \infty$ 的条件下则有

$$e^{z/2} z^{-\mu-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\mu-k+\frac{1}{2}\right)_n z^{n/2} W_{k-n/2, \mu+n/2}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(-\mu-k+1/2)}. \quad (3.52)$$

$$e^{-z/2} z^{-\mu-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n/2} W_{k+n/2, \mu+n/2}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(-\mu-k+1/2)}. \quad (3.53)$$

§3.6 Taylor 展开公式的变型

如果在 (3.1) 式中取 $\zeta = \lambda z$, 则得到 Taylor 展开公式的一种变型:

$$f(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^n}{n!} \frac{d^n f(z)}{dz^n} z^n. \quad (3.54)$$

(3.2b) 式相当于 (3.54) 式的特殊情形 ($\lambda = 0$). 在一定意义上, 也可以把 (3.54) 式称为 Taylor 展开的倍乘公式.

对于 $(1+z)^\alpha$, $\ln(1+z)$ 以及 $\ln \Gamma(1+z)$, $\psi(1+z)$ 等函数, §3.1 中已经给出了它们的 n 阶导数, 因此, 由 (3.54) 式即可得到

$$\left(\frac{1+\lambda z}{1+z}\right)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_n}{n!} (1-\lambda)^n \left(\frac{z}{1+z}\right)^n, \quad (3.55)$$

$$\ln \frac{1+\lambda z}{1+z} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1-\lambda)^n \left(\frac{z}{1+z}\right)^n, \quad (3.56)$$

$$\ln \frac{\Gamma(1+\lambda z)}{\Gamma(1+z)} = (\lambda-1)\psi(1+z)z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} (1-\lambda)^n \zeta(n, z+1) z^n, \quad (3.57)$$

$$\psi(1+\lambda z) = \psi(1+z) - \sum_{n=1}^{\infty} (1-\lambda)^n \zeta(n+1, z+1) z^n. \quad (3.58)$$

它们的收敛范围都是 $\left|\frac{z}{1+z}\right| < \frac{1}{|1-\lambda|}$.

图 3.1 和图 3.2 给出了级数 (3.55) — (3.58) 的收敛区域 $|z/(1+z)| < 1/|1-\lambda|$ 随 $k \equiv |1-\lambda|$ 值的变化. 当 $k = 1$ 时, 收敛区域为半平面 $|z| > -1/2$. 随着 k 值的增大, 收敛区域逐渐减小, $k \rightarrow \infty$ 时收缩为一点 $z = 0$; 反之, 随着 k 值的减小, 收敛区域逐渐增大, $k \rightarrow 0$ 时则扩大到全平面.

我们知道, $(1+z)^\alpha$, $\ln(1+z)$ 以及 $\ln\Gamma(1+z)$, $\psi(1+z)$ 等函数都可以在 $z=0$ 点作 Taylor 展开. 作为对照, 在图 3.1 和图 3.2 中也用虚线画出了它们的收敛区域 ($|z| < 1$).

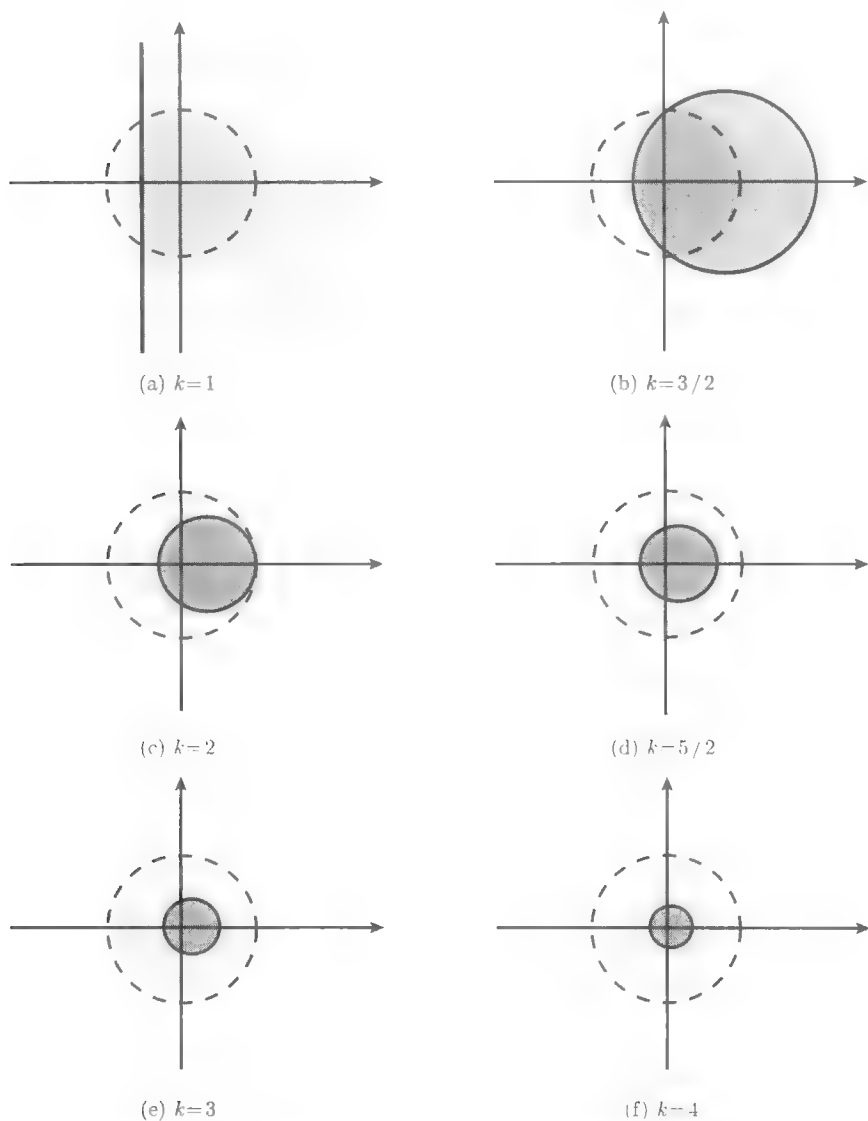
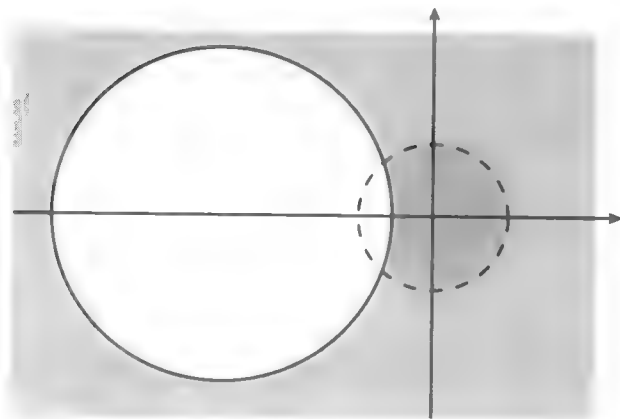
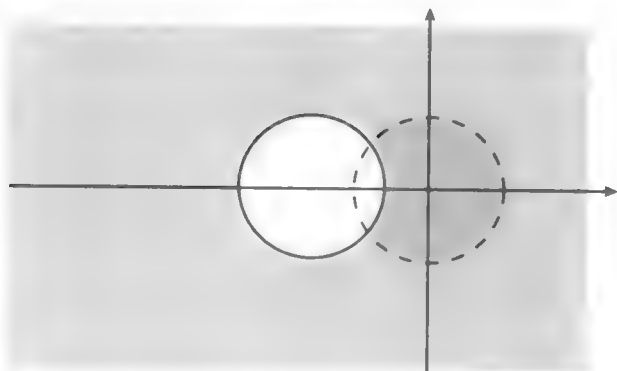
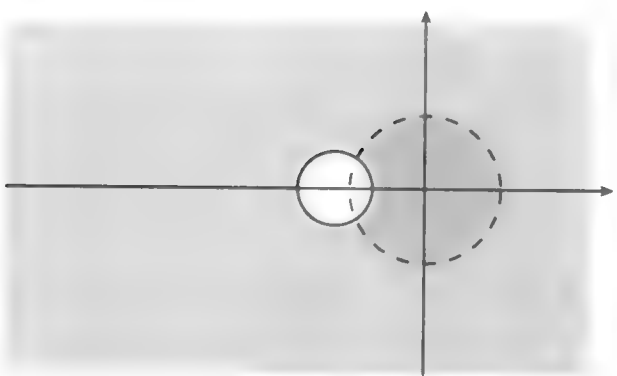


图 3.1 收敛区域 $|z/(1+z)| < 1/k$ 随 k 值的变化, $k \geq 1$.

(a) $k=1/5$ (b) $k=3/5$ (c) $k=2/5$ 图 3.2 收敛区域 $|z/(1+z)| < 1/k$ 随 k 值的变化. $k < 1$.

下面给出 (3.54) 式对于超几何函数及合流超几何函数等的应用. 为节省篇幅, 这里只列出最后结果.

3.6.1 超几何函数

关于超几何函数的倍乘公式, 可以先列出:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^n}{n!} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} z^n F(\alpha+n, \beta+n; \gamma+n; z), \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1-\lambda z}{1-z} \right)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta; \gamma; \lambda z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^n}{n!} \frac{(\gamma-\alpha)_n (\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n} \left(\frac{z}{1-z} \right)^n F(\alpha, \beta; \gamma+n; z). \end{aligned} \quad (3.60)$$

根据超几何函数 $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ 在 $|\gamma|$ 大时的渐近展开以及超几何函数的变换关系 (3.13), 就可以断定, 上述二式的收敛范围是 $|z/(1-z)| < 1/|1-\lambda|$.

其他结果还有

$$\lambda^{\gamma-1} F(\alpha, \beta; \gamma; \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma)_n}{n!} (1-\lambda)^n F(\alpha, \beta; \gamma-n; z), \quad |1-\lambda| < 1, \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} & \lambda^{\gamma-1} \left(\frac{1-\lambda z}{1-z} \right)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta; \gamma; \lambda z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma)_n}{n!} \left(\frac{1-\lambda}{1-z} \right)^n F(\alpha-n, \beta-n; \gamma-n; z), \quad |1-\lambda| < 1; \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} & F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{1-\lambda z}{2}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \left(\frac{\lambda-1}{2} \right)^n z^n F\left(\alpha+n, \beta+n; \gamma+n; \frac{1-z}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1+\lambda z}{1+z} \right)^{\alpha+\beta-\gamma} F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{1-\lambda z}{2}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} \frac{(\gamma-\alpha)_n (\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n} \left(\frac{z}{1+z} \right)^n F\left(\alpha, \beta; \gamma+n; \frac{1-z}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1-\lambda z}{1-z} \right)^{\gamma-1} F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{1-\lambda z}{2}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^n (1-\gamma)_n}{n!} \left(\frac{z}{1-z} \right)^n F\left(\alpha, \beta; \gamma-n; \frac{1-z}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1-\lambda z}{1-z} \right)^{\gamma-1} \left(\frac{1+\lambda z}{1+z} \right)^{\alpha+\beta-\gamma} F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{1-\lambda z}{2}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma)_n (\lambda-1)^n}{n!} \left(\frac{2z}{1-z^2} \right)^n F\left(\alpha-n, \beta-n; \gamma-n; \frac{1-z}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.66)$$

3.6.2 Legendre 函数、Gegenbauer 函数及 Jacobi 多项式

将 (3.54) 式应用于这些函数, 可以得到如下倍乘公式:

$$P_\nu(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^n}{n!} z^n (z^2-1)^{-n/2} P_\nu^n(z), \quad |z/(1+z)| < 1/|1-\lambda|, \quad (3.67)$$

$$\left(\frac{\lambda^2 z^2 - 1}{z^2 - 1}\right)^{-m/2} P_\nu^m(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^n}{n!} z^n (z^2-1)^{-n/2} P_\nu^{m+n}(z),$$

$$|z/(1+z)| < 1/|1-\lambda|, \quad (3.68)$$

$$P_\nu(\lambda x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} x^n (1-x^2)^{-n/2} P_\nu^n(x), \quad 1/2 < x/(1+x) < 1/|1-\lambda|, \quad (3.69)$$

$$\left(\frac{1-\lambda^2 x^2}{1-x^2}\right)^{-m/2} P_\nu^m(\lambda x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^n}{n!} x^n (1-x^2)^{-n/2} P_\nu^{m+n}(x),$$

$$1/2 < x/(1+x) < 1/|1-\lambda|, \quad (3.70)$$

$$C_\alpha^\nu(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu)_n}{n!} (\lambda-1)^n (2z)^n C_{\alpha-n}^{\nu+n}(z), \quad |z/(1+z)| < 1/|1-\lambda|, \quad (3.71)$$

$$\left(\frac{\lambda^2 z^2 - 1}{z^2 - 1}\right)^{\nu-1/2} C_\alpha^\nu(\lambda z)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^n}{2^n n!} \frac{(\alpha+1)_n (1-\alpha-2\nu)_n}{(1-\nu)_n} \left(\frac{z}{z^2-1}\right)^n C_{\alpha+n}^{\nu-n}(z).$$

$$|z/(1+z)| < 1/|1-\lambda|, \quad (3.72)$$

$$P_k^{(\alpha, \beta)}(\lambda z) = \sum_{n=0}^k \frac{(\lambda-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(k+\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(k+\alpha+\beta+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^n P_k^{(\alpha+n, \beta-n)}(z). \quad (3.73)$$

$$\left(\frac{\lambda z - 1}{z-1}\right)^\alpha P_k^{(\alpha, \beta)}(\lambda z) = \sum_{n=0}^k \frac{(\lambda-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha-n+1)} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n P_k^{(\alpha-n, \beta+n)}(z). \quad (3.74)$$

$$\left(\frac{\lambda z + 1}{z+1}\right)^\beta P_k^{(\alpha, \beta)}(\lambda z) = \sum_{n=0}^k \frac{(\lambda-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(k+\beta)}{\Gamma(k+\beta-n)} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n P_k^{(\alpha+n, \beta-n)}(z), \quad (3.75)$$

$$\left(\frac{\lambda z - 1}{z-1}\right)^\alpha \left(\frac{\lambda z + 1}{z+1}\right)^\beta P_k^{(\alpha, \beta)}(\lambda z) = \sum_{n=0}^k \frac{(\lambda-1)^n}{n!} \frac{(k+n)!}{k!} \left(\frac{2z}{z^2-1}\right)^n P_{k+n}^{(\alpha-n, \beta-n)}(z).$$

$$(3.76)$$

以上 (3.67) — (3.76) 各式也可以等价地改写成

$$P_\nu(1-\lambda+\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^n}{n!} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{n/2} P_\nu^n(z), \quad \left|\frac{z-1}{z+1}\right| < \frac{1}{|\lambda-1|}, \quad (3.67')$$

$$\lambda^{-m/2} \left(\frac{z+1}{2-\lambda+\lambda z} \right)^{m/2} P_\nu^m(1-\lambda+\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^n}{n!} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{n/2} P_\nu^{m+n}(z),$$

$$\left| \frac{z-1}{z+1} \right| < \frac{1}{|\lambda-1|}, \quad (3.68')$$

$$P_\nu(1-\lambda+\lambda x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^n}{n!} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{n/2} P_\nu^n(x), \quad \frac{|\lambda-1|-1}{|\lambda-1|+1} < x < 1, \quad (3.69')$$

$$\lambda^{-m/2} \left(\frac{1+x}{2-\lambda+\lambda x} \right)^{m/2} P_\nu^m(1-\lambda+\lambda x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^n}{n!} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{n/2} P_\nu^{m+n}(x),$$

$$\frac{|\lambda-1|-1}{|\lambda-1|+1} < x < 1, \quad (3.70')$$

$$C_\alpha^\nu(1-\lambda+\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)} [2(1-z)]^n C_{\alpha-n}^{\nu+n}(z),$$

$$\left| \frac{1-z}{1+z} \right| < \frac{1}{|\lambda-1|}, \quad (3.71')$$

$$\lambda^{\nu-1/2} \left(\frac{1-\lambda+\lambda z}{1+z} \right)^{\nu-1/2} C_\alpha^\nu(1-\lambda-\lambda z)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\Gamma(\nu-n)}{\Gamma(\nu)} \frac{\Gamma(\alpha+2\nu)}{\Gamma(\alpha+2\nu-n)} [2(1+z)]^{-n} C_{\alpha+n}^{\nu-n}(z),$$

$$|1-\lambda| < 1, \quad (3.72')$$

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(1-\lambda+\lambda z) = \sum_{n=0}^k \frac{(1-\lambda)^n}{n!} \frac{\Gamma(k+\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(k+\alpha+\beta+1)} \left(\frac{1-z}{2} \right)^n P_k^{(\alpha+n,\beta-n)}(z), \quad (3.73')$$

$$\lambda^\alpha P_k^{(\alpha,\beta)}(1-\lambda+\lambda z) = \sum_{n=0}^k \frac{(\lambda-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha-n+1)} P_k^{(\alpha-n,\beta+n)}(z), \quad (3.74')$$

$$\left(\frac{2-\lambda+\lambda z}{1+z} \right)^j P_k^{(\alpha,\beta)}(1-\lambda+\lambda z) = \sum_{n=0}^k \frac{(1-\lambda)^n}{n!} \frac{\Gamma(k+\beta)}{\Gamma(k+\beta-n)} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^n P_k^{(\alpha+n,\beta-n)}(z),$$

$$(3.75')$$

$$\lambda^\alpha \left(\frac{2-\lambda+\lambda z}{1+z} \right)^\beta P_k^{(\alpha,\beta)}(1-\lambda+\lambda z) = \sum_{n=0}^k \frac{(\lambda-1)^n}{n!} \frac{(k+n)!}{k!} \left(\frac{1+z}{2} \right)^{-n} P_{k+n}^{(\alpha-n,\beta-n)}(z).$$

$$(3.76')$$

3.6.3 合流超几何函数^①

合流超几何函数的倍乘公式有

① (3.77) — (3.83) 式可参见文献: W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni. *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1966: 273 - 274.

(3.77), (3.78), (3.81) 及 (3.82) 四式亦可参见文献: A. Erdélyi et al. *Higher Transcendental Functions*. Vol. I. New York: McGraw-Hill, 1953: 282 - 283.

$$F(\alpha; \gamma; \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^n}{n!} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} z^n F(\alpha+n; \gamma+n; z), \quad (3.77)$$

$$\lambda^{\gamma-1} F(\alpha; \gamma; \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} (1-\gamma)_n F(\alpha; \gamma-n; z), \quad (3.78)$$

$$e^{-\lambda z} F(\alpha; \gamma; \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} \frac{(\gamma-\alpha)_n}{(\gamma)_n} e^{-z} z^n F(\alpha; \gamma+n; z), \quad (3.79)$$

$$\lambda^{\gamma-1} e^{-\lambda z} F(\alpha; \gamma; \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} (1-\gamma)_n e^{-z} F(\alpha-n; \gamma-n; z), \quad (3.80)$$

$$U(\alpha; \gamma; \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} (\alpha)_n z^n U(\alpha+n; \gamma+n; z), \quad (3.81)$$

$$\lambda^{\gamma-1} U(\alpha; \gamma; \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} (\alpha-\gamma+1)_n z^n U(\alpha; \gamma-n; z), \quad (3.82)$$

$$e^{-\lambda z} U(\alpha; \gamma; \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} e^{-z} z^n U(\alpha; \gamma+n; z). \quad (3.83)$$

3.6.4 特殊的合流超几何函数

作为特殊的合流超几何函数, 有广义 Laguerre 函数 $L_{\nu}^{(\alpha)}(\lambda z)$, 不完全 Γ 函数 $\gamma(a, z)$, $\Gamma(a, z)$, 指数积分 $E_1(z)$, 抛物线柱函数 $D_{\nu}(z)$ 及 Hermite 函数 $H_{\nu}(z)$ 等. 它们的倍乘公式有

$$L_{\nu}^{(\alpha)}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} z^n L_{\nu-n}^{(\alpha+n)}(z), \quad (3.84)$$

$$e^{-\lambda z} L_{\nu}^{(\alpha)}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} e^{-z} z^n L_{\nu}^{(\alpha+n)}(z), \quad (3.85)$$

$$\lambda^{\alpha} L_{\nu}^{(\alpha)}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+\alpha-n+1)} L_{\nu-n}^{(\alpha-n)}(z), \quad (3.86)$$

$$\lambda^{\alpha} e^{-\lambda z} L_{\nu}^{(\alpha)}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu+1)} e^{-z} L_{\nu+n}^{(\alpha-n)}(z); \quad (3.87)$$

$$\lambda^{-a} \gamma(a, \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} \gamma(a+n, z). \quad (3.88)$$

$$e^{\lambda z} \gamma(a, \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} (1-\lambda)^n e^z z^n \gamma(a-n, z), \quad (3.89)$$

$$\lambda^{-a} \Gamma(a, \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} \Gamma(a+n, z). \quad (3.90)$$

$$e^{\lambda z} \Gamma(a, \lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-a)_n}{n!} (1-\lambda)^n e^z z^n \Gamma(a-n, z), \quad (3.91)$$

$$E_1(\lambda z) \equiv -\text{Ei}(-\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} e^{-z} z^n U(1; n+1; z); \quad (3.92)$$

$$e^{\lambda^2 z^2/4} D_\nu(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_n}{n!} (1-\lambda)^n e^{z^2/4} z^n D_{\nu-n}(z), \quad (3.93)$$

$$e^{-\lambda^2 z^2/4} D_\nu(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} e^{-z^2/4} z^n D_{\nu+n}(z), \quad (3.94)$$

$$H_\nu(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_n}{n!} (1-\lambda)^n (2z)^n H_{\nu-n}(z), \quad (3.95)$$

$$H_\nu(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} z^n H_{\nu+n}(z). \quad (3.96)$$

3.6.5 Whittaker 函数^①

(3.54) 式也可以应用于 Whittaker 函数 $M_{k,\mu}(z)$ 和 $W_{k,\mu}(z)$, 从而得到它们的倍乘公式:

$$\lambda^{-\mu-1/2} e^{\lambda z/2} M_{k,\mu}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^n}{n!} \frac{(\mu-k+1/2)_n}{(2\mu+1)_n} e^{z/2} z^{n/2} M_{k-n/2, \mu+n/2}(z), \quad (3.97)$$

$$\lambda^{\mu-1/2} e^{\lambda z/2} M_{k,\mu}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} (-2\mu)_n e^{z/2} z^{n/2} M_{k-n/2, \mu-n/2}(z), \quad (3.98)$$

$$\lambda^{\mu-1/2} e^{-\lambda z/2} M_{k,\mu}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} (-2\mu)_n e^{-z/2} z^{n/2} M_{k+n/2, \mu-n/2}(z), \quad (3.99)$$

$$\lambda^{-\mu-1/2} e^{-\lambda z/2} M_{k,\mu}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} \frac{(\mu+k+1/2)_n}{(2\mu+1)_n} e^{-z/2} z^{n/2} M_{k+n/2, \mu+n/2}(z); \quad (3.100)$$

$$\lambda^{\mu-1/2} e^{\lambda z/2} W_{k,\mu}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} (-\mu-k+1/2)_n e^{z/2} z^{n/2} W_{k-n/2, \mu-n/2}(z), \quad (3.101)$$

① (3.97) — (3.104) 诸式可参见文献: W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni. *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1966: 309 - 311.

$$\lambda^{-\mu-1/2} e^{\lambda z/2} W_{k,\mu}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} (\mu-k+1/2)_n e^{z/2} z^{n/2} W_{k-n/2, \mu+n/2}(z), \quad (3.102)$$

$$\lambda^{\mu-1/2} e^{-\lambda z/2} W_{k,\mu}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} e^{-z/2} z^{n/2} W_{k+n/2, \mu-n/2}(z), \quad (3.103)$$

$$\lambda^{-\mu-1/2} e^{-\lambda z/2} W_{k,\mu}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} e^{-z/2} z^{n/2} W_{k+n/2, \mu+n/2}(z). \quad (3.104)$$

§3.7 柱函数

作为定义方式之一, 所有的柱函数都满足递推关系

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n [z^\nu C_\nu(z)] &= z^{\nu-n} C_{\nu-n}(z), \\ \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n [z^{-\nu} C_\nu(z)] &= (-1)^n z^{-(\nu+n)} C_{\nu+n}(z). \end{aligned}$$

或者令 $\zeta = z^2$, 从而写成

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{d\zeta^n} [\zeta^{\nu/2} C_\nu(\sqrt{\zeta})] &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \zeta^{(\nu-n)/2} C_{\nu-n}(\sqrt{\zeta}), \\ \frac{d^n}{d\zeta^n} [\zeta^{-\nu/2} C_\nu(\sqrt{\zeta})] &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \zeta^{-(\nu+n)/2} C_{\nu+n}(\sqrt{\zeta}). \end{aligned}$$

这样就能应用 (3.1), (3.2b) 与 (3.54) 三式. 例如, 对照 (3.1) 式, 能够写出

$$\zeta^{\nu/2} C_\nu(\sqrt{\zeta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{(\nu-n)/2} C_{\nu-n}(\sqrt{z}) (\zeta - z)^n, \quad (3.105a)$$

$$\zeta^{-\nu/2} C_\nu(\sqrt{\zeta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-(\nu+n)/2} C_{\nu+n}(\sqrt{z}) (\zeta - z)^n. \quad (3.105b)$$

如果能令 $\zeta = 0$, 则可得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{\nu+n} C_{\nu-n}(z) &= z^\nu C_\nu(z)|_{z=0}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-\nu+n} C_{\nu+n}(z) &= z^{-\nu} C_\nu(z)|_{z=0}. \end{aligned}$$

这样, 应用到 Bessel 函数与 Neumann 函数上, 就有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n J_{\nu-n}(z) = \begin{cases} 0, & \operatorname{Re} \nu > 0, \\ 1, & \nu = 0, \end{cases} \quad (3.106)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n J_{\nu+n}(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}, \quad (3.107)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n N_{\nu-n}(z) = -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}, \quad \operatorname{Re} \nu > 0, \quad (3.108)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n N_{\nu+n}(z) = \frac{\Gamma(-\nu)}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \cos \pi \nu, \quad \operatorname{Re} \nu < 0. \quad (3.109)$$

同样, 对于虚宗量 Bessel 函数, 由递推关系

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n [z^{\pm \nu} I_{\nu}(z)] &= z^{\pm \nu - n} I_{\nu \mp n}(z), \\ \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n [z^{\pm \nu} K_{\nu}(z)] &= (-1)^n z^{\pm \nu - n} K_{\nu \mp n}(z), \end{aligned}$$

也可以根据 (3.2b) 式导出

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n I_{\nu-n}(z) = \begin{cases} 0, & \operatorname{Re} \nu > 0, \\ 1, & \nu = 0, \end{cases} \quad (3.110)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n I_{\nu+n}(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}, \quad (3.111)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n K_{\nu-n}(z) = \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}, \quad \operatorname{Re} \nu > 0, \quad (3.112)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n K_{\nu+n}(z) = \frac{\Gamma(-\nu)}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}, \quad \operatorname{Re} \nu < 0. \quad (3.113)$$

注意 $K_{\nu}(z) = K_{-\nu}(z)$, 所以 (3.112) 与 (3.113) 两式可以互化.

类似地, 将 (3.54) 式应用于 Bessel 函数及虚宗量 Bessel 函数, 也能得到倍乘公式^①

$$\lambda^{\nu} J_{\nu}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 - 1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n J_{\nu-n}(z), \quad (3.114)$$

① (3.114) — (3.121) 诸式可参见文献: M. Abramowitz, I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover Publications, Inc., 1970: 363, 377.

(3.115) 及 (3.117) 两式亦可参见文献: I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. 7th edition. Elsevier (Singapore) Pte Ltd., 2007: 941.

(3.115) 式还可参见文献: A. Erdélyi et al. *Higher Transcendental Functions*. Vol. II. New York: McGraw-Hill, 1953: p. 66. 或参见文献: W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni. *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1966: 125.

$$\lambda^{-\nu} J_{\nu}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda^2)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n J_{\nu+n}(z), \quad (3.115)$$

$$\lambda^{\nu} N_{\nu}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n N_{\nu-n}(z), \quad (3.116)$$

$$\lambda^{-\nu} N_{\nu}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda^2)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n N_{\nu+n}(z), \quad (3.117)$$

$$\lambda^{\nu} I_{\nu}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n I_{\nu-n}(z), \quad (3.118)$$

$$\lambda^{-\nu} I_{\nu}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2-1)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n I_{\nu+n}(z), \quad (3.119)$$

$$\lambda^{\nu} K_{\nu}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda^2)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n K_{\nu-n}(z), \quad (3.120)$$

$$\lambda^{-\nu} K_{\nu}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda^2)^n}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n K_{\nu+n}(z). \quad (3.121)$$

§3.8 特殊函数的加法公式

在 (3.1) 式中令 $\zeta = z + z'$, 则得到加法公式

$$f(z + z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(z)}{dz^n} (z')^n. \quad (3.122)$$

将这个公式应用于上面讨论过的特殊函数, (3.59) (3.104) 诸式就将变为

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z + z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} (z')^n F(\alpha + n, \beta + n; \gamma + n; z),$$

$$|z'| < |1 - z|, \quad (3.123)$$

$$\left(1 - \frac{z'}{1-z}\right)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta; \gamma; z + z')$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\gamma-\alpha)_n (\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n} \left(\frac{z'}{1-z}\right)^n F(\alpha, \beta; \gamma + n; z), \quad |z'| < |1-z|, \quad (3.124)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{\gamma-1} F(\alpha, \beta; \gamma; z + z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-\gamma)_n}{n!} \left(\frac{z'}{z}\right)^n F(\alpha, \beta; \gamma - n; z), \quad |z'| < |z|. \quad (3.125)$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{\gamma-1} \left(1 - \frac{z'}{1-z}\right)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta; \gamma; z+z') \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-\gamma)_n}{n!} \left(\frac{z'}{z}\right)^n (1-z)^{-n} F(\alpha-n, \beta-n; \gamma-n; z), \\
& \quad |z'| < |z|, \quad (3.126)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{1-z-z'}{2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \left(\frac{z'}{2}\right)^n F\left(\alpha+n, \beta+n; \gamma+n; \frac{1-z}{2}\right). \\
& \quad |z'| < |1+z|, \quad (3.127)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{z'}{1+z}\right)^{\alpha+\beta-\gamma} F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{1-z-z'}{2}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\gamma-\alpha)_n (\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n} \left(\frac{z'}{1+z}\right)^n F\left(\alpha, \beta; \gamma+n; \frac{1-z}{2}\right), \\
& \quad |z'| < |1+z|, \quad (3.128)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{z'}{1-z}\right)^{\gamma-1} F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{1-z-z'}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma)_n}{n!} \left(\frac{z'}{1-z}\right)^n F\left(\alpha, \beta; \gamma-n; \frac{1-z}{2}\right), \\
& \quad |z'| < |1-z|, \quad (3.129)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{z'}{1-z}\right)^{\gamma-1} \left(1 + \frac{z'}{1+z}\right)^{\alpha+\beta-\gamma} F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{1-z-z'}{2}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma)_n}{n!} \left(\frac{2z'}{1-z^2}\right)^n F\left(\alpha-n, \beta-n; \gamma-n; \frac{1-z}{2}\right), \quad |z'| < |1-z|, \quad (3.130)
\end{aligned}$$

$$P_{\nu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z')^n (z^2-1)^{-n/2} P_{\nu}^n(z), \quad |z'| < |1+z|, \quad (3.131)$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{(z+z')^2-1}{z^2-1}\right]^{-m/2} P_{\nu}^m(z+z') &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z')^n (z^2-1)^{-n/2} P_{\nu}^{m+n}(z), \\
& \quad |z'| < |1+z|, \quad (3.132)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{\nu}(x+x') &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)^n}{n!} (x')^n (1-x^2)^{-n/2} P_{\nu}^n(x), \\
& \quad -1 < x, x' < 1, -1 < \frac{x'}{1+x} < 1, \quad (3.133)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1-(x+x')^2}{1-x^2}\right]^{-m/2} P_{\nu}^m(x+x') &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x')^n (1-x^2)^{-n/2} P_{\nu}^{m+n}(x), \\
& \quad -1 < x, x' < 1, -1 < \frac{x'}{1+x} < 1, \quad (3.134)
\end{aligned}$$

$$C_{\alpha}^{\nu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu)_n}{n!} (2z')^n C_{\alpha-n}^{\nu+n}(z), \quad |z'| < |1+z|, \quad (3.135)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(z+z')^2-1}{z^2-1} \right]^{\nu-1/2} C_{\alpha}^{\nu}(z+z') \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_n (1-\alpha-2\nu)_n}{n! (1-\nu)_n} \left(\frac{z'}{2} \right)^n (z^2-1)^{-n} C_{\alpha+n}^{\nu-n}(z), \quad |z'| < |1-z|, \end{aligned} \quad (3.136)$$

$$P_k^{(\alpha, \beta)}(z+z') = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(k+\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(k+\alpha+\beta+1)} \left(\frac{z'}{2} \right)^n P_k^{(\alpha+n, \beta-n)}(z), \quad (3.137)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z-1}\right)^{\alpha} P_k^{(\alpha, \beta)}(z+z') = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha-n+1)} \left(\frac{z'}{z-1} \right)^n P_k^{(\alpha-n, \beta+n)}(z), \quad (3.138)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z+1}\right)^{\beta} P_k^{(\alpha, \beta)}(z+z') = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(k+\beta)}{\Gamma(k+\beta-n)} \left(\frac{z'}{1+z} \right)^n P_k^{(\alpha+n, \beta-n)}(z), \quad (3.139)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{z'}{z-1}\right)^{\alpha} \left(\frac{\lambda z+1}{z+1} \right)^{\beta} P_k^{(\alpha, \beta)}(z+z') \\ &= \sum_{n=0}^k \frac{(k+n)!}{k! n!} (2z')^n (z^2-1)^{-n} P_{k+n}^{(\alpha-n, \beta-n)}(z), \end{aligned} \quad (3.140)$$

$$F(\alpha; \gamma; z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} (z')^n F(\alpha+n; \gamma+n; z), \quad (3.141)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{\gamma-1} F(\alpha; \gamma; z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-\gamma)_n}{n!} \left(\frac{z'}{z} \right)^n F(\alpha; \gamma-n; z), \quad (3.142)$$

$$e^{-z'} F(\alpha; \gamma; z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\gamma-\alpha)_n}{(\gamma)_n} (z')^n F(\alpha; \gamma+n; z), \quad (3.143)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{\gamma-1} e^{-z'} F(\alpha; \gamma; z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-\gamma)_n}{n!} \left(\frac{z'}{z} \right)^n F(\alpha-n; \gamma-n; z), \quad (3.144)$$

$$U(\alpha; \gamma; z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\alpha)_n}{n!} (z')^n U(\alpha+n; \gamma+n; z), \quad (3.145)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{\gamma-1} U(\alpha; \gamma; z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\alpha-\gamma+1)_n}{n!} (z')^n U(\alpha; \gamma-n; z), \quad (3.146)$$

$$e^{-z'} U(\alpha; \gamma; z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (z')^n U(\alpha; \gamma+n; z), \quad (3.147)$$

$$L_{\nu}^{(\alpha)}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (z')^n L_{\nu-n}^{(\alpha+n)}(z), \quad (3.148)$$

$$e^{-z'} L_{\nu}^{(\alpha)}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (z')^n L_{\nu}^{(\alpha+n)}(z), \quad (3.149)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{\alpha} L_{\nu}^{(\alpha)}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+\alpha-n+1)} \left(\frac{z'}{z}\right)^n L_{\nu-n}^{(\alpha-n)}(z), \quad (3.150)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{\alpha} e^{-z'} L_{\nu}^{(\alpha)}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z'}{z}\right)^n L_{\nu+n}^{(\alpha-n)}(z), \quad (3.151)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{-a} \gamma(a, z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z'}{z}\right)^n \gamma(a+n, z), \quad (3.152)$$

$$e^{z+z'} \gamma(a, z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-a)_n}{n!} e^z (z')^n \gamma(a-n, z). \quad (3.153)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{-a} \Gamma(a, z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z'}{z}\right)^n \Gamma(a+n, z), \quad (3.154)$$

$$e^{z+z'} \Gamma(a, z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-a)_n}{n!} e^z (z')^n \Gamma(a-n, z), \quad (3.155)$$

$$e^{(z+z')^2/4} D_{\nu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-\nu)_n}{n!} e^{z^2/4} (z')^n D_{\nu-n}(z), \quad (3.156)$$

$$e^{-(z+z')^2/4} D_{\nu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e^{-z^2/4} (z')^n D_{\nu+n}(z), \quad (3.157)$$

$$H_{\nu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-\nu)_n}{n!} (2z')^n H_{\nu-n}(z), \quad (3.158)$$

$$H_{\nu}(z+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (z')^n H_{\nu-n}(z), \quad (3.159)$$

$$E_1(z+z) \equiv -\text{Ei}(-z-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} e^{-z} (z')^n U(1; n+1; z), \quad (3.160)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{-\mu-1/2} e^{z'/2} M_{k,\mu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\mu-k+1/2)_n}{(2\mu+1)_n} \frac{(z')^n}{z^{n/2}} M_{k-n/2, \mu+n/2}(z), \quad (3.161)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{\mu-1/2} e^{z'/2} M_{k,\mu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-2\mu)_n}{n!} \frac{(z')^n}{z^{n/2}} M_{k-n/2, \mu-n/2}(z), \quad (3.162)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{\mu-1/2} e^{-z'/2} M_{k,\mu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-2\mu)_n}{n!} \frac{(z')^n}{z^{n/2}} M_{k+n/2, \mu-n/2}(z), \quad (3.163)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{-\mu-1/2} e^{-z'/2} M_{k,\mu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\mu+k+1/2)_n}{n! (2\mu+1)_n} \frac{(z')^n}{z^{n/2}} M_{k+n/2,\mu+n/2}(z), \quad (3.164)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{\mu-1/2} e^{z'/2} W_{k,\mu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-\mu-k+1/2)_n}{n!} \frac{(z')^n}{z^{n/2}} W_{k-n/2,\mu-n/2}(z), \quad (3.165)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{-\mu-1/2} e^{z'/2} W_{k,\mu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\mu-k+1/2)_n}{n!} \frac{(z')^n}{z^{n/2}} W_{k-n/2,\mu+n/2}(z), \quad (3.166)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{\mu-1/2} e^{-z'/2} W_{k,\mu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(z')^n}{z^{n/2}} W_{k+n/2,\mu-n/2}(z), \quad (3.167)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{-\mu-1/2} e^{-z'/2} W_{k,\mu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(z')^n}{z^{n/2}} W_{k+n/2,\mu+n/2}(z). \quad (3.168)$$

以上的 (3.161) – (3.168) 诸式可见文献: W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni. *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1966: 306 – 308.

同样, 对于 Bessel 函数及虚宗量 Bessel 函数, 也能得到^①

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{\nu} J_{\nu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(2 + \frac{z'}{z}\right)^n \left(\frac{z'}{2}\right)^n J_{\nu-n}(z), \quad (3.169)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{-\nu} J_{\nu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(2 + \frac{z'}{z}\right)^n \left(\frac{z'}{2}\right)^n J_{\nu+n}(z), \quad (3.170)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{\nu} N_{\nu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(2 + \frac{z'}{z}\right)^n \left(\frac{z'}{2}\right)^n N_{\nu-n}(z), \quad (3.171)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{-\nu} N_{\nu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(2 + \frac{z'}{z}\right)^n \left(\frac{z'}{2}\right)^n N_{\nu+n}(z), \quad (3.172)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{\nu} I_{\nu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(2 + \frac{z'}{z}\right)^n \left(\frac{z'}{2}\right)^n I_{\nu-n}(z), \quad (3.173)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{-\nu} I_{\nu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(2 + \frac{z'}{z}\right)^n \left(\frac{z'}{2}\right)^n I_{\nu+n}(z), \quad (3.174)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{\nu} K_{\nu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(2 + \frac{z'}{z}\right)^n \left(\frac{z'}{2}\right)^n K_{\nu-n}(z), \quad (3.175)$$

① 这相当于在 (3.114) – (3.121) 式中代入 $\lambda = 1 + z'/z$.

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{-\nu} K_{\nu}(z+z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(2 + \frac{z'}{z}\right)^n \left(\frac{z'}{2}\right)^n K_{\nu+n}(z). \quad (3.176)$$

若直接在 (3.105a) 和 (3.105b) 两式中代入 $\zeta = z + z'$, 则有^①

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{\nu/2} J_{\nu}(\sqrt{z+z'}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z'}{2}\right)^n z^{-n/2} J_{\nu-n}(\sqrt{z}), \quad (3.177)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{-\nu/2} J_{\nu}(\sqrt{z+z'}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z'}{2}\right)^n z^{-n/2} J_{\nu+n}(\sqrt{z}). \quad (3.178)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{\nu/2} N_{\nu}(\sqrt{z+z'}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z'}{2}\right)^n z^{-n/2} N_{\nu-n}(\sqrt{z}), \quad (3.179)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{-\nu/2} N_{\nu}(\sqrt{z+z'}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z'}{2}\right)^n z^{-n/2} N_{\nu+n}(\sqrt{z}), \quad (3.180)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{\nu/2} I_{\nu}(\sqrt{z+z'}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z'}{2}\right)^n z^{-n/2} I_{\nu-n}(\sqrt{z}), \quad (3.181)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{-\nu/2} I_{\nu}(\sqrt{z+z'}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z'}{2}\right)^n z^{-n/2} I_{\nu+n}(\sqrt{z}), \quad (3.182)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{\nu/2} K_{\nu}(\sqrt{z+z'}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z'}{2}\right)^n z^{-n/2} K_{\nu-n}(\sqrt{z}), \quad (3.183)$$

$$\left(1 + \frac{z'}{z}\right)^{-\nu/2} K_{\nu}(\sqrt{z+z'}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z'}{2}\right)^n z^{-n/2} K_{\nu+n}(\sqrt{z}). \quad (3.184)$$

同样, (3.175) 式与 (3.176) 式, 以及 (3.183) 式与 (3.184) 式均可以互化.

还可以设想, 如果将 (3.54) 式中的 λz 作其他代换, 例如, $\lambda z = z^2$, 又将得到许多新的特殊函数公式. 此处恕不一一列举了.

^① (3.177) – (3.180) 诸式 (称为 Neumann 型级数) 可参见文献: W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni. *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1966: 129. 或参见文献: A. Erdélyi et al. *Higher Transcendental Functions*. Vol. II. New York: McGraw-Hill, 1953: 100.

第四章 常微分方程的幂级数解法

§4.1 二阶线性常微分方程按奇点分类

关于常微分方程常点与奇点的定义, 以及方程在常点或 (正则) 奇点邻域内的求解问题, 在数学物理方法的相关教材中均有讲述, 这里不再重复. 笔者认为, 在求解常微分方程时, 重要的是需要先判断方程有无奇点, 有几个正则奇点, 几个非正则奇点, 无穷远点是不是奇点, 是正则奇点还是非正则奇点, 包括方程在每个正则奇点处的指标. 这样做的好处是, 使得我们对于所要求解的方程, 有一个全局性的了解, 也便于我们将方程尽可能地变换为相关的标准形式, 甚至直接写出解式.

按照正则奇点和非正则奇点的数目, 常见的典型方程见表 4.1.

表 4.1 典型的二阶线性常微分方程

正则奇点数	非正则奇点数	方 程
4	0	Lamé 方程
3	0	超几何方程 Legendre 方程 连带 Legendre 方程
2	1	Mathieu 方程
1	1	合流超几何方程 Bessel 方程 Weber 方程
0	1	Stokes 方程


例 4.1 全部奇点均为正则奇点的方程称为 Fuchs 型方程. 在 (扩充的) 全平面上有两个正则奇点 a, b 的 Fuchs 型方程的普遍形式是

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1+\alpha+\alpha'}{z-b} \right) \frac{du}{dz} + \frac{\alpha-\alpha'(a-b)^2}{(z-a)^2(z-b)^2} = 0. \quad (4.1)$$

此方程在 $z = a$ 点的指标为 α 与 α' , 在 $z = b$ 点的指标为 $-\alpha$ 与 $-\alpha'$. 按照常微分方程幂级数解法的标准步骤, 可以求得方程 (4.1) 的通解为初等函数

$$u = A \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^\alpha + B \left(\frac{z-a}{z-b} \right)^{\alpha'}, \quad (4.2)$$

其中 A 和 B 为任意常数.

 **讨论** 读者可能注意到, 这个方程的四个指标之和为 0. 这不是一个偶然的现象. 事实上, 可以证明^①, 对于有 n 个奇点的 Fuchs 型方程, 有

$$\text{全部指标之和} = n - 2.$$

例 4.2 具有三个奇点的 Fuchs 型方程的原型是

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]\frac{dw}{dz} - \alpha\beta w = 0, \quad (4.3)$$

称为超几何方程, 奇点为 $z = 0, 1, \infty$, 相应的指标为 $(0, 1-\gamma), (0, \gamma-\alpha-\beta), (\alpha, \beta)$. 当 γ 不为整数时, 方程 (4.3) 的线性无关解为超几何函数

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n} z^n, \quad |z| < 1 \quad (4.4a)$$

与 $z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1; 2-\gamma; z)$. 当 γ 是整数时, 原则上有一解应含对数函数. 特别是, 若 $\gamma = 1$, 则方程 (4.3) 的第一解为 $F(\alpha, \beta; 1; z)$, 而第二解则为

$$F(\alpha, \beta; 1; z) \ln z + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!n!} \times [\psi(\alpha+n) + \psi(\beta+n) - \psi(\alpha) - \psi(\beta) - 2\psi(n+1) - 2\psi(1)] z^n \right\}. \quad (4.4b)$$

例 4.3 Legendre 方程

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \nu(\nu+1)y(x) = 0 \quad (4.5)$$

是超几何方程的特例, 它的奇点为 $x = \pm 1$ 与 $x = \infty$. 作变换 $z = (1-x)/2$, $y(x) = w(z)$, 则方程变为

$$\frac{d}{dz} \left[z(1-z) \frac{dw}{dz} \right] + \nu(\nu+1)w(z) = 0. \quad (4.6)$$

奇点与超几何方程完全相同, 而且, 对照方程 (4.3), 若

$$\gamma - (\alpha + \beta + 1)z = 1 - 2z, \quad \alpha\beta = -\nu(\nu+1),$$

则可定出

$$\alpha = -\nu, \quad \beta = \nu+1, \quad \gamma = 1.$$

^① 参见文献: 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论. 北京: 北京大学出版社, 2000: 63. 注意此处的表述形式与该书不同, 差异在于是否将 ∞ 点 (如果也是奇点的话) 计算在内.

换言之, 方程 (4.5) 的第一解即为 $F\left(-\nu, \nu+1; 1; \frac{1-x}{2}\right)$, 而第二解则如 (4.4b) 式.

类似地, 还有连带 Legendre 方程

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2} \right] y(x) = 0, \quad (4.7)$$

它同样是具有三个奇点的 Fuchs 型方程. 但是我们发现它无法通过直接对比的办法化为超几何方程, 原因是需要用到因变量的变换.

§4.2 二阶线性常微分方程的不变式

为了找到适当的因变量变换, 实现两个常微分方程之间的互化, 最好的办法是将它们共同化为另一个特殊形式的微分方程, 即使得二阶微分方程中一阶导数项的系数为 0.

设有二阶常微分方程

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + p(x) \frac{dw}{dx} + q(x)w(x) = 0. \quad (4.8)$$

作变换 $w(x) = f(x) \mathscr{W}(x)$, 则

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= f'(x) \mathscr{W}(x) + f(x) \mathscr{W}'(x), \\ \frac{d^2 w}{dx^2} &= f''(x) \mathscr{W}(x) + 2f'(x) \mathscr{W}'(x) + f(x) \mathscr{W}''(x). \end{aligned}$$

于是, 方程 (4.8) 就化为

$$\begin{aligned} f(x) \mathscr{W}''(x) + [2f'(x) + p(x)f(x)] \mathscr{W}'(x) \\ + [f''(x) + p(x)f'(x) + q(x)f(x)] \mathscr{W}(x) = 0. \end{aligned}$$

因此, 只需取

$$2f'(x) + p(x)f(x) = 0, \quad \text{即} \quad f(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int^x p(\xi) d\xi \right\}, \quad (4.9)$$

则方程 (4.8) 就变成

$$\mathscr{W}''(x) + C(x) \mathscr{W}(x) = 0, \quad (4.10a)$$

其中

$$\begin{aligned} C(x) &= q(x) + p(x) \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{f''(x)}{f(x)} \\ &= q(x) - \frac{1}{2} p'(x) - \frac{1}{4} p^2(x) \end{aligned} \quad (4.10b)$$

称为方程 (4.8) 的不变式.

如果两个常微分方程

$$\begin{aligned}\frac{d^2 w_1}{dx^2} + p_1(x) \frac{dw_1}{dx} + q_1(x) w_1(x) &= 0, \\ \frac{d^2 w_2}{dx^2} + p_2(x) \frac{dw_2}{dx} + q_2(x) w_2(x) &= 0\end{aligned}$$

有相同的不变式, 则此二方程一定可以通过因变量变换

$$w_1(x) \exp \left\{ \frac{1}{2} \int^x p_1(\xi) d\xi \right\} = w_2(x) \exp \left\{ \frac{1}{2} \int^x p_2(\xi) d\xi \right\} \quad (4.11)$$

互化.

例 4.4 求连带 Legendre 方程 (4.7) 在 $x=1$ 点邻域内的解.

解 同例 4.3, 首先作变换 $z = (1-x)/2$. $y(x) = u(z)$, 将方程变为

$$\frac{d}{dz} \left[z(1-z) \frac{dw}{dz} \right] + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{4z(1-z)} \right] w(z) = 0. \quad (4.12)$$

其系数为

$$\begin{aligned}p(z) &= \frac{1-2z}{z(1-z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{1-z}, \\ q(z) &= \frac{\nu(\nu+1)}{z(1-z)} - \frac{\mu^2}{4z^2(1-z)^2} \\ &= \frac{1}{z} \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{2} \right] + \frac{1}{1-z} \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{2} \right] - \frac{\mu^2}{4} \frac{1}{z^2} - \frac{\mu^2}{4} \frac{1}{(1-z)^2}.\end{aligned}$$

由此可以写出连带 Legendre 方程 (4.12) 的不变式

$$\begin{aligned}C(z) &= \frac{1}{z} \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{2} \right] + \frac{1}{1-z} \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{2} \right] - \frac{\mu^2}{4} \frac{1}{z^2} - \frac{\mu^2}{4} \frac{1}{(1-z)^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(1-z)^2} \right] - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{2}{z} - \frac{2}{1-z} \right] \\ &= \frac{1}{z} \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2-1}{2} \right] + \frac{1}{1-z} \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2-1}{2} \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{\mu^2}{z^2} + \frac{1-\mu^2}{4} \frac{1}{(1-z)^2}.\end{aligned}$$

另一方面, 超几何方程

$$z(1-z) \frac{d^2 \mathscr{W}}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z] \frac{d \mathscr{W}}{dz} - \alpha \beta \mathscr{W}(z) = 0$$

的不变式为

$$C(z) = \frac{1}{z} \left\{ -\alpha\beta - \frac{\gamma}{2} [\gamma - (\alpha + \beta + 1)] \right\} + \frac{1}{1-z} \left\{ -\alpha\beta - \frac{\gamma}{2} [\gamma - (\alpha + \beta + 1)] \right\} \\ + \frac{\gamma(2-\gamma)}{4} \frac{1}{z^2} - \frac{(\gamma - \alpha - \beta)^2 - 1}{4} \frac{1}{(1-z)^2}.$$

两相对照, 可以发现, 当

$$\alpha = -\nu, \quad \beta = \nu + 1, \quad \gamma = 1 + \mu$$

时, 两个方程具有相同的不变式. 此时联系二方程的因变量变换是

$$w(z) \exp \left\{ \frac{1}{2} \int^z \left[\frac{\gamma}{\zeta} + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)}{1 - \zeta} \right] d\zeta \right\} = \mathscr{W}(z) \exp \left\{ \frac{1}{2} \int^z \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{1 - \zeta} \right) d\zeta \right\}.$$

代入刚刚定出的 α, β, γ 值, 就得到

$$w(z) = \left(\frac{z}{1-z} \right)^{\mu/2} \mathscr{W}(z).$$

再回到原来的连带 Legendre 方程 (4.7), 就是

$$y(x) = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\mu/2} \mathscr{W} \left(\frac{1-x}{2} \right). \quad (4.13)$$

因此, 当 μ 不为整数时, 连带 Legendre 方程 (4.7) 的两个线性无关解即为

$$y_1(x) = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\mu/2} F \left(-\nu, 1+\nu; 1+\mu; \frac{1-x}{2} \right), \quad (4.14a)$$

$$y_2(x) = (1-x^2)^{-\mu/2} F \left(-\nu-\mu, \nu-\mu+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2} \right). \quad (4.14b)$$

当 μ 为整数时, 也可以利用超几何方程的相关结果, 写出连带 Legendre 方程 (4.7) 的两个线性无关解. 读者可以找到这两个解式和我们熟悉的 $P_\nu^\mu(x)$, $Q_\nu^\mu(x)$ 之间的关系, 只是要注意有关辐角的规定, 并且还要区分 x 是实数或复数.

例 4.5 合流超几何方程

$$z \frac{d^2 \mathscr{W}}{dz^2} + (\gamma - z) \frac{d \mathscr{W}}{dz} - \alpha \mathscr{W}(z) = 0 \quad (4.15)$$

是另一类方程的代表, 它们的共同特点是都有两个奇点, 并且一个是正则奇点 ($z = 0$), 另一个是非正则奇点 ($z = \infty$). 用常微分方程的幂级数解法, 可以求出它的两个线性无关解. 当 γ 不为整数时, 它们是

$$\mathscr{W}_1(z) = F(\alpha; \gamma; z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} z^n, \quad (4.16a)$$

$$\mathscr{W}_2(z) = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1; 2 - \gamma; z). \quad (4.16b)$$

$F(\alpha; \gamma; z)$ 称为合流超几何函数.

Bessel 方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y(x) = 0 \quad (4.17)$$

也具有相同的奇点分布. 试将 Bessel 方程的解用合流超几何函数表示出来.

解 先分别写出这两个方程的不变式:

$$\text{合流超几何方程:} \quad C(z) = -\frac{1}{4} + \frac{\gamma - 2\alpha}{2} \frac{1}{z} - \frac{\gamma(\gamma - 2)}{4} \frac{1}{z^2}, \quad (4.18a)$$

$$\text{Bessel 方程:} \quad C(x) = 1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4} \frac{1}{x^2}. \quad (4.18b)$$

两者有相似的结构, 但又有数值上的差异. 这个差异, 我们可以归之于 Bessel 方程中的 $q(x)$ 项. 因此需要先对 Bessel 方程作自变量变换: $z = \lambda x$, $y(x) = w(z)$, 从而将方程化为

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{\nu^2}{z^2}\right) w(z) = 0. \quad (4.17')$$

它的不变式是

$$C(z) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1 - 4\nu^2}{4} \frac{1}{z^2}. \quad (4.18c)$$

因此, 如果取

$$\frac{1}{\lambda^2} = -\frac{1}{4}, \quad \gamma - 2\alpha = 0, \quad \gamma(\gamma - 2) = 4\nu^2 - 1,$$

亦即

$$\lambda = 2i, \quad \gamma = 2\nu + 1, \quad \alpha = \nu + 1/2,$$

则方程 (4.15) 与方程 (4.17') 有相同的不变式. 此二方程之间的变换关系是

$$w(z) \exp\left\{\frac{1}{2} \int^z \frac{d\zeta}{\zeta}\right\} = \mathscr{W}(z) \exp\left\{\frac{1}{2} \int^z \left(\frac{\gamma}{\zeta} - 1\right) d\zeta\right\},$$

亦即

$$w(z) = e^{-z/2} z^{(\gamma-1)/2} \mathscr{W}(z) = e^{-z/2} z^\nu \mathscr{W}(z),$$

因此, 方程 (4.17') 在 2ν 不为整数时的线性无关解为

$$w_1(z) = e^{-z/2} z^\nu F(\nu + 1/2; 2\nu + 1; z),$$

$$w_2(z) = e^{-z/2} z^{-\nu} F(-\nu + 1/2; -2\nu + 1; z).$$

再回到 Bessel 方程 (4.17), 它的线性无关解就是

$$y_1(x) = e^{-ix} x^\nu F(\nu + 1/2; 2\nu + 1; 2ix), \quad (4.19a)$$

$$y_2(x) = e^{-ix} x^{-\nu} F(-\nu + 1/2; -2\nu + 1; 2ix). \quad (4.19b)$$

事实上, 它们就是 $J_{\pm\nu}(x)$ (差常数倍).

例 4.6 求解常微分方程本征值问题

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[\frac{2\mu E}{\hbar^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0, \quad (4.20a)$$

$$R(0) \text{ 有界, } \int_0^\infty |R(r)|^2 r^2 dr \text{ 收敛}. \quad (4.20b)$$

解 此问题来自量子力学中的氢原子问题, 其中 E 为待求的本征值, μ 是电子与氢核 (质子) 的折合质量, e 为电子电荷, \hbar 是 Planck 常数, ϵ_0 是真空电容率, $l = 0, 1, 2, \dots$. 在量子力学教材中, 都会介绍到此问题的解法, 多从波函数的渐近行为考虑, 逐次变换而求解. 但从微分方程的不变式来看, 有关的变换却是自然之举.

容易判断, 方程 (4.20a) 有两个奇点: $r = 0$ (正则奇点) 与 $r = \infty$ (非正则奇点), 与合流超几何方程相同. 因此我们可以将方程 (4.20a) 化为合流超几何方程, 从而写出它的解. 为此, 只需要写出方程 (4.20a) 的不变式

$$C(r) = q(r) - \frac{1}{2} p'(r) - \frac{1}{4} p^2(r) = \frac{2\mu E}{\hbar^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}.$$

现在似乎已经可以与合流超几何方程的不变式 (4.18a) 比较, 从而令 $2\mu E/\hbar^2 = -1/4$, 但这样做的结果, 将导致 E 取唯一确定值 $E = -\hbar^2/(8\mu)$, 而相应的函数 $R(r)$ 并不满足平方可积的要求. 正确的做法是引进自变量变换 $z = \kappa r$, 将方程变为

$$\frac{d^2 R}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dR}{dz} + \left[\frac{2\mu E}{\hbar^2 \kappa^2} + \frac{2}{\kappa a_0} \frac{1}{z} - \frac{l(l+1)}{z^2} \right] R = 0,$$

其中

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{\mu e^2} = 0.529 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

就是 Bohr 半径. 相应地, 不变式则变为

$$C(z) = \frac{2\mu E}{\hbar^2 \kappa^2} + \frac{k}{z} - \frac{l(l+1)}{z^2}, \quad \text{其中 } k = \frac{2}{\kappa a_0}.$$

现在就可以令

$$\frac{2\mu E}{\hbar^2 \kappa^2} = -\frac{1}{4}, \quad \text{即} \quad \kappa = \frac{2}{ka_0} = \sqrt{-\frac{8\mu E}{\hbar^2}}, \quad (4.21a)$$

$$l(l+1) = \frac{\gamma(\gamma-2)}{4}, \quad \text{即} \quad \gamma = 2l+2, \quad (4.21b)$$

$$k = \frac{\gamma-2\alpha}{2}, \quad \text{即} \quad \alpha = l-k+1, \quad (4.21c)$$

则方程 (4.20a) 即化为合流超几何方程 (4.15). 此时联系二方程之间的变换为

$$R(r) \exp \left\{ \int^{\kappa r} \frac{d\zeta}{\zeta} \right\} = \mathcal{H}(\kappa r) \exp \left\{ \frac{1}{2} \int^{\kappa r} \left(\frac{\gamma}{\zeta} - 1 \right) d\zeta \right\},$$

亦即

$$R(r) = e^{-\kappa r} r^l \mathcal{H}(\kappa r).$$

于是, 满足方程 (4.20a) 并且 $R(0)$ 有界的解就是

$$R(r) = N e^{-\kappa r/2} r^l F(l-k+1; 2l+2; \kappa r), \quad (4.22)$$

其中 N 为 (归一化) 常数. 由 $F(\alpha; \gamma; z)$ 的渐近展开^[1] 可知, 当 $r \rightarrow \infty$ 时,

$$R(r) \sim N' e^{\alpha r/2} r^{-k-1} \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l-k+1)},$$

因此, 作为无穷级数, $R(r)$ 指数地趋于 ∞ , 因而不可能满足平方可积的要求, 除非

$$l-k+1 = -n_r, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.23a)$$

即

$$k = n_r + l + 1 = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad l = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4.23b)$$

从而使解 (4.22) 截断为多项式

$$R_{nl}(r) = N_{nl} e^{-r/(na_0)} r^l F\left(-n+l+1; 2l+2; \frac{2r}{na_0}\right). \quad (4.24)$$

相应地, 将 (4.23) 式代入 (4.21a) 式, 即得氢原子的能量本征值

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2\mu a_0^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \frac{1}{n^2} = -\frac{\mu e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.25a)$$

其中

$$\frac{\mu e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = 13.605\,692\,3(12) \text{ eV} \quad (4.25b)$$

是氢原子的电离能.

更进一步的讨论, 包括归一化常数的计算以及结果的物理分析, 本书从略.

^[1] 例如, 参见文献: 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论. 北京: 北京大学出版社, 2000: 306.

§4.3 由解反求常微分方程

二阶线性齐次常微分方程的标准形式是

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0. \quad (4.26)$$

所谓求解此方程,即要求求得函数 $w(z)$,使方程 (4.26) 成为恒等式.而且,如果已经知道了方程 (4.26) 的一个解 $w_1(z)$,我们也能通过积分的办法求出 (与之线性无关的) 第二解:

$$w_2(z) = Aw_1(z) \int^z \frac{1}{[w_1(z)]^2} \exp \left\{ - \int^z p(\zeta) d\zeta \right\} dz.$$

反之,如果已知两个函数 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$,也能求出它们所满足的微分方程,即方程 (4.26) 中的系数 $p(z)$ 与 $q(z)$. 这是因为,函数 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 作为方程 (4.26) 的解,一定满足

$$w_1'' + p(z)w_1' + q(z)w_1 = 0, \quad (4.27a)$$

$$w_2'' + p(z)w_2' + q(z)w_2 = 0. \quad (4.27b)$$

这可以看成关于 $p(z)$ 和 $q(z)$ 的代数方程组:

$$p(z)w_1' + q(z)w_1 = -w_1'', \quad (4.27a')$$

$$p(z)w_2' + q(z)w_2 = -w_2'', \quad (4.27b')$$

只要 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 线性无关,即 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 之间的 Wronski 行列式

$$W[w_1(z), w_2(z)] \equiv \begin{vmatrix} w_1(z) & w_2(z) \\ w_1'(z) & w_2'(z) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (4.28a)$$

就一定可以求得

$$p(z) = -\frac{W'[w_1(z), w_2(z)]}{W[w_1(z), w_2(z)]}, \quad (4.29a)$$

$$q(z) = \frac{W[w_1'(z), w_2'(z)]}{W[w_1(z), w_2(z)]}, \quad (4.29b)$$

其中

$$W'[w_1(z), w_2(z)] = \frac{d}{dz} W[w_1(z), w_2(z)] \equiv \begin{vmatrix} w_1(z) & w_1'(z) \\ w_2(z) & w_2'(z) \end{vmatrix}. \quad (4.29b')$$

§4.4 解析函数的幂级数展开

有时我们难以直接求得函数的幂级数展开,但是,可以转化为常微分方程的求解问题.

例 4.7 求函数 $f(z) = \left(\frac{\sqrt{1+4z}+1}{2}\right)^\nu$ 在 $z=0$ 点的 Taylor 展开, 规定 $f(0)=1$.

解 为了方便,我们再引进另一个函数 $g(z) = \left(\frac{\sqrt{1+4z}-1}{2}\right)^\nu$, 并规定 $g(0)=0$. 容易求得

$$f'(z) = \nu \left(\frac{\sqrt{1+4z}+1}{2}\right)^{\nu-1} (1+4z)^{-1/2},$$

$$f''(z) = -2\nu \left(\frac{\sqrt{1+4z}+1}{2}\right)^{\nu-1} (1+4z)^{-3/2} + \nu(\nu-1) \left(\frac{\sqrt{1+4z}+1}{2}\right)^{\nu-2} (1+4z)^{-1},$$

$$g'(z) = \nu \left(\frac{\sqrt{1+4z}-1}{2}\right)^{\nu-1} (1+4z)^{-1/2},$$

$$g''(z) = -2\nu \left(\frac{\sqrt{1+4z}-1}{2}\right)^{\nu-1} (1+4z)^{-3/2} + \nu(\nu-1) \left(\frac{\sqrt{1+4z}-1}{2}\right)^{\nu-2} (1+4z)^{-1},$$

因此

$$W[f(z), g(z)] \equiv \begin{vmatrix} f(z) & g(z) \\ f'(z) & g'(z) \end{vmatrix} = \frac{\nu}{\sqrt{1+4z}} z^{\nu-1}.$$

$$W'[f(z), g(z)] \equiv \begin{vmatrix} f(z) & g(z) \\ f''(z) & g''(z) \end{vmatrix} = -2\nu z^{\nu-1} (1+4z)^{-3/2} + \nu(\nu-1) z^{\nu-2} (1+4z)^{-1/2},$$

$$W[f'(z), g'(z)] \equiv \begin{vmatrix} f'(z) & g'(z) \\ f''(z) & g''(z) \end{vmatrix} = \nu^2(\nu-1) z^{\nu-2} (1+4z)^{-3/2}.$$

根据 §4.3 中的讨论, 我们可以求出 $f(z)$ 与 $g(z)$ 满足的常微分方程

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

的系数

$$p(z) = -\frac{W'[f(z), g(z)]}{W[f(z), g(z)]} = \frac{2}{1+4z} - \frac{\nu-1}{z},$$

$$q(z) = \frac{W[f'(z), g'(z)]}{W[f(z), g(z)]} = \frac{\nu(\nu-1)}{z(1+4z)},$$

换言之, $f(z)$ 与 $g(z)$ 是常微分方程

$$z(1+4z)w'' + [(6-4\nu)z - (\nu-1)]w' + \nu(\nu-1)w = 0 \quad (4.30)$$

的线性无关解. 方程 (4.30) 在有限远处有两个正则奇点: $z=0$ 与 $z=-1/4$. 于是, 在环域 $0 < |z| < 1/4$ 内, 方程有正则解

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+\rho}.$$

代入方程, 有

$$\begin{aligned} & z(1+4z) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\rho)(n+\rho-1) z^{n+\rho-2} \\ & + [(6-4\nu)z - (\nu-1)] \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\rho) z^{n+\rho-1} + \nu(\nu-1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+\rho} = 0, \end{aligned}$$

化简即得

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\rho)(n+\rho-\nu) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (2n+2\rho-\nu)(2n+2\rho-\nu+1) z^{n+1} = 0.$$

比较系数, 由最低次幂 z^0 项得指标方程

$$\rho(\rho-\nu) = 0,$$

因此求得指标

$$\rho = 0, \nu.$$

再比较 z^n 项的系数, 可得递推关系

$$c_n (n+\rho)(n+\rho-\nu) + c_{n-1} (2n+2\rho-\nu-2)(2n+2\rho-\nu-1) = 0,$$

即

$$\begin{aligned} c_n &= -\frac{(2n+2\rho-\nu-2)(2n+2\rho-\nu-1)}{(n+\rho)(n+\rho-\nu)} c_{n-1} \\ &= \frac{(\nu+2-2n-2\rho)(\nu+1-2n-2\rho)}{(n+\rho)(\nu-n-\rho)} c_{n-1}. \end{aligned}$$

反复利用递推关系, 就可以得到系数

$$\begin{aligned} c_n &= (-1)^n \frac{\Gamma(2n+2\rho-\nu)}{\Gamma(2\rho-\nu)} \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(n+\rho+1)} \frac{\Gamma(\rho-\nu+1)}{\Gamma(n+\rho-\nu+1)} c_0 \\ &= \frac{\Gamma(\nu-2\rho+1)}{\Gamma(\nu-2\rho-2n+1)} \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(n+\rho+1)} \frac{\Gamma(\nu-n-\rho)}{\Gamma(\nu-\rho)} c_0. \end{aligned}$$

方程的解即为

$$w(z) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(2n+2\rho-\nu)}{\Gamma(2\rho-\nu)} \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(n+\rho+1)} \frac{\Gamma(\rho-\nu+1)}{\Gamma(n+\rho-\nu+1)} z^{n+\rho} \quad (4.31a)$$

$$= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu-2\rho+1)}{\Gamma(\nu-2\rho-2n+1)} \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(n+\rho+1)} \frac{\Gamma(\nu-n-\rho)}{\Gamma(\nu-\rho)} z^{n+\rho}. \quad (4.31b)$$

对于 $f(x)$, 因为已经规定 $f(0) = 1$, 所以一定是对应于 $\rho = 0$ 的解, 且 $c_0 = 1$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{1+4z}+1}{2} \right)^{\nu} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(2n-\nu)}{\Gamma(-\nu)} \frac{\Gamma(-\nu+1)}{\Gamma(n-\nu+1)} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \frac{\nu \Gamma(2n-\nu)}{\Gamma(n-\nu+1)} z^n \end{aligned} \quad (4.32a)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-2n+1)} \frac{\Gamma(\nu-n)}{\Gamma(\nu)} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\nu \Gamma(\nu-n)}{\Gamma(\nu-2n+1)} z^n. \end{aligned} \quad (4.32b)$$

而 $\rho = \nu$ 的解则对应于 $g(z)$, 即

$$\left(\frac{\sqrt{1+4z}-1}{2} \right)^{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(2n+\nu)}{\Gamma(\nu)} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(n+\nu+1)} z^{n+\nu} \quad (4.33a)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\nu \Gamma(2n+\nu)}{\Gamma(n+\nu+1)} z^{n+\nu}, \quad (4.33b)$$

或者记为

$$\left(\frac{\sqrt{1+4z}+1}{2} \right)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\nu \Gamma(2n+\nu)}{\Gamma(n+\nu+1)} z^n. \quad (4.33c)$$

因为

$$\left(\frac{\sqrt{1+4z}-1}{2z} \right)^{\nu} = \left(\frac{\sqrt{1+4z}+1}{2} \right)^{-\nu},$$

所以将 (4.32a) 式中的 ν 换成 $-\nu$, 就能得到 (4.33c) 式.

评述

1. 简言之, 本题的做法是将函数的幂级数展开问题 (Taylor 展开或 Laurent 展开) 转化为求常微分方程的幂级数解. 问题的关键在于寻找 $f(x)$ 的“共轭”函数 $g(z)$, 使得此二函数满足的常微分方程形式简单, 便于求解. 可以理解, 在通常情况下, 如果选取的函数 $g(z)$, 其数学结构与 $f(z)$ 相似, 得到的常微分方程就可

能比较简单. 在一般情况下, 我们倒不必指望、也不应当要求采用特别简单的 $g(z)$ (例如为常数或幂函数).

2. 换一个角度讨论 $g(z)$ 的选取问题. 在本题中, $f(z)$ 是多值函数, 准确地说, 是多值函数 $[(\sqrt{1+4z}+1)/2]^\nu$ 的一个单值分枝, 即规定 $\sqrt{1+4z}|_{z=0} = 1$. 这样, 如果我们希望方程的系数为单值函数的话, 则多值函数 $[(\sqrt{1+4z}-1)/2]^\nu$ 的另一个单值分枝 (即规定 $\sqrt{1+4z}|_{z=0} = -1$) 也必然是方程的解^①. 这也正是本题中所取的 $g(z)$.

3. 正因为我们不是直接作函数的幂级数展开, 而是转化为求解常微分方程的问题, 所以, 在解题之初, 我们并没有对函数作奇点分析. 一旦列出常微分方程后, 函数奇点的可能位置也就完全确定了.

4. 容易判断, $z = \infty$ 也是方程 (4.30) 的正则奇点, 因此, 可以预料, 通过变换 $\zeta = -4z, w(z) = \mathscr{W}(\zeta)$, 方程 (4.30) 的正则奇点 $z = 0, -1/4, \infty$ 就变为 $\zeta = 0, 1, \infty$, 与超几何方程相同. 事实上, 在此变换下, $\mathscr{W}(\zeta)$ 所满足的方程是

$$\zeta(1-\zeta)\frac{d^2\mathscr{W}}{d\zeta^2} + \left[(1-\nu) - \left(\frac{3}{2}-\nu\right)\zeta\right]\frac{d\mathscr{W}}{d\zeta} - \frac{\nu(\nu-1)}{4}\mathscr{W}(\zeta) = 0. \quad (4.34)$$

直接和方程 (4.3) 相比较, 就能定出

$$\alpha = -\frac{\nu}{2}, \quad \beta = \frac{1-\nu}{2}, \quad \gamma = 1-\nu.$$

由此就能写出

$$\left(\frac{\sqrt{1+4z}+1}{2}\right)^\nu = F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2}; 1-\nu; -4z\right), \quad (4.35a)$$

$$\left(\frac{\sqrt{1+4z}-1}{2}\right)^\nu = z^\nu F\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1+\nu}{2}; 1+\nu; -4z\right). \quad (4.35b)$$

写出这个结果时, 需要用到

$$\left(\frac{\sqrt{1+4z}+1}{2}\right)^\nu \Big|_{z=0} = 1, \quad z^{-\nu} \left(\frac{\sqrt{1+4z}-1}{2}\right)^\nu \Big|_{z=0} = 1.$$

类似的例子还有:

例 4.8 将函数 $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}(\sqrt{1+z^2}+z)^{2\nu}$ 在 $z=0$ 点作 Taylor 展开, 规定 $f(0)=1$.

^① 参见文献: 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论. 北京: 北京大学出版社, 2000: 50.

解 可以引进函数 $g(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}(\sqrt{1+z^2}+z)^{-2\nu}$, 并规定 $g(0) = 1$. 直接微商可得

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left[-\frac{z}{(1+z^2)^{3/2}} + \frac{2\nu}{1+z^2} \right] (\sqrt{1+z^2}+z)^{2\nu}, \\ f''(z) &= \left[\frac{2z^2-1}{(1+z^2)^{5/2}} - \frac{6\nu z}{(1+z^2)^2} + \frac{4\nu^2}{(1+z^2)^{3/2}} \right] (\sqrt{1+z^2}+z)^{2\nu}, \\ g'(z) &= \left[-\frac{z}{(1+z^2)^{3/2}} - \frac{2\nu}{1+z^2} \right] (\sqrt{1+z^2}+z)^{-2\nu}, \\ g''(z) &= \left[\frac{2z^2-1}{(1+z^2)^{5/2}} + \frac{6\nu z}{(1+z^2)^2} + \frac{4\nu^2}{(1+z^2)^{3/2}} \right] (\sqrt{1+z^2}+z)^{-2\nu}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} W[f(z), g(z)] &= -\frac{4\nu}{(1+z^2)^{3/2}}, \\ W'[f(z), g(z)] &= \frac{12\nu z}{(1+z^2)^{5/2}}, \\ W[f'(z), g'(z)] &= -\frac{4\nu(1-4\nu^2)}{(1+z^2)^{5/2}}. \end{aligned}$$

这样就得到 $f(z)$ 和 $g(z)$ 所满足的二阶线性常微分方程

$$(1+z^2)\frac{d^2w}{dz^2} + 3z\frac{dw}{dz} + (1-4\nu^2)w = 0. \quad (4.36)$$

显然 $z=0$ 点为方程的常点, 而 $z=\pm i$ 是正则奇点, 故可设

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| < 1.$$

代入方程, 整理得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ c_{n+2}(n+2)(n+1) + c_n[(n+1)^2 - 4\nu^2] \right\} z^n = 0.$$

比较系数, 就得到递推关系

$$c_n = -\frac{(n-1)^2 - 4\nu^2}{n(n-1)} c_{n-2},$$

再反复利用递推关系, 从而导出系数公式


$$c_{2n} = \frac{(-1)^n 2^{2n} \Gamma(n+\nu+1/2) \Gamma(n-\nu+1/2)}{(2n)! \Gamma(\nu+1/2) \Gamma(-\nu+1/2)} c_0 = \frac{2^{2n} \Gamma(n+\nu+1/2)}{(2n)! \Gamma(-n+\nu+1/2)} c_0,$$

$$c_{2n+1} = \frac{(-1)^n 2^{2n} \Gamma(n+1+\nu) \Gamma(n+1-\nu)}{(2n+1)! \Gamma(1+\nu) \Gamma(1-\nu)} c_1 = \frac{2^{2n+1} \Gamma(n+1+\nu)}{(2n+1)! \Gamma(-n+\nu)} \frac{c_1}{2\nu}.$$

分别取 $c_0 = 1, c_1 = 0$ 与 $c_0 = 0, c_1 = 1$, 就得到方程 (4.36) 的两个线性无关解:

$$w_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{\Gamma(n+\nu+1/2)}{\Gamma(-n+\nu+1/2)} (2z)^{2n}, \quad (4.37a)$$

$$w_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(n+1+\nu)}{\Gamma(-n+\nu)} (2z)^{2n+1}. \quad (4.37b)$$

 **评述** 请读者验证, 方程 (4.36) 也是有三个奇点, 并且全都是正则奇点. 进一步作变换 $\zeta = -z^2$, 则 $\mathscr{W}(\zeta) \equiv w(z)$ 满足超几何方程

$$\zeta(1-\zeta) \frac{d^2 \mathscr{W}}{d\zeta^2} + \left(\frac{1}{2} - 2\zeta\right) \frac{d\mathscr{W}}{d\zeta} + \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right) \mathscr{W}(\zeta) = 0, \quad (4.36')$$

因而也可以求得

$$w_1(z) = F(-\nu+1/2, \nu+1/2; 1/2; -z^2),$$

$$w_2(z) = 2z F(-\nu+1, \nu+1; 3/2; -z^2).$$

它们就正好对应于 (4.37a) 与 (4.37b) 二式.

切不可误以为这样得到的 $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 就直接对应于 $f(z)$ 与 $g(z)$. 事实上, $w_1(z)$ 与 $w_2(z)$ 明显具有奇偶性, 而 $f(z)$ 与 $g(z)$ 则否. 然而, 无论如何, 这两组函数作为同一个微分方程 (4.36) 的解, 必然线性相关. 也就是说, 一定有

$$f(z) = \alpha w_1(z) + \beta w_2(z), \quad g(z) = \gamma w_1(z) + \delta w_2(z).$$

但因为

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 2\nu, \quad g(0) = 1, \quad g'(0) = -2\nu$$

以及

$$w_1(0) = 1, \quad w_1'(0) = 0, \quad w_2(0) = 0, \quad w_2'(0) = 2,$$


所以就能定出叠加系数

$$\alpha = 1, \quad \beta = \nu, \quad \gamma = 1, \quad \delta = -\nu.$$

最后就求得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}(\sqrt{1+z^2}+z)^{2\nu} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{\Gamma(n+\nu+1/2)}{\Gamma(-n+\nu+1/2)} (2z)^{2n} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(n+1+\nu)}{\Gamma(-n+\nu)} (2z)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\nu+(1+n)/2)}{\Gamma(\nu+(1-n)/2)} (2z)^n, \end{aligned} \quad (4.38a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}(\sqrt{1+z^2}+z)^{-2\nu} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{\Gamma(n+\nu+1/2)}{\Gamma(-n-\nu+1/2)} (2z)^{2n} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(n+1+\nu)}{\Gamma(-n+\nu)} (2z)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(\nu+(1+n)/2)}{\Gamma(\nu+(1-n)/2)} (2z)^n. \end{aligned} \quad (4.38b)$$

 **评述** 作为比较, 我们也可以尝试直接将 $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}(\sqrt{1+z^2}+z)^{2\nu}$ 在 $z=0$ 点作 Taylor 展开:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}(\sqrt{1+z^2}+z)^{2\nu} &= (1+z^2)^{\nu-1/2} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^{2\nu} \\ &= (1+z^2)^{\nu-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu+1)}{k! \Gamma(2\nu-k+1)} z^k (1+z^2)^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu+1)}{k! \Gamma(2\nu-k+1)} \frac{\Gamma(\nu-(k-1)/2)}{l! \Gamma(\nu-l-(k-1)/2)} z^{2l+k} \\ &= \frac{\Gamma(2\nu+1) \sqrt{\pi}}{2^{2\nu}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k! l!} \frac{2^k}{\Gamma(\nu+1-k/2) \Gamma(\nu-l-(k-1)/2)} z^{2l+k}. \end{aligned}$$

当然难以直接将此式化为 (4.38a) 式的最简形式, 然而我们却可以通过与 (4.38a) 式相比较, 反过来得到两个和式:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)! (n-k)!} \frac{2^{2k}}{\Gamma(\nu-k+1)} = \frac{2^{2n+2\nu}}{(2n)!} \frac{\Gamma(\nu+n+1/2)}{\Gamma(2\nu+1) \sqrt{\pi}}, \quad (4.39a)$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)! (n-k)!} \frac{2^{2k+1}}{\Gamma(\nu-k+1/2)} = \frac{2^{2n+2\nu+1}}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(2\nu+1) \sqrt{\pi}}. \quad (4.39b)$$

例 4.9 在上一个例子中, 我们通过求解微分方程 (4.36) 得到了函数

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}(\sqrt{1+z^2}+z)^{2\nu} \quad \text{与} \quad g(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}(\sqrt{1+z^2}+z)^{-2\nu}$$

在 $|z| < 1$ 内的 Taylor 展开. 但显然, 函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 作为微分方程 (4.36) 的解, 绝不仅存在于单位圆内. 可以预料, 通过解析延拓, 或是求方程 (4.36) 在其他区域内的幂级数解, 也应当能得到 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在其他区域内的展开式. 作为一个例子, 下面讨论 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 $z = \infty$ 点的幂级数展开^①. 为此, 作变换 $t = 1/z$, 则方程 (4.36) 变为

$$t^2(1+t^2)\frac{d^2w}{dt^2} - t(1-2t^2)\frac{dw}{dt} + (1-4\nu^2)w = 0. \quad (4.36'')$$

因为 $t = 0$ 是方程的正则奇点, 故可令

$$w(t) = t^\rho \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad |t| < 1.$$

代入方程, 整理得

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n [(n+\rho-1)^2 - 4\nu^2] t^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\rho)(n+\rho-1) t^{n+2} = 0.$$

比较 t^0 项的系数, 即可得到指标方程

$$(\rho-1)^2 - 4\nu^2 = 0,$$

由此求出指标

$$\rho_1 = 1 + 2\nu, \quad \rho_2 = 1 - 2\nu.$$

再比较 t^1 项的系数, 又有

$$c_1(\rho^2 - 4\nu^2) = 0,$$

从而定出

$$c_1 = 0.$$

再比较 t^n 项的系数, 得到递推关系

$$c_n = -\frac{(n+\rho-1)(n+\rho-2)}{(n+\rho-1+2\nu)(n+\rho-1-2\nu)} c_{n-2},$$

^① 因为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 都是多值函数, 而且, 无论如何, $z = \infty$ 点还是这两个函数的枝点, 所以, 严格地说来, 我们并不能在 $z = \infty$ 的邻域内作级数展开 (原因是根本不存在一个环域 $R < |z| < \infty$, 使 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在此环域内解析). 作为一个变通办法, 我们不妨理解为讨论 $z^{1-2\nu}f(z)$ 与 $z^{1+2\nu}g(z)$ 在 $|z| > 1$ 内的幂级数展开, 亦即 $t^{-1+2\nu}f(1/t)$ 与 $t^{-1-2\nu}g(1/t)$ 在 $|t| < 1$ 内的幂级数展开. 相对于 $t = 0$ 点, 这是 Taylor 展开. 至于 $f(1/t)$ 与 $g(1/t)$, 就是方程 (4.36) 经变换 $z = 1/t$ 后 (即方程 (4.36'')) 在 $t = 0$ 点的两个正则解, 指标分别为 $1 - 2\nu$ 与 $1 + 2\nu$.

需要注意, 在现在的约定下, 本例题中的 $f(z)$ 与 $g(z)$ 已不同于例 4.8. 尽管用了同一个函数符号, 它们对应于不同的割线作法: 割线位于单位圆外或单位圆内.

从而求出系数

$$c_{2n} = (-1)^n \frac{\Gamma(\nu + (1+\rho)/2)}{\Gamma(n + \nu + (1+\rho)/2)} \frac{\Gamma(-\nu + (1+\rho)/2)}{\Gamma(n - \nu + (1+\rho)/2)} \frac{\Gamma(2n + \rho)}{\Gamma(\rho)} \frac{c_0}{2^{2n}},$$

$$c_{2n+1} = (-1)^n \frac{\Gamma(\nu + \rho/2)}{\Gamma(n + 1 + \nu + \rho/2)} \frac{\Gamma(1 - \nu + \rho/2)}{\Gamma(n + 1 - \nu + \rho/2)} \frac{\Gamma(2n + 1 + \rho)}{\Gamma(1 + \rho)} \frac{c_1}{2^{2n}} = 0.$$

由 $\rho_1 = 1 + 2\nu$, 并令 $c_0 = 1$, 则得到方程 (4.36'') 的第一解

$$w_1(t) = t^{1+2\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(2n + 2\nu + 1)}{\Gamma(n + 2\nu + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n};$$

再由 $\rho_1 = 1 - 2\nu$, 并令 $c_0 = 1$, 又得到方程 (4.36'') 的第二解

$$w_2(t) = t^{1-2\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(2n - 2\nu + 1)}{\Gamma(n - 2\nu + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

注意到在变换 $t = 1/z$ 下有

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} (\sqrt{1+z^2} + z)^{2\nu} = \frac{t^{1-2\nu}}{\sqrt{1+t^2}} (\sqrt{1+t^2} + 1)^{2\nu},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} (\sqrt{1+z^2} + z)^{-2\nu} = \frac{t^{1+2\nu}}{\sqrt{1+t^2}} (\sqrt{1+t^2} + 1)^{-2\nu},$$

所以, 当 $|z| > 1$ 时,

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} (\sqrt{1+z^2} + z)^{2\nu} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(2n - 2\nu + 1)}{\Gamma(n - 2\nu + 1)} \left(\frac{1}{2z}\right)^{2n+1-2\nu}, \quad (4.40a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} (\sqrt{1+z^2} + z)^{-2\nu} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(2n + 2\nu + 1)}{\Gamma(n + 2\nu + 1)} \left(\frac{1}{2z}\right)^{2n+1+2\nu}. \quad (4.40b)$$

在《数学物理方法专题——数理方程与特殊函数》一书中第十四章的例 14.5 要用到这个结果.

例 4.10 求函数 $f(z) = (\sqrt{1+z^2} + z)^{2\nu}$ 在 $z = 0$ 点的 Taylor 展开, 规定 $f(0) = 1$.

解 本题非常类似于例 4.8. 我们可以引进 $g(z) = (\sqrt{1+z^2} - z)^{2\nu}$, 且同样规定 $g(0) = 1$. 因为

$$f'(z) = \frac{2\nu}{\sqrt{1+z^2}} (\sqrt{1+z^2} + z)^{2\nu},$$

$$f''(z) = \frac{4\nu^2}{1+z^2} (\sqrt{1+z^2} + z)^{2\nu} - \frac{2\nu z}{(1+z^2)^{3/2}} (\sqrt{1+z^2} + z)^{2\nu},$$

$$g'(z) = -\frac{2\nu}{\sqrt{1+z^2}} \left(\sqrt{1+z^2} - z \right)^{2\nu},$$

$$g''(z) = \frac{4\nu^2}{1+z^2} \left(\sqrt{1+z^2} + z \right)^{2\nu} + \frac{2\nu z}{(1+z^2)^{3/2}} \left(\sqrt{1+z^2} + z \right)^{2\nu}.$$

所以

$$W[f(z), g(z)] = -\frac{4\nu}{\sqrt{1+z^2}},$$

$$W'[f(z), g(z)] = \frac{4\nu z}{(1+z^2)^{3/2}},$$

$$W[f'(z), g'(z)] = \frac{16\nu^3}{(1+z^2)^{3/2}}.$$

这样就得到 $f(z)$ 与 $g(z)$ 满足的二阶线性常微分方程

$$w'' + \frac{z}{1+z^2}w' - \frac{4\nu^2}{1+z^2}w = 0, \quad \text{即} \quad (1+z^2)w'' + zw' - 4\nu^2w = 0. \quad (4.41)$$

显然 $z=0$ 是方程的常点, 而 $z=\pm i$ 是方程的正则奇点, 在单位圆 $|z|<1$ 内方程的解可以作 Taylor 展开:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

代入方程, 整理即得

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)z^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n^2 - 4\nu^2)z^n = 0.$$

由此可得到递推关系

$$c_n = \frac{4\nu^2 - (n-2)^2}{n(n-1)} c_{n-2}.$$

并进而导出系数公式

$$c_{2n} = \frac{[\nu^2 - (n-1)^2][\nu^2 - (n-2)^2] \cdots (\nu^2 - 1^2)\nu^2}{(2n)!} 2^{2n} c_0 = \frac{2^{2n}}{(2n)!} \frac{\nu \Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu-n+1)} c_0,$$

$$c_{2n+1} = \frac{[\nu^2 - (n-1/2)^2][\nu^2 - (n-3/2)^2] \cdots [\nu^2 - (3/2)^2][\nu^2 - (1/2)^2]}{(2n+1)!} 2^{2n} c_1$$

$$= \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(\nu+n+1/2)}{\Gamma(\nu-n+1/2)} c_1.$$

于是, 方程 (4.41) 的两个线性无关解便是

$$w_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{\nu \Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu-n+1)} (2z)^{2n}, \quad (4.42a)$$

$$w_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(\nu+n+1/2)}{\Gamma(\nu-n+1/2)} (2z)^{2n+1}. \quad (4.42b)$$

评述 读者同样可以验证, 方程 (4.41) 也是有三个奇点, 并且全都是正则奇点. 如果进一步作变换 $\zeta = -z^2$, 则 $\mathscr{W}(\zeta) \equiv w(z)$ 满足超几何方程

$$\zeta(1-\zeta) \frac{d^2 \mathscr{W}}{d\zeta^2} + \left(\frac{1}{2} - \zeta\right) \frac{d \mathscr{W}}{d\zeta} + \nu^2 \mathscr{W}(\zeta) = 0, \quad (4.41')$$

因而也可以求得

$$w_1(z) = F(-\nu, \nu; 1/2; -z^2),$$

$$w_2(z) = 2z F(-\nu+1/2, \nu+1/2; 3/2; -z^2).$$

类似于例 4.8, 这里得到的 $w_1(z)$, $w_2(z)$ 并不直接对应于 $f(z)$, $g(z)$. 考虑到

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 2\nu, \quad g(0) = 1, \quad g'(0) = -2\nu$$

以及

$$w_1(0) = 1, \quad w_1'(0) = 0, \quad w_2(0) = 0, \quad w_2'(0) = 2,$$

所以必然有

$$f(z) = w_1(z) + \nu w_2(z), \quad g(z) = w_1(z) - \nu w_2(z).$$

这样, 最后就得到

$$\begin{aligned} (\sqrt{1+z^2} + z)^{2\nu} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{\nu \Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu-n+1)} (2z)^{2n} \\ &\quad + \nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(\nu+n+1/2)}{\Gamma(\nu-n+1/2)} (2z)^{2n+1} \\ &= \nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\nu+n/2)}{\Gamma(\nu+1-n/2)} (2z)^n, \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{1+z^2} - z)^{2\nu} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{\nu \Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu-n+1)} (2z)^{2n} \\ &\quad - \nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(\nu+n+1/2)}{\Gamma(\nu-n+1/2)} (2z)^{2n+1} \\ &= \nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(\nu+n/2)}{\Gamma(\nu+1-n/2)} (2z)^n. \end{aligned} \quad (4.44)$$

事实上, 因为

$$(\sqrt{1+z^2}-z)^{2\nu} = (\sqrt{1+z^2}+z)^{-2\nu}.$$

所以, 也还有

$$(\sqrt{1+z^2}-z)^{2\nu} = -\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(-\nu+n/2)}{\Gamma(-\nu+1-n/2)} (2z)^n. \quad (4.44')$$

这里出现的恒等式

$$(-1)^n \frac{\Gamma(\nu+n/2)}{\Gamma(\nu+1-n/2)} = -\frac{\Gamma(-\nu+n/2)}{\Gamma(-\nu+1-n/2)},$$

只不过是

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\nu+\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(-\nu+1-\frac{n}{2}\right) &= \frac{\pi}{\sin(\nu+n/2)\pi}, \\ \Gamma\left(-\nu+\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\nu+1-\frac{n}{2}\right) &= \frac{\pi}{\sin(-\nu+n/2)\pi} \end{aligned}$$

以及

$$\sin(-\nu+n/2)\pi = -\sin(\nu-n/2)\pi = (-1)^{n+1} \sin(\nu+n/2)\pi$$

的反映.

 **评述** 类似于例 4.8, 我们也可以直接将 $f(z)$ 在 $z=0$ 点作 Taylor 展开:

$$\begin{aligned} (\sqrt{1+z^2}+z)^{2\nu} &= (1+z^2)^\nu \left(1+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^{2\nu} \\ &= (1+z^2)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu+1)}{k! \Gamma(2\nu-k+1)} z^k (1+z^2)^{-k/2} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu+1)}{k! \Gamma(2\nu-k+1)} \frac{\Gamma(\nu+1-k/2)}{l! \Gamma(\nu-l+1-k/2)} z^{k+2l} \\ &= \frac{\Gamma(2\nu+1) \sqrt{\pi}}{2^{2\nu}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\nu-n+1)} \left[\sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)! (n-k)!} \frac{2^{2k}}{\Gamma(\nu-k+1/2)} \right] z^{2n} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\nu-n+1/2)} \left[\sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)! (n-k)!} \frac{2^{2k+1}}{\Gamma(\nu-k)} \right] z^{2n+1} \right\}. \end{aligned}$$

由此也可以导出两个求和公式:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)! (n-k)!} \frac{2^{2k}}{\Gamma(\nu-k+1/2)} = \frac{2^{2n+2\nu-1}}{(2n)!} \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(2\nu) \sqrt{\pi}}, \quad (4.45a)$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)! (n-k)!} \frac{2^{2k+1}}{\Gamma(\nu-k)} = \frac{2^{2n+2\nu}}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(\nu+n+1/2)}{\Gamma(2\nu) \sqrt{\pi}}. \quad (4.45b)$$

其实, 它们与 (4.39) 式完全相同, 只是将 ν 换成了 $\nu-1/2$.

类似于例 4.9, 也可以求得 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 $z = \infty$ 点的展开式. 为此需对方程 (4.41) 作变换 $t = 1/z$, 从而得到

$$t^2(1+t^2)\frac{d^2w}{dt^2} + t(1+2t^2)\frac{dw}{dt} - 4\nu^2w = 0. \quad (4.41'')$$

因为 $t = 0$ 是方程 (4.41'') 的正则奇点, 故应当设

$$w(t) = t^\rho \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n.$$

代入方程, 整理得

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n [(n+\rho)^2 - 4\nu^2] t^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} (n+\rho-2)(n+\rho-1) t^n = 0.$$

比较等式两端 t^0 项的系数, 得到指标方程

$$\rho^2 - 4\nu^2 = 0,$$

因此

$$\rho_1 = 2\nu, \quad \rho_2 = -2\nu.$$

同样, 比较 t^1 项的系数, 又得到

$$[(1+\rho)^2 - 4\nu^2] c_1 = (1+2\rho) c_1 = 0,$$

从而有

$$c_1 = 0 \quad (\text{即使 } 2\rho + 1 = 0).$$

再比较 t^n 项的系数, 得到递推关系

$$c_n = -\frac{(n+\rho-2)(n+\rho-1)}{(n+\rho+2\nu)(n+\rho-2\nu)} c_{n-2}.$$

反复利用这个递推关系, 就能导出系数

$$\begin{aligned} c_{2n} &= (-1)^n \frac{\Gamma(1+\nu+\rho/2)}{\Gamma(n+1+\nu+\rho/2)} \frac{\Gamma(1-\nu+\rho/2)}{\Gamma(n+1-\nu+\rho/2)} \frac{\Gamma(2n+\rho)}{\Gamma(\rho)} \frac{c_0}{2^{2n}}, \\ c_{2n+1} &= (-1)^n \frac{\Gamma(\nu+(3+\rho)/2)}{\Gamma(n+\nu+(3+\rho)/2)} \frac{\Gamma(-\nu+(3+\rho)/2)}{\Gamma(n-\nu+(3+\rho)/2)} \frac{\Gamma(2n+1+\rho)}{\Gamma(1+\rho)} \frac{c_1}{2^{2n}} = 0. \end{aligned}$$

代入 $\rho_1 = 2\nu$, 并取 $c_0 = 2^{-2\nu}$, 则得到第一解

$$w_1(t) = 2\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(2n+2\nu)}{\Gamma(n+2\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+2\nu}.$$

代入 $\rho_2 = -2\nu$, 并取 $c_0 = 2^{2\nu}$, 又得到第二解

$$w_2(t) = -2\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(2n-2\nu)}{\Gamma(n-2\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n-2\nu}.$$

对照本例题对于 $f(z)$ 及 $g(z)$ 的规定, 最后就得到

$$\left(\sqrt{1+z^2}+z\right)^{-2\nu} = 2\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(2n+2\nu)}{\Gamma(n+2\nu+1)} \left(\frac{1}{2z}\right)^{2n+2\nu}. \quad (4.46a)$$

$$\left(\sqrt{1+z^2}+z\right)^{2\nu} = -2\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(2n-2\nu)}{\Gamma(n-2\nu+1)} \left(\frac{1}{2z}\right)^{2n-2\nu}. \quad (4.46b)$$

评述

1. 作变换 $z = 1/t$, 则

$$\left(\sqrt{1+z^2}+z\right)^{2\nu} = \left(\frac{t}{2}\right)^{-2\nu} \left(\frac{\sqrt{1+t^2}+1}{2}\right)^{2\nu}.$$

援引例 4.7 中的结果, 亦可导出 (4.46b) 式.

2. 也可以直接从方程 (4.41') 出发, 按照超几何方程的普遍结论, 写出它在 $\zeta = \infty$ 点邻域内的解. 这时得到的结果将是

$$w_1^{(\infty)}(z) = \begin{cases} (ze^{i\pi})^{2\nu} F\left(-\nu, -\nu + \frac{1}{2}; -2\nu + 1; -\frac{1}{z^2}\right), & -\pi < \arg z < -\frac{\pi}{2}, \\ z^{2\nu} F\left(-\nu, -\nu + \frac{1}{2}; -2\nu + 1; -\frac{1}{z^2}\right), & -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}, \\ (ze^{-i\pi})^{2\nu} F\left(-\nu, -\nu + \frac{1}{2}; -2\nu + 1; -\frac{1}{z^2}\right), & \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi, \end{cases}$$

$$w_2^{(\infty)}(z) = \begin{cases} (ze^{i\pi})^{-2\nu} F\left(\nu, \nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; -\frac{1}{z^2}\right), & -\pi < \arg z < -\frac{\pi}{2}, \\ z^{-2\nu} F\left(\nu, \nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; -\frac{1}{z^2}\right), & -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}, \\ (ze^{-i\pi})^{-2\nu} F\left(\nu, \nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; -\frac{1}{z^2}\right), & \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi. \end{cases}$$

它们和 (4.46a) 及 (4.46b) 两式并不完全相同, 差别在于相因子的规定.

例 4.11 将例 4.10 中的 z 换成 iz , 就有

$$\begin{aligned} & (\sqrt{1-z^2}+iz)^{2\nu} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{\nu \Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu-n+1)} (2z)^{2n} + i\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(\nu+n+1/2)}{\Gamma(\nu-n+1/2)} (2z)^{2n+1} \\ &= \nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \frac{\Gamma(\nu+n/2)}{\Gamma(\nu+1-n/2)} (2z)^n. \end{aligned}$$

但由于

$$\ln(\sqrt{1-z^2} + iz) = i \arcsin z,$$

所以上式又能改写成

$$e^{2\nu i \arcsin z} = \nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \frac{\Gamma(\nu + n/2)}{\Gamma(\nu + 1 - n/2)} (2z)^n. \quad (4.47a)$$

同时还有

$$e^{-2\nu i \arcsin z} = \nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \frac{\Gamma(\nu + n/2)}{\Gamma(\nu + 1 - n/2)} (2z)^n. \quad (4.47b)$$

将它们组合起来, 就得到

$$\cos(2\nu \arcsin z) = \nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{\Gamma(\nu + n)}{\Gamma(\nu - n + 1)} (2z)^{2n}. \quad (4.48a)$$

$$\sin(2\nu \arcsin z) = \nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(\nu + n + 1/2)}{\Gamma(\nu - n + 1/2)} (2z)^{2n+1}. \quad (4.48b)$$

在例 2.4 中也曾经得到过这个结果.

例 4.12 将 (4.47a) 式中的 $2\nu i$ 改写成 t , 又有

$$e^{t \arcsin z} = -\frac{it}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \frac{\Gamma((n-it)/2)}{\Gamma(1 - (n+it)/2)} (2z)^n.$$

注意到当 n 为偶数 $2m$ 时,

$$\begin{aligned} -\frac{it}{2} \frac{\Gamma((n-it)/2)}{\Gamma(1 - (n+it)/2)} (2i)^n &= (-1)^{m+1} \frac{it}{2} \frac{\Gamma(m-it/2)}{\Gamma(1-m-it/2)} 2^{2m} \\ &= (-1)^{m+1} \frac{it}{2} \underbrace{\left(m - \frac{it}{2} - 1\right) \left(m - \frac{it}{2} - 2\right) \cdots \left(-m - \frac{it}{2} + 1\right)}_{2m-1 \text{ 个因子相乘}} 2^{2m} \\ &= t^2 (t^2 + 2^2) (t^2 + 4^2) \cdots [t^2 + (2m-4)^2] [t^2 + (2m-2)^2], \end{aligned}$$

当 n 为奇数 $2m+1$ 时,

$$\begin{aligned} -\frac{it}{2} \frac{\Gamma((n-it)/2)}{\Gamma(1 - (n+it)/2)} (2i)^n &= (-1)^m \frac{t}{2} \frac{\Gamma(m+(1-it)/2)}{\Gamma(-m+(1-it)/2)} 2^{2m+1} \\ &= (-1)^m \frac{t}{2} \underbrace{\left(m - \frac{it}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(m - \frac{it}{2} - \frac{3}{2}\right) \cdots \left(-m - \frac{it}{2} + \frac{1}{2}\right)}_{2m \text{ 个因子相乘}} 2^{2m+1} \\ &= t(t^2 + 1^2) (t^2 + 3^2) \cdots [t^2 + (2m-3)^2] [t^2 + (2m-1)^2], \end{aligned}$$

所以

$$e^{t \operatorname{arcsin} z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^2 (t^2 + 2^2) (t^2 + 4^2) \cdots [t^2 + (2n-4)^2] [t^2 + (2n-2)^2]}{(2n)!} z^{2n} \\ + t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^2 + 1^2) (t^2 + 3^2) \cdots [t^2 + (2n-3)^2] [t^2 + (2n-1)^2]}{(2n+1)!} z^{2n+1}. \quad (4.49)$$

约定两级数中 $n=0$ 项的系数均为 1.

例 4.13 利用

$$\operatorname{arcsinh} z = \ln \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right),$$

又能由 (4.43) 和 (4.44) 两式导出

$$\begin{aligned} \cosh(2\nu \operatorname{arcsinh} z) &= \frac{1}{2} \left[(\sqrt{1+z^2} + z)^{2\nu} + (\sqrt{1+z^2} + z)^{-2\nu} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(\sqrt{1+z^2} + z)^{2\nu} + (\sqrt{1+z^2} - z)^{2\nu} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{\nu \Gamma(\nu + n)}{\Gamma(\nu - n + 1)} (2z)^{2n}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \sinh(2\nu \operatorname{arcsinh} z) &= \frac{1}{2} \left[(\sqrt{1+z^2} + z)^{2\nu} - (\sqrt{1+z^2} + z)^{-2\nu} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(\sqrt{1+z^2} + z)^{2\nu} - (\sqrt{1+z^2} - z)^{2\nu} \right] \\ &= \nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(\nu + n + 1/2)}{\Gamma(\nu - n + 1/2)} (2z)^{2n+1}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

再将 2ν 改写为 $i\nu$, 即得

$$\cos(\nu \operatorname{arcsinh} z) = \cosh(i\nu \operatorname{arcsinh} z)$$

$$= \frac{i\nu}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{\Gamma(n + i\nu/2)}{\Gamma(-n + 1 + i\nu/2)} (2z)^{2n} \quad (4.52a)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \nu^2 (\nu^2 + 2^2) \cdots [\nu^2 + (2n-4)^2] [\nu^2 + (2n-2)^2] z^{2n}, \quad (4.52b)$$

$$\sin(\nu \operatorname{arcsinh} z) = -i \sinh(i\nu \operatorname{arcsinh} z)$$

$$= \frac{\nu}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{\Gamma(n+(1+i\nu)/2)}{\Gamma(-n+(1+i\nu)/2)} (2z)^{2n+1} \quad (4.53a)$$

$$= \nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\nu^2+1^2)(\nu^2+3^2) \cdots [\nu^2+(2n-3)^2][\nu^2+(2n-1)^2] z^{2n+1}. \quad (4.53b)$$

例 4.14 将函数 $f(z) = e^{\arctan z}$ 在 $z=0$ 点作 Taylor 展开.

解 第二章中已经讨论过这个函数的 Taylor 展开. 现在仿照例 4.7 和例 4.8 的做法, 再取 $g(z) = e^{-\arctan z}$, 求出 $f(z)$ 与 $g(z)$ 共同满足的常微分方程, 而后求方程的幂级数解, 从而导出 $f(z) = e^{\arctan z}$ 在 $z=0$ 点的 Taylor 展开.

事实上, 因为 $e^{\pm t}$ 是方程

$$\frac{d^2 w}{dt^2} - w = 0$$

的解, 若令 $t = \arctan z$, 则

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \frac{dt}{dz} = \frac{1}{1+z^2} \frac{dw}{dt}, \quad \text{即} \quad \frac{dw}{dt} = (1+z^2) \frac{dw}{dz}.$$

更进一步, 有

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = (1+z^2) \frac{d}{dz} \left[(1+z^2) \frac{dw}{dz} \right] = (1+z^2)^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + 2z(1+z^2) \frac{dw}{dz}.$$

所以 $f(z)$ 与 $g(z)$ 共同满足的常微分方程就是

$$(1+z^2)^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + 2z(1+z^2) \frac{dw}{dz} - w = 0. \quad (4.54)$$

因为 $z=0$ 是方程的常点, 故可设

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| < 1.$$

代入方程 (4.54), 整理即得

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (n+2)(n+1) z^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (2n^2-1) z^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} (n-2)(n-1) z^n = 0.$$

比较系数: 对于 z^0 项的系数, 有

$$2 \cdot 1 \cdot c_2 + (-1)c_0 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{2 \cdot 1} c_0, ;$$

对于 z^1 项的系数, 有

$$3 \cdot 2 \cdot c_3 + c_1 = 0, \quad c_3 = -\frac{1}{3 \cdot 2} c_1.$$

比较 z^n ($n \geq 2$) 的系数, 有

$$c_{n+2}(n+2)(n+1) + c_n(2n^2 - 1) + c_{n-2}(n-2)(n-1) = 0,$$

即得到递推关系

$$c_n = -\frac{2(n-2)^2 - 1}{n(n-1)} c_{n-2} - \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)} c_{n-4}.$$

由此即可导出全部系数. 例如,

$$\begin{aligned} c_4 &= -\frac{7}{4 \cdot 3} c_2 = -\frac{7}{4!} c_0, & c_5 &= -\frac{17}{5 \cdot 4} c_3 - \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 4} c_1 = -\frac{5}{5!} c_1. \\ c_6 &= -\frac{31}{6 \cdot 5} c_4 - \frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 5} c_2 = -\frac{145}{6!} c_0, & c_7 &= -\frac{49}{7 \cdot 6} c_5 - \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 6} c_3 = -\frac{5}{7!} c_1. \\ c_8 &= -\frac{71}{8 \cdot 7} c_6 - \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 7} c_4 = -\frac{6095}{8!} c_0, & c_9 &= -\frac{97}{9 \cdot 8} c_7 - \frac{6 \cdot 5}{9 \cdot 8} c_5 = -\frac{5815}{9!} c_1. \end{aligned}$$

方程 (4.54) 的两个线性无关解便是

$$\begin{aligned} w_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{2n}}{c_0} z^{2n} = 1 + \frac{1}{2!} z^2 - \frac{7}{4!} z^4 + \frac{145}{6!} z^6 - \frac{6095}{8!} z^8 + \cdots, \\ w_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{2n+1}}{c_1} z^{2n+1} = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{5}{5!} z^5 - \frac{5}{7!} z^7 - \frac{5815}{9!} z^9 + \cdots. \end{aligned}$$


对于 $f(z) = e^{\arctan z}$, 有

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1,$$

所以

$$\begin{aligned} e^{\arctan z} &= w_1(z) + w_2(z) \\ &= 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 - \frac{1}{3!} z^3 - \frac{7}{4!} z^4 + \frac{5}{5!} z^5 + \frac{145}{6!} z^6 \\ &\quad - \frac{5}{7!} z^7 - \frac{6095}{8!} z^8 - \frac{5815}{9!} z^9 + \cdots. \end{aligned} \quad (4.55)$$

遗憾的是未能导出展开系数的通项公式.

 **评述** 也可以对方程 (4.54) 作变换 $\zeta = -z^2$, $\mathscr{W}(\zeta) \equiv w(z)$, 从而化为具有三个正则奇点 $0, 1, \infty$ 的 Fuchs 型方程

$$\frac{d^2 \mathscr{W}}{d\zeta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{2}{\zeta - 1} \right) \frac{d\mathscr{W}}{d\zeta} + \frac{1}{4} \frac{1}{\zeta - 1} \frac{\mathscr{W}(\zeta)}{\zeta(\zeta - 1)} = 0. \quad (4.54')$$

与它的标准形式

$$\frac{d^2 \mathscr{W}}{d\zeta^2} + \left(\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{\zeta} + \frac{1-\beta_1-\beta_2}{\zeta-1} \right) \frac{d\mathscr{W}}{d\zeta} + \left(-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\zeta} + \frac{\beta_1\beta_2}{\zeta-1} + \gamma_1\gamma_2 \right) \frac{\mathscr{W}(\zeta)}{\zeta(\zeta-1)} = 0$$

相比较, 就能定出方程 (4.54') 在奇点 $0, 1, \infty$ 处的指标对

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 1/2), \quad (\beta_1, \beta_2) = (i/2, -i/2), \quad (\gamma_1, \gamma_2) = (0, 1/2).$$

进一步就可以采用 Riemann P -方程^①的形式写出方程 (4.54) 的解

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & i/2 & 0: -z^2 \\ 1/2 & -i/2 & 1/2 \end{array} \right\} = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & i/2: \frac{z^2}{z^2+1} \\ 1/2 & 1/2 & -i/2 \end{array} \right\}.$$

因此

$$w_1(z) = F\left(\frac{i}{2}, -\frac{i}{2}; \frac{1}{2}; \frac{z^2}{z^2+1}\right) = (z^2+1)^{i/2} F\left(\frac{i}{2}, \frac{1+i}{2}; \frac{1}{2}; -z^2\right).$$

$$w_2(z) = z(z^2+1)^{i/2} F\left(\frac{1+i}{2}, 1 + \frac{i}{2}; \frac{3}{2}; -z^2\right).$$

从而给出

$$e^{\arctan z} = (z^2+1)^{i/2} \left[F\left(\frac{i}{2}, \frac{1+i}{2}; \frac{1}{2}; -z^2\right) + z F\left(\frac{1+i}{2}, 1 + \frac{i}{2}; \frac{3}{2}; -z^2\right) \right]. \quad (4.56)$$

以上诸式中均约定

$$(z^2+1)^{i/2} \Big|_{z=0} = 1.$$

可以预料, 将 (4.56) 式右端作展开, 也无法得到展开系数的简单表达式. 但是, 我们却可以得到

$$(z^2+1)^{-i/2} \cosh(\arctan z) = F\left(\frac{i}{2}, \frac{1+i}{2}; \frac{1}{2}; -z^2\right), \quad (4.57)$$

$$(z^2+1)^{-i/2} \sinh(\arctan z) = z F\left(\frac{1+i}{2}, 1 + \frac{i}{2}; \frac{3}{2}; -z^2\right). \quad (4.58)$$

① 参见文献: 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论. 北京: 北京大学出版社, 2000: 67.

第五章 卷积型级数的 Möbius 反演

§5.1 定 义

5.1.1 卷积型级数及其 Möbius 反演^①

设有卷积型级数

$$P_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n) Q_{n+m}(x), \quad (5.1)$$

若 $A(0) \neq 0$, 且能找到另一组展开系数 $A^{-1}(n)$, 它与 $A(n)$ 的 (离散型) 卷积为

$$\sum_{m=0}^n A(m) A^{-1}(n-m) = \delta_{n0}, \quad (5.2)$$

则有 Möbius 反演公式 (也就是级数 (5.1) 的逆或解)

$$Q_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{-1}(n) P_{n+m}(x). \quad (5.3)$$

$A^{-1}(n)$ 就称为 ($A(n)$ 对应的) Möbius 反演系数. 注意, 这里理论上并未要求展开式 (5.1) 或 (5.3) 具有唯一性. 只要 (5.2) 式成立, 则由 (5.1) 式即可推出 (5.3) 式; 反之亦然. 计算中唯一的要求是允许将二重级数改变求和次序,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A(n) A^{-1}(m) P_{n+m+k}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^l A(n) A^{-1}(l-n) \right] P_{l+k}(x), \quad (5.4a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A(n) A^{-1}(m) Q_{n+m+k}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^l A(n) A^{-1}(l-n) \right] Q_{l+k}(x). \quad (5.4b)$$

其充分条件是上述二重级数均绝对收敛.

5.1.2 分析

求卷积型级数的 Möbius 反演, 关键是要找出满足 (5.2) 式的反演系数. 其数学依据是: 若 $f(z)$ 在 G 内解析, G 为包含 $z=0$ 在内的某一单连通区域, 且 $f(0) \neq 0$, 则可将 $f(z)$ 展开为

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A(k) z^k, \quad (5.5a)$$

^① 参见文献: 陈难先, 刘刚. Fermi 体系逆问题的一种新解法. 自然科学进展, 2003, 13(5): 473.

同样, $1/f(z)$ 也可以展开为

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} A^{-1}(k) z^k; \quad (5.5b)$$

于是

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A(m) A^{-1}(k) z^{m+k} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^n A(m) A^{-1}(n-m) \right] z^n,$$

比较等式两端的系数, 即可得到 (5.2) 式. 这也就为寻找卷积型级数 Möbius 反演系数提供了可行的途径.

例 5.1 因为

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k, \quad e^{-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^k, \quad (5.6)$$

所以就有卷积型级数的展开系数及其 Möbius 反演系数

$$A(k) = \frac{1}{k!}, \quad A^{-1}(k) = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

例 5.2 因为

$$(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (-\alpha)_k z^k, \quad (1+z)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\alpha)_k z^k. \quad (5.7)$$

所以有

$$A(k) = \frac{(-\alpha)_k}{k!}, \quad A^{-1}(k) = \frac{(\alpha)_k}{k!},$$

其中 $(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_k = \Gamma(\alpha+k)/\Gamma(\alpha)$. 另外, (5.7) 式中出现的系数

$$N_k(x) = \frac{(-1)^k}{k!} (-x)_k = \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-k+1)} \quad (5.8)$$

称为 Newton 多项式.

例 5.3 因为

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k, \quad \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k, \quad (5.9)$$

其中 B_k 为 Bernoulli 数^①, 所以

$$A(k) = \frac{1}{(k+1)!}, \quad A^{-1}(k) = \frac{B_k}{k!}.$$

^① 这里定义的 Bernoulli 数为

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, & B_1 &= -\frac{1}{2}, & B_2 &= \frac{1}{6}, & B_3 &= 0, & B_4 &= -\frac{1}{30}, & B_5 &= 0, \\ B_6 &= \frac{1}{42}, & B_7 &= 0, & B_8 &= -\frac{1}{30}, & B_9 &= 0, & B_{10} &= \frac{5}{66}, & \dots \end{aligned}$$

更多的例子见表 5.1. 表中除了出现 Bernoulli 数 B_k 之外, 还有 Bernoulli 多项式 $B_k(t)$, Euler 数 E_k 以及 Euler 多项式 $E_k(t)$, 它们的定义以及相关的展开式都可以在特殊函数的专著^①中找到. 此外, 最后三行所涉及的展开式, 可见本书第四章, 例 4.7, 例 4.8 及例 4.10.

表 5.1 卷积型级数的展开系数及其 Möbius 反演系数

$f(x)$	$A(k)$	$A^{-1}(k)$
$\frac{x}{\sin x}$	$-\frac{2(2^{2k-1}-1)}{(2k)!}B_{2k}$	$\frac{1}{(2k+1)!}$
$\frac{\tan x}{x}$	$\frac{2^2(2^{2k+2}-1)}{(2k+2)!}B_{2k+2}$	$\frac{B_{2k}}{(2k)!}$
$\cosh x$	$\frac{1}{(2k)!}$	$\frac{E_k}{(2k)!}$
$\frac{e^x+1}{2}e^{-xt}$	$\frac{1}{k!}\frac{(1-t)^k+(-t)^k}{2}$	$\frac{E_k(t)}{k!}$
$e^{xt}\frac{\alpha x}{\sinh \alpha x}$	$\frac{(2\alpha)^k}{k!}B_k\left(\frac{\alpha+t}{2\alpha}\right)$	$\frac{(-1)^k}{(k+1)!}\frac{(t+\alpha)^{k+1}-(t-\alpha)^{k+1}}{2\alpha}$
$\frac{e^{xt}-1}{e^x-1}$	$\frac{B_{k+1}(t)-B_{k+1}(0)}{(k+1)!}$	$\frac{t^k}{(k+1)!}\left[B_{k+1}\left(\frac{1}{t}\right)-B_{k+1}(0)\right]$
$\frac{\sinh xt}{\sinh x}$	$\frac{2}{(2k+1)!}B_{2k+1}\left(\frac{1+t}{2}\right)$	$\frac{2x^{2k}}{(2k+1)!}B_{2k+1}\left(\frac{1+t}{2t}\right)$
$\frac{\cosh xt}{\cosh x}$	$\frac{1}{(2k)!}E_{2k}\left(\frac{1+x}{2}\right)$	$\frac{x^{2k}}{(2k)!}E_{2k}\left(\frac{1+x}{2x}\right)$
$\left(\frac{1+\sqrt{1+4z}}{2}\right)^\nu$	$\frac{\nu}{k!}\frac{\Gamma(\nu-k+1)}{\Gamma(\nu-2k+1)}$	$-\frac{\nu}{k!}\frac{\Gamma(-\nu-k+1)}{\Gamma(-\nu-2k+1)}$
$(z+\sqrt{1+z^2})^{2\nu}$	$\frac{\nu}{k!}\frac{\Gamma(\nu+k/2)}{\Gamma(1+\nu-k/2)}$	$-\frac{\nu}{k!}\frac{\Gamma(-\nu+k/2)}{\Gamma(1-\nu-k/2)}$
$e^{2it \arcsin(z/2)}$	$\frac{t}{k!}\frac{\Gamma(t+k/2)}{\Gamma(1+t-k/2)}$	$-\frac{t}{k!}\frac{\Gamma(-t+k/2)}{\Gamma(1-t-k/2)}$

5.1.3 Möbius 反演系数的性质

从以上讨论可以看出, Möbius 反演系数具有下列基本性质:

① 例如, 参见文献: A. Erdélyi, et al. *Higher Transcendental Functions*. Vol. III. New York: McGraw-Hill, 1953: Chap. XIX. 但该处部分公式有误.

(1) $A(n)$ 和 $A^{-1}(n)$ 互为 Möbius 反演系数, 即

$$[A^{-1}(m)]^{-1} = A(m). \quad (5.10)$$

所以, 以后就将 $A(n)$ 和 $A^{-1}(n)$ 称为卷积型级数的一对 Möbius 反演系数, 简称 Möbius 反演系数对.

(2) 若 α 为任意非零常数或函数, 则

$$[\alpha A(m)]^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}(m). \quad (5.11)$$

(3) 若 α 为任意非零常数或函数, 则

$$[\alpha^m A(m)]^{-1} = \alpha^m A^{-1}(m). \quad (5.12)$$

(4) 特别地, 当 $\alpha = -1$ 时, 有

$$[(-1)^m A(m)]^{-1} = (-1)^m A^{-1}(m). \quad (5.13)$$

§5.2 应 用

例 5.4 球 Bessel 函数.

直接将球 Bessel 函数的级数表达式

$$j_m(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{\Gamma(n+m+3/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} \quad (5.14)$$

与 (5.1) 式相比较, 可以看出, 若取

$$P_m(x) = j_m(x), \quad Q_m(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\Gamma(m+3/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^m.$$

则有下列反演系数对:

$$A(m) = \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m, \quad A^{-1}(m) = \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m.$$

这样就推出了反演公式

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\Gamma(m+3/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n j_{n+m}(x),$$

或者写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-m} j_{n+m}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\Gamma(m+3/2)}. \quad (5.15)$$

例 5.5 Laguerre 多项式.由公式^①

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n! k!} L_{n+k}(x) t^n = \exp \left\{ -\frac{xt}{1-t} \right\} L_k \left(\frac{x}{1-t} \right) (1-t)^{-1-k}, \quad (5.16)$$

将 k 改写为 $m+k$, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m+k)!}{n!} L_{n+m+k}(x) t^n = \frac{(m+k)!}{(1-t)^{m+k+1}} \exp \left\{ -\frac{xt}{1-t} \right\} L_{m+k} \left(\frac{x}{1-t} \right),$$

取 $A(n) = t^n/n!$, 则有相应的 Möbius 反演系数

$$A^{-1}(n) = \frac{(-1)^n}{n!} t^n,$$

因而就可以写出反演公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(n+m+k)!}{(1-t)^{n-m+k+1}} \exp \left\{ -\frac{xt}{1-t} \right\} L_{m+n+k} \left(\frac{x}{1-t} \right) t^n = (m+k)! L_{m+k}(x).$$

再将 $k+m$ 写成 k , 即得

$$\frac{1}{(1-t)^{k+1}} \exp \left\{ -\frac{xt}{1-t} \right\} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+k)!}{n! k!} L_{k+n} \left(\frac{x}{1-t} \right) \left(\frac{t}{1-t} \right)^n = L_k(x) t^k. \quad (5.17)$$

例 5.6 Γ 函数.由公式^②

$$(1-2^{-x})\Gamma(x)\zeta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 2^{-x-n} \Gamma(x+n)\zeta(x+n), \quad (5.18)$$

将 x 替换成 $x+m$, 得

$$(1-2^{-x-m})\Gamma(x+m)\zeta(x+m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 2^{-x-m-n} \Gamma(x+m+n)\zeta(x+m+n).$$

取

$$P_m(x) = (1-2^{-x-m})\Gamma(x+m)\zeta(x+m), \quad Q_m(x) = 2^{-x-m}\Gamma(x+m)\zeta(x+m),$$

① 参见文献: E. D. Rainville *Special Functions*. New York: Macmillan Co., 1960: 215.② 参见文献: W. Magnus, et al. *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1966: 22.

同时展开系数为

$$A(n) = \frac{1}{n!},$$

所以就有反演公式

$$2^{-x-m}\Gamma(x+m)\zeta(x+m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (1-2^{-x-m-n})\Gamma(x+m+n)\zeta(x+m+n).$$

再将 $x+m$ 写成 x , 即得

$$2^{-x}\Gamma(x)\zeta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (1-2^{-x-n})\Gamma(x+n)\zeta(x+n). \quad (5.19)$$

还可以将 (5.18) 式和 (5.19) 式相加, 从而得到公式

$$\Gamma(x)\zeta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(x+n)\zeta(x+n) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-x-2n}}{(2n+1)!} \Gamma(x+2n+1)\zeta(x+2n+1)$$

或

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \Gamma(x+n)\zeta(x+n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-x-2n}}{(2n+1)!} \Gamma(x+2n+1)\zeta(x+2n+1). \quad (5.20)$$

将 (5.18) 式和 (5.19) 式相减, 又能得到

$$\begin{aligned} & (1-2^{-x+1})\Gamma(x)\zeta(x) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(x+n)\zeta(x+n) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-x-2n+1}}{(2n)!} \Gamma(x+2n)\zeta(x+2n). \end{aligned} \quad (5.21)$$

上面的例 5.5 与例 5.6 实际上提供了如何求级数

$$P_{\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n)Q_{\alpha+n}(x) \quad (\alpha \text{ 可以不是自然数}) \quad (5.22a)$$

反演的方法. 将 α 改写为 $\alpha+m$:

$$P_{\alpha+m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n)Q_{\alpha+m+n}(x),$$

于是就能写出

$$Q_{\alpha+m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{-1}(n)P_{\alpha+m+n}(x).$$

再将 $\alpha + m$ 写成 α (或者说, 令 $m = 0$), 就得到级数 (5.22a) 的反演

$$Q_{\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{-1}(n) P_{\alpha+n}(x). \quad (5.22b)$$

同样也能求得级数

$$P_{\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n) Q_{\alpha-n}(x) \quad (5.23a)$$

的反演是

$$Q_{\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{-1}(n) P_{\alpha-n}(x). \quad (5.23b)$$

直接引用这里的公式 (5.22) 与 (5.23), 就能很容易地写出下列结果:

例 5.7 连带 Legendre 函数.

由公式^①

$$\left(1 - t^2 - \frac{2xt}{\sqrt{1-x^2}}\right)^{-\mu/2} P_{\nu}^{\mu}(x + t\sqrt{1-x^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P_{\nu}^{n+\mu}(x) t^n, \quad (5.24)$$

这里的 μ 就相当于 (5.22) 式中的 α , 取

$$P_{\mu}(x) = \left(1 - t^2 - \frac{2xt}{\sqrt{1-x^2}}\right)^{-\mu/2} P_{\nu}^{\mu}(x + t\sqrt{1-x^2}), \quad Q_{\mu}(x) = P_{\nu}^{\mu}(x),$$

而展开系数为

$$A(n) = \frac{1}{n!} t^n,$$

因此, 我们就能立即有 Möbius 反演公式

$$P_{\nu}^{\mu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(1 - t^2 - \frac{2xt}{\sqrt{1-x^2}}\right)^{-(n+\mu)/2} P_{\nu}^{n+\mu}(x + t\sqrt{1-x^2}) t^n. \quad (5.25)$$

注意 (5.22) 或 (5.23) 式中的 α 可以是一组参数, 例如, 我们完全可以类似地讨论级数

$$P_{\alpha, \beta, \gamma, \dots}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n) Q_{\alpha \pm n, \beta \pm n, \gamma \pm n, \dots}(x), \quad (5.26a)$$

它的 Möbius 反演就是

$$Q_{\alpha, \beta, \gamma, \dots}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{-1}(n) P_{\alpha \pm n, \beta \pm n, \gamma \pm n, \dots}(x). \quad (5.26b)$$

^① 参见文献: A. Erdélyi, et al. *Higher Transcendental Functions*. Vol. III. New York: McGraw-Hill, 1953: 266.

此结果可以直接应用于超几何函数与合流超几何函数.

例 5.8 超几何函数 I.

超几何函数的定义为

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} z^n, \quad (5.27)$$

或者记为

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} z^n. \quad (5.27')$$

对照 (5.26) 式, 取 $A(n) = z^n/n!$, 就能写出反演公式

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} z^n F(\alpha+n, \beta+n; \gamma+n; z).$$

或者写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} z^n F(\alpha+n, \beta+n; \gamma+n; z) = 1. \quad (5.28a)$$

这个结果其实在第三章已经得到过. 该处还讨论了它对于 (与超几何函数有关的一些特殊函数的应用, 这里不再重复. 现在不妨讨论 $\beta-\gamma$ (或 $\alpha-\gamma$) 为整数的情形. 例如 $\beta-\gamma=1$, 这时因为

$$\frac{(\beta)_n}{(\gamma)_n} = \frac{(\gamma+1)_n}{(\gamma)_n} = \frac{\Gamma(\gamma+n+1)}{\Gamma(\gamma+1)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)} = \frac{\gamma+n}{\gamma},$$

所以 (5.28a) 式变为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\gamma+n}{\gamma} (\alpha)_n z^n F(\alpha+n, \gamma+n+1; \gamma+n; z) = 1; \quad (5.28b)$$

又如 $\beta-\gamma=-1$ 时, 也有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\beta}{\beta+n} (\alpha)_n z^n F(\alpha+n, \beta+n; \beta+n+1; z) = 1. \quad (5.28c)$$

例 5.9 超几何函数 II.

由公式^①

$$(1+s)^\lambda F\left(-\lambda, b; c; \frac{z}{1+s}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(n-\lambda)}{\Gamma(-\lambda)} s^n F(n-\lambda, b; c; z) \quad (5.29)$$

^① 参见文献: A. Erdélyi, et al. *Higher Transcendental Functions*. Vol. I. New York: McGraw-Hill, 1953: 88.

出发, 注意这里的 λ 就相当于 (5.23) 式中的 α , 直接引用该处的结果, 我们就有

$$F(-\lambda, b; c; z) = (1+s)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n-\lambda)}{\Gamma(-\lambda)} \left(\frac{s}{1+s} \right)^n F\left(n-\lambda, b; c; \frac{z}{1+s}\right). \quad (5.30)$$

例 5.10 合流超几何函数 I.

模仿超几何函数的讨论, 由合流超几何函数的定义

$$F(\alpha, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} z^n, \quad (5.31)$$

也可以推出

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} z^n F(\alpha+n; \gamma+n; z) = 1, \quad (5.32a)$$

或者写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n F(\alpha; \gamma; z)}{dz^n} z^n = 1. \quad (5.32b)$$

这个结果在第三章也已经得到过, 而且也已经给出了它应用于与合流超几何函数有关的一些特殊函数而得到的结果. 这里仍只讨论一下 $\alpha - \gamma$ 为整数的情形, 例如 $\alpha - \gamma = 1$, 就有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\gamma+n}{\gamma} z^n F(\gamma+n+1; \gamma+n; z) = 1. \quad (5.32c)$$

例 5.11 合流超几何函数 II.

对于合流超几何函数 $F(\alpha; \gamma; z)$, 如果写成

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} \frac{1}{\Gamma(\gamma+n)} z^n.$$

并取叠加系数

$$A(n) = \frac{(\alpha)_n}{n!} z^n.$$

则又有 Möbius 反演公式

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_n}{n!} \frac{1}{\Gamma(\gamma+n)} z^n F(\alpha; \gamma+n; z). \quad (5.33a)$$

这个结果又可以写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(-\alpha)_n}{(\gamma)_n} z^n F(\alpha; \gamma+n; z) = 1. \quad (5.33b)$$

例 5.12 合流超几何函数 III.

公式^①

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c')\Gamma(c-c')}(1-t)^{c'-c}z^{1-c}\int_0^z u^{c'-1}(z-u)^{c-c'-1}F(a;c';u)\exp\left\{-\frac{(z-u)t}{1-t}\right\}du \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-c')_n}{n!} t^n F(a-n;c;z), \quad \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} c' > 0, |t| < 1, |\arg z| < \frac{3\pi}{4} \end{aligned} \quad (5.34)$$

中的参数 a 相当于 (5.23) 式中的 α , 将其左端视为 $P_a(z)$, 而 $Q_a(z) = F(a;c;z)$, $A(n) = \frac{(c-c')_n}{n!} t^n$, 于是得反演

$$\begin{aligned} F(a;c;z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c')\Gamma(c-c')}(1-t)^{c'-c}z^{1-c} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c'-c)_n}{n!} t^n \int_0^z u^{c'-1}(z-u)^{c-c'-1}F(a-n;c';u)\exp\left\{-\frac{(z-u)t}{1-t}\right\}du. \\ &\quad \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} c' > 0, |t| < 1, |\arg z| < \frac{3\pi}{4}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

这可以看成合流超几何函数的又一个积分表示.

例 5.13 Lommel 函数.

由 Lommel 函数的级数表达式

$$s_{\mu,\nu}(z) = z^{\mu-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}+n\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+3}{2}+n\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+2}, \quad (5.36)$$

其中 $\mu \pm \nu \neq -1, -2, -3, \dots$, 当 $\mu = \nu + 1$ 时, 有

$$s_{\nu+1,\nu}(z) = z^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(n+\nu+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+2},$$

所以

$$\frac{z^{-\nu}s_{\nu+1,\nu}(z)}{\Gamma(\nu+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \frac{1}{\Gamma(n+\nu+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+2}.$$

如果取

$$P_{\nu}(z) = \frac{z^{-\nu}s_{\nu+1,\nu}(z)}{\Gamma(\nu+1)}, \quad Q_{\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^2,$$

^① 参见文献: A. Erdélyi, et al. *Higher Transcendental Functions*. Vol. I. New York: McGraw-Hill, 1953: 280.

则有 Möbius 反演系数对

$$A(m) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}, \quad A^{-1}(m) = \frac{(-1)^m B_m}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m},$$

这样就得到反演公式

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{B_n}{\Gamma(n+\nu+1)} z^{n-\nu} s_{n+\nu+1, n+\nu}(z). \quad (5.37a)$$

特别地, 当 ν 为正整数 m 时, 有

$$\left(\frac{z}{2}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n}{n!} \frac{(m+1)!}{(m+n)!} z^{n-m} s_{n+m+1, n+m}(z). \quad (5.37b)$$

例 5.14 倍乘公式与加法公式的 Möbius 反演.

作为 Taylor 公式的应用之一, 第三章讨论了特殊函数的倍乘公式与加法公式, 并得到了一系列有意思的结果. 对于它们中的大多数, 也可以应用上面描述的步骤, 从而写出相应的“反演”形式. 例如, 对于超几何函数的倍乘公式 (见 (3.59) (3.66) 式), 可以写出它们的反演公式:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} z^n F(\alpha+n, \beta+n; \gamma+n; \lambda z), \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} & (1-z)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta; \gamma; z) \\ &= (1-\lambda z)^{\alpha+\beta-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} \frac{(\gamma-\alpha)_n (\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n} \left(\frac{z}{1-\lambda z}\right)^n F(\alpha, \beta; \gamma+n; \lambda z), \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \lambda^{\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma)_n}{n!} \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^n F(\alpha, \beta; \gamma-n; \lambda z), \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} & (1-z)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta; \gamma; z) \\ &= \lambda^{\gamma-1} (1-\lambda z)^{\alpha+\beta-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma)_n}{n!} \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^n (1-\lambda z)^{-n} F(\alpha-n, \beta-n; \gamma-n; \lambda z), \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{1-z}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \left(\frac{\lambda-1}{2}\right)^n z^n F\left(\alpha+n, \beta+n; \gamma+n; \frac{1-\lambda z}{2}\right). \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} & (1+z)^{\alpha+\beta-\gamma} F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{1-z}{2}\right) \\ &= (1+\lambda z)^{\alpha+\beta-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda-1)^n}{n!} \frac{(\gamma-\alpha)_n (\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n} \left(\frac{z}{1+\lambda z}\right)^n F\left(\alpha, \beta; \gamma+n; \frac{1-\lambda z}{2}\right), \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned}
 & (1-z)^{\gamma-1} F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{1-z}{2}\right) \\
 &= (1-\lambda z)^{\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\lambda)^n}{n!} (1-\gamma)_n \left(\frac{z}{1-\lambda z}\right)^n F\left(\alpha, \beta; \gamma-n; \frac{1-\lambda z}{2}\right), \quad (5.44)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (1-z)^{\gamma-1} (1+z)^{\alpha+\beta-\gamma} F\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{1-z}{2}\right) \\
 &= (1-\lambda z)^{\gamma-1} (1+\lambda z)^{\alpha+\beta-\gamma} \\
 & \quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma)_n}{n!} (1-\lambda)^n \left(\frac{2z}{\lambda^2 z^2 - 1}\right)^n F\left(\alpha-n, \beta-n; \gamma-n; \frac{1-\lambda z}{2}\right). \quad (5.45)
 \end{aligned}$$

但这样得到的结果, 其实还就是 (3.59) — (3.66) 各式本身. 这不仅是因为它们可以由 (3.59) — (3.66) 各式通过简单的级数反演而得到, 而且, 只要对 (3.59) — (3.66) 各式作代换 $\lambda z = \zeta$, $\lambda = 1/\mu$, 就可以直接得到 (5.38) — (5.45) 各式.

对于第三章中给出的其他一些特殊函数 (包括 Legendre 函数、Gegenbauer 函数、Jacobi 多项式、合流超几何函数以及各种特殊的合流超几何函数) 的倍乘公式, 也有类似的结论.

应用同样的 Möbius 反演技术, 我们也可以写出超几何函数的加法公式 (见 (3.123) — (3.130) 式) 和合流超几何函数的加法公式 (见 (3.141) — (3.147) 式) 的反演形式. 读者也将会发现, 这些结果都可以由加法公式通过代换 $z+z' = \zeta$, $z' = -\zeta'$ 而直接得到.

§5.3 卷积型级数 Möbius 反演与柱函数

本节集中讨论涉及柱函数的 Möbius 反演, 可以得到许多有意义的结果.

例 5.15 由 Bessel 函数的级数表达式

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu},$$

取

$$P_\nu(x) = J_\nu(x), \quad Q_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu,$$

则展开系数为

$$A(n) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

所以反演公式为

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n J_{n+\nu}(x), \quad (5.46a)$$

或者写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-\nu} J_{n+\nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}. \quad (5.46b)$$

特别是 ν 为正整数 m 时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-m} J_{n+m}(x) = \frac{1}{m!}. \quad (5.46c)$$

例 5.16 将 (5.46a) 式改写成

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+\alpha} J_{n+\alpha}(x). \quad (5.46d)$$

作 Laplace 变换, 就有

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{2^{2\alpha}} \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{p^{2\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+\alpha+1/2)}{\sqrt{\pi}(1+p^2)^{n+\alpha+1/2}}. \quad \operatorname{Re} p > 1.$$

再利用 Γ 函数的倍乘公式化简, 即得

$$\frac{\Gamma(\alpha+1/2)}{p^{2\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n+\alpha+1/2)}{(1+p^2)^{n+\alpha+1/2}}, \quad \operatorname{Re} p > 1. \quad (5.47a)$$

这个结果本身可以延拓到 $|1+p^2| > 1$, 它其实只不过是级数展开

$$\frac{1}{(1+p^2)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{p^{2n+2\alpha}}, \quad |p| > 1 \quad (5.47b)$$

的反演.

例 5.17 由 (5.46d) 式还可以计算

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{2^{2\alpha}} \int_0^\infty x^{2\alpha-1} e^{-\kappa x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{x^{n+\alpha}} \int_0^\infty x^{n+\alpha-1} J_{n+\alpha}(x) e^{-\kappa x^2} dx.$$

上式左端的积分可以化为 Γ 函数, 而右端的积分则可利用公式

$$\int_0^\infty x^{\nu-1} J_\nu(x) e^{-\kappa x^2} dx = 2^{\nu-1} \gamma\left(\nu, \frac{1}{4\kappa}\right), \quad \operatorname{Re} \nu > 0, \operatorname{Re} \kappa > 0$$

求出, 其中的 $\gamma(\nu, z)$ 为不完全 γ 函数. 这样得到的结果便是

$$\frac{1}{\alpha} \frac{1}{(4\kappa)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \gamma\left(n+\alpha, \frac{1}{4\kappa}\right).$$

或者令 $1/4\kappa = z$, 则

$$\frac{1}{\alpha} z^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \gamma(n+\alpha, z). \quad (5.48a)$$

它其实也只不过是

$$\gamma(\alpha, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+\alpha} z^{n+\alpha} \quad (5.48b)$$

的反演.

例 5.18 还可以从 (5.46d) 式出发, 计算相关的变上限积分. 例如:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{2^{2\alpha}} \int_0^z x^{2\alpha} \cos x \, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{n+\alpha+1/2} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+\alpha+1} [\mathbf{J}_{n+\alpha}(z) \cos z + \mathbf{J}_{n+\alpha+1}(z) \sin z], \end{aligned} \quad (5.49a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{2^{2\alpha}} \int_0^z x^{2\alpha} \sin x \, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{n+\alpha+1/2} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+\alpha+1} [\mathbf{J}_{n+\alpha}(z) \sin z - \mathbf{J}_{n+\alpha+1}(z) \cos z], \end{aligned} \quad (5.49b)$$

在上面的计算过程中, 用到了积分

$$\begin{aligned} \int_0^z x^\nu \mathbf{J}_\nu(x) \cos x \, dx &= \int_0^z x^{2\nu} \cdot x^{-\nu} \mathbf{J}_\nu(x) \cos x \, dx \\ &= \frac{1}{2\nu+1} z^{2\nu+1} \cdot z^{-\nu} \mathbf{J}_\nu(z) \cos z - \frac{1}{2\nu+1} \int_0^z x^{2\nu+1} [x^{-\nu} \mathbf{J}_\nu(x) \cos x]' \, dx \\ &= \frac{1}{2\nu+1} z^{\nu+1} \mathbf{J}_\nu(z) \cos z + \frac{1}{2\nu+1} \int_0^z [x^{\nu+1} \mathbf{J}_{\nu+1}(x) \sin x]' \, dx \\ &= \frac{1}{2\nu+1} z^{\nu+1} [\mathbf{J}_\nu(z) \cos z + \mathbf{J}_{\nu+1}(z) \sin z], \end{aligned} \quad (5.50a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^z x^\nu \mathbf{J}_\nu(x) \sin x \, dx &= \int_0^z x^{2\nu} \cdot x^{-\nu} \mathbf{J}_\nu(x) \sin x \, dx \\ &= \frac{1}{2\nu+1} z^{2\nu+1} \cdot z^{-\nu} \mathbf{J}_\nu(z) \sin z - \frac{1}{2\nu+1} \int_0^z x^{2\nu+1} [x^{-\nu} \mathbf{J}_\nu(x) \sin x]' \, dx \\ &= \frac{1}{2\nu+1} z^{\nu+1} \mathbf{J}_\nu(z) \sin z - \frac{1}{2\nu+1} \int_0^z [x^{\nu+1} \mathbf{J}_{\nu+1}(x) \cos x]' \, dx \\ &= \frac{1}{2\nu+1} z^{\nu+1} [\mathbf{J}_\nu(z) \sin z - \mathbf{J}_{\nu+1}(z) \cos z]. \end{aligned} \quad (5.50b)$$

将 (5.49a) 式与 (5.49b) 式重新组合, 还可以得到

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{2^{2\alpha}} \int_0^z x^{2\alpha} \cos(z-x) \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2^{n+\alpha}} \frac{1}{2(n+\alpha)+1} z^{n+\alpha+1} \mathbf{J}_{n+\alpha}(z), \quad (5.49c)$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{2^{2\alpha}} \int_0^z x^{2\alpha} \sin(z-x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2^{n+\alpha}} \frac{1}{2(n+\alpha)+1} z^{n+\alpha+1} J_{n+\alpha+1}(z). \quad (5.49d)$$

例如, 取 $\alpha = 0$, 求出 (5.49a) — (5.49d) 式左端的积分, 即得

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{n+1/2} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+1} [J_n(z) \cos z + J_{n+1}(z) \sin z], \quad (5.51a)$$

$$1 - \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{n+1/2} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+1} [J_n(z) \sin z - J_{n+1}(z) \cos z] \quad (5.51b)$$

和

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{n+1/2} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+1} J_n(z), \quad (5.51c)$$

$$1 - \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{n+1/2} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+1} J_{n+1}(z). \quad (5.51d)$$

同样, 取 $\alpha = 1/2$, 又得到

$$z \sin z + \cos z - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{(n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+3/2} [J_{n+1/2}(z) \cos z + J_{n+3/2}(z) \sin z], \quad (5.52a)$$

$$-z \cos z + \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{(n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+3/2} [J_{n+1/2}(z) \sin z - J_{n+3/2}(z) \cos z] \quad (5.52b)$$

以及

$$1 - \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{(n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+3/2} J_{n+1/2}(z), \quad (5.52c)$$

$$z - \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{(n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+3/2} J_{n+3/2}(z). \quad (5.52d)$$

取 $\alpha = 1$, 还能得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} [(z^2 - 2) \sin z + 2z \cos z] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{n+3/2} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2} [J_{n+1}(z) \cos z + J_{n+2}(z) \sin z], \end{aligned} \quad (5.53a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} [(2 - z^2) \cos z + 2z \sin z - 2] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{n+3/2} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2} [J_{n+1}(z) \sin z - J_{n+2}(z) \cos z] \end{aligned} \quad (5.53b)$$

以及

$$\frac{1}{2}(z - \sin z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{n+3/2} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2} J_{n+1}(z), \quad (5.53c)$$

$$\frac{1}{4}[(z^2 - 2) + 2 \cos z] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{n+3/2} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2} J_{n+2}(z). \quad (5.53d)$$

例 5.19 还可以讨论展开式^①

$$[t(t-2x)]^{-\alpha/2} J_{\alpha}(\sqrt{t(t-2x)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^{-\alpha} J_{\alpha+n}(t) x^n \quad (5.54a)$$

的 Möbius 反演. 为此, 只需取

$$P_{\alpha}(x) = \left(\frac{t}{t-2x}\right)^{\alpha/2} J_{\alpha}(\sqrt{t(t-2x)}), \quad Q_{\alpha}(x) = J_{\alpha}(t), \quad A(n) = \frac{1}{n!} x^n,$$

因而就能写出反演公式

$$J_{\alpha}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{t}{t-2x}\right)^{(\alpha+n)/2} J_{\alpha+n}(\sqrt{t(t-2x)}) x^n. \quad (5.54b)$$

作为 (5.54) 式的特例, 取 $t = x$, 就有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} J_{\alpha+n}(x) x^n = I_{\alpha}(x), \quad (5.55a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} I_{\alpha+n}(x) x^n = J_{\alpha}(x). \quad (5.55b)$$

它们其实也就是所谓 Bessel 函数的倍乘公式 (见第三章 §3.7) 的特殊情形 ($\lambda = i$).

例 5.20 柱函数 $C_{\nu}(z)$ 的递推关系是

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n [z^{\nu} C_{\nu}(z)] &= z^{\nu-n} C_{\nu-n}(z), \\ \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^n [z^{-\nu} C_{\nu}(z)] &= (-1)^n z^{-(\nu+n)} C_{\nu+n}(z), \end{aligned}$$

令 $\zeta = z^2$, 从而写成

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{d\zeta^n} [\zeta^{\nu/2} C_{\nu}(\sqrt{\zeta})] &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \zeta^{(\nu-n)/2} C_{\nu-n}(\sqrt{\zeta}), \\ \frac{d^n}{d\zeta^n} [\zeta^{-\nu/2} C_{\nu}(\sqrt{\zeta})] &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \zeta^{-(\nu+n)/2} C_{\nu+n}(\sqrt{\zeta}). \end{aligned}$$

应用倍乘公式 (3.54), 则得

^① 参见文献: E. D. Rainville. *Special Functions*. New York: Macmillan Co., 1960: 112. 直接将 (5.54a) 式左端的函数作 Taylor 展开即可证明.

$$\lambda^{\nu/2} C_{\nu}(\sqrt{\lambda\zeta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda-1}{2} \right)^n \zeta^{n/2} C_{\nu-n}(\sqrt{\zeta}),$$

$$\lambda^{-\nu/2} C_{\nu}(\sqrt{\lambda\zeta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\lambda-1}{2} \right)^n \zeta^{n/2} C_{\nu+n}(\sqrt{\zeta})$$

亦即

$$\lambda^{\nu} C_{\nu}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda^2-1}{2} \right)^n z^n C_{\nu-n}(z), \quad (5.56)$$

$$\lambda^{-\nu} C_{\nu}(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\lambda^2-1}{2} \right)^n z^n C_{\nu+n}(z). \quad (5.57)$$

这实际上就是第三章中的 (3.114) — (3.117) 式. 模仿前几题的做法, 就能够得到它们的反演公式

$$\lambda^{-\nu} C_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\lambda^2-1}{2\lambda} z \right)^n C_{\nu-n}(\lambda z), \quad (5.58)$$

$$\lambda^{\nu} C_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda^2-1}{2\lambda} z \right)^n C_{\nu+n}(\lambda z). \quad (5.59)$$

分别用 Bessel 函数 $J_{\nu}(z)$ 或 Neumann 函数 $N_{\nu}(z)$ 取代上面的 $C_{\nu}(z)$, 得到的就将是 (3.114) — (3.117) 式的反演公式.

☞ 讨论 不妨讨论 λ 的几种特殊形式, 例如 $\lambda = \cosh t$, 则有

$$\cosh^{\nu} t C_{\nu}(z \cosh t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z \sinh^2 t}{2} \right)^n C_{\nu-n}(z), \quad (5.60)$$

$$\cosh^{-\nu} t C_{\nu}(z \cosh t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z \sinh^2 t}{2} \right)^n C_{\nu+n}(z); \quad (5.61)$$

$$\cosh^{-\nu} t C_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z \sinh^2 t}{2 \cosh t} \right)^n C_{\nu-n}(z \cosh t), \quad (5.62)$$

$$\cosh^{\nu} t C_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z \sinh^2 t}{2 \cosh t} \right)^n C_{\nu+n}(z \cosh t). \quad (5.63)$$

或者令 $\lambda = \cos \theta$:

$$\cos^{\nu} \theta C_{\nu}(z \cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z \sin^2 \theta}{2} \right)^n C_{\nu-n}(z), \quad |\theta| < \pi/2, \quad (5.64)$$

$$\cos^{-\nu} \theta C_{\nu}(z \cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z \sin^2 \theta}{2} \right)^n C_{\nu+n}(z), \quad |\theta| < \pi/2; \quad (5.65)$$

$$\cos^{-\nu} \theta C_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z \sin^2 \theta}{2 \cos \theta} \right)^n C_{\nu-n}(z \cos \theta), \quad |\theta| < \pi/2, \quad (5.66)$$

$$\cos^{\nu} \theta C_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z \sin^2 \theta}{2 \cos \theta} \right)^n C_{\nu+n}(z \cos \theta), \quad |\theta| < \pi/2. \quad (5.67)$$

甚至还可以令 $\lambda = e^{i\theta}$:

$$e^{i\nu\theta} C_{\nu}(ze^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} (ze^{i\theta} \sin \theta)^n C_{\nu-n}(z), \quad (5.68)$$

$$e^{i\nu\theta} C_{\nu}(ze^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} (ze^{i\theta} \sin \theta)^n C_{\nu+n}(z); \quad (5.69)$$

$$e^{-i\nu\theta} C_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} (z \sin \theta)^n C_{\nu-n}(ze^{i\theta}), \quad (5.70)$$

$$e^{i\nu\theta} C_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} (z \sin \theta)^n C_{\nu+n}(ze^{i\theta}). \quad (5.71)$$

例 5.21 第三章中还给出了柱函数的加法公式 (3.105a) 与 (3.105b):

$$\begin{aligned} \zeta^{\nu/2} C_{\nu}(\sqrt{\zeta}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2} \right)^n z^{(\nu-n)/2} C_{\nu-n}(\sqrt{z}) (\zeta - z)^n, \\ \zeta^{-\nu/2} C_{\nu}(\sqrt{\zeta}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{2} \right)^n z^{-(\nu+n)/2} C_{\nu+n}(\sqrt{z}) (\zeta - z)^n. \end{aligned}$$

令 $\zeta = z + z'$, 则有


$$\left(\frac{z+z'}{z} \right)^{\nu/2} C_{\nu}(\sqrt{z+z'}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z'}{2} \right)^n z^{-n/2} C_{\nu-n}(\sqrt{z}), \quad (5.72)$$

$$\left(\frac{z+z'}{z} \right)^{-\nu/2} C_{\nu}(\sqrt{z+z'}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z'}{2} \right)^n z^{-n/2} C_{\nu+n}(\sqrt{z}). \quad (5.73)$$

它们覆盖了第三章中的 (3.177) (3.180) 式. 采用 Möbius 级数反演的标准步骤, 同样也能导出它们的反演公式:

$$\left(\frac{z+z'}{z} \right)^{-\nu/2} C_{\nu}(\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z'}{2} \right)^n (z+z')^{-n/2} C_{\nu-n}(\sqrt{z+z'}), \quad (5.74)$$

$$\left(\frac{z+z'}{z} \right)^{\nu/2} C_{\nu}(\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z'}{2} \right)^n (z+z')^{-n/2} C_{\nu+n}(\sqrt{z+z'}). \quad (5.75)$$

 讨论 作为 (5.72) 与 (5.73) 两式的另一种形式, 可令 $z = (\alpha\zeta)^2$, $z' = -(\beta\zeta)^2$, 并且将 ζ 重新写为 z , 则有

$$\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}\right)^{\nu/2} C_\nu(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\beta^2 z}{2\alpha}\right)^n C_{\nu-n}(\alpha z), \quad (5.76)$$

$$\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}\right)^{-\nu/2} C_\nu(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\beta^2 z}{2\alpha}\right)^n C_{\nu+n}(\alpha z). \quad (5.77)$$

它们的反演公式就是

$$\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}\right)^{-\nu/2} C_\nu(\alpha z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\beta^2 z}{2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}\right)^n C_{\nu-n}(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} z), \quad (5.78)$$

$$\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}\right)^{\nu/2} C_\nu(\alpha z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\beta^2 z}{2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}\right)^n C_{\nu+n}(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} z). \quad (5.79)$$

例 5.22 从虚宗量柱函数的倍乘公式 (即 (3.118) (3.121) 式)

$$\lambda^\nu I_\nu(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda^2 - 1}{2} z\right)^n I_{\nu-n}(z), \quad (5.80)$$

$$\lambda^{-\nu} I_\nu(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda^2 - 1}{2} z\right)^n I_{\nu+n}(z), \quad (5.81)$$

$$\lambda^\nu K_\nu(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\lambda^2 - 1}{2} z\right)^n K_{\nu-n}(z), \quad (5.82)$$

$$\lambda^{-\nu} K_\nu(\lambda z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\lambda^2 - 1}{2} z\right)^n K_{\nu+n}(z) \quad (5.83)$$

以及加法公式 (即 (3.181) — (3.184) 式)

$$\left(\frac{z+z'}{z}\right)^{\nu/2} I_\nu(\sqrt{z+z'}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z'}{2}\right)^n z^{-n/2} I_{\nu-n}(\sqrt{z}), \quad (5.84)$$

$$\left(\frac{z+z'}{z}\right)^{-\nu/2} I_\nu(\sqrt{z+z'}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z'}{2}\right)^n z^{-n/2} I_{\nu+n}(\sqrt{z}), \quad (5.85)$$

$$\left(\frac{z+z'}{z}\right)^{\nu/2} K_\nu(\sqrt{z+z'}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z'}{2}\right)^n z^{-n/2} K_{\nu-n}(\sqrt{z}), \quad (5.86)$$

$$\left(\frac{z+z'}{z}\right)^{-\nu/2} K_\nu(\sqrt{z+z'}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z'}{2}\right)^n z^{-n/2} K_{\nu+n}(\sqrt{z}) \quad (5.87)$$

出发, 重复例 5.20 与例 5.21 中的做法, 也能得到它们的反演公式:

$$\lambda^{-\nu} I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} z\right)^n I_{\nu-n}(\lambda z), \quad (5.88)$$

$$\lambda^\nu I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} z \right)^n I_{\nu+n}(\lambda z), \quad (5.89)$$

$$\lambda^{-\nu} K_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} z \right)^n K_{\nu-n}(\lambda z), \quad (5.90)$$

$$\lambda^\nu K_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} z \right)^n K_{\nu+n}(\lambda z) \quad (5.91)$$


以及

$$\left(\frac{z+z'}{z} \right)^{-\nu/2} I_\nu(\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z'}{2} \right)^n (z+z')^{-n/2} I_{\nu-n}(\sqrt{z+z'}), \quad (5.92)$$

$$\left(\frac{z+z'}{z} \right)^{\nu/2} I_\nu(\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z'}{2} \right)^n (z+z')^{-n/2} I_{\nu+n}(\sqrt{z+z'}), \quad (5.93)$$

$$\left(\frac{z+z'}{z} \right)^{-\nu/2} K_\nu(\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z'}{2} \right)^n (z+z')^{-n/2} K_{\nu-n}(\sqrt{z+z'}), \quad (5.94)$$

$$\left(\frac{z+z'}{z} \right)^{\nu/2} K_\nu(\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z'}{2} \right)^n (z+z')^{-n/2} K_{\nu+n}(\sqrt{z+z'}). \quad (5.95)$$

 **讨论** 完全类似于例 5.20 的讨论, 在 (5.80) — (5.83) 式中, 也可以代入特殊形式的 λ 值, 从而得到

$$\cosh^\nu t I_\nu(z \cosh t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z \sinh^2 t}{2 \cosh t} \right)^n I_{\nu-n}(z), \quad (5.96)$$

$$\cosh^{-\nu} t I_\nu(z \cosh t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z \sinh^2 t}{2 \cosh t} \right)^n I_{\nu+n}(z), \quad (5.97)$$

$$\cosh^\nu t K_\nu(z \cosh t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z \sinh^2 t}{2 \cosh t} \right)^n K_{\nu-n}(z), \quad (5.98)$$

$$\cosh^{-\nu} t K_\nu(z \cosh t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z \sinh^2 t}{2 \cosh t} \right)^n K_{\nu+n}(z); \quad (5.99)$$

$$\cos^\nu \theta I_\nu(z \cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z \sin^2 \theta}{2 \cos \theta} \right)^n I_{\nu-n}(z), \quad (5.100)$$

$$\cos^{-\nu} \theta I_\nu(z \cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z \sin^2 \theta}{2 \cos \theta} \right)^n I_{\nu+n}(z), \quad (5.101)$$

$$\cos^\nu \theta K_\nu(z \cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z \sin^2 \theta}{2 \cos \theta} \right)^n K_{\nu-n}(z), \quad (5.102)$$

$$\cos^{-\nu} \theta K_{\nu}(z \cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z \sin^2 \theta}{2 \cos \theta} \right)^n K_{\nu+n}(z); \quad (5.103)$$

$$e^{i\nu\theta} I_{\nu}(ze^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n \sin^n \theta K_{\nu-n}(z), \quad (5.104)$$

$$e^{-i\nu\theta} I_{\nu}(ze^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n \sin^n \theta K_{\nu+n}(z), \quad (5.105)$$

$$e^{i\nu\theta} K_{\nu}(ze^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} z^n \sin^n \theta K_{\nu-n}(z), \quad (5.106)$$

$$e^{-i\nu\theta} K_{\nu}(ze^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} z^n \sin^n \theta K_{\nu+n}(z). \quad (5.107)$$

相应地, 在 (5.88) (5.91) 式中作同样的代换, 得到的也就是 (5.96) (5.107) 式的 Möbius 反演:

$$\cosh^{-\nu} t I_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z \sinh^2 t}{2 \cosh t} \right)^n I_{\nu-n}(z \cosh t), \quad (5.108)$$

$$\cosh^{\nu} t I_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z \sinh^2 t}{2 \cosh t} \right)^n I_{\nu+n}(z \cosh t), \quad (5.109)$$

$$\cosh^{-\nu} t K_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z \sinh^2 t}{2 \cosh t} \right)^n K_{\nu-n}(z \cosh t), \quad (5.110)$$

$$\cosh^{\nu} t K_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z \sinh^2 t}{2 \cosh t} \right)^n K_{\nu+n}(z \cosh t); \quad (5.111)$$

$$\cos^{-\nu} \theta I_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z \sin^2 \theta}{2 \cos \theta} \right)^n I_{\nu-n}(z \cos \theta), \quad (5.112)$$

$$\cos^{\nu} \theta I_{\nu}(z \cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{z \sin^2 \theta}{2 \cos \theta} \right)^n I_{\nu+n}(z \cos \theta), \quad (5.113)$$

$$\cos^{-\nu} \theta K_{\nu}(z \cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z \sin^2 \theta}{2 \cos \theta} \right)^n K_{\nu-n}(z \cos \theta), \quad (5.114)$$

$$\cos^{\nu} \theta K_{\nu}(z \cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z \sin^2 \theta}{2 \cos \theta} \right)^n K_{\nu+n}(z \cos \theta); \quad (5.115)$$

$$e^{-i\nu\theta} I_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} z^n \sin^n \theta I_{\nu-n}(ze^{i\theta}), \quad (5.116)$$

$$e^{i\nu\theta} I_{\nu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} z^n \sin^n \theta I_{\nu+n}(ze^{i\theta}), \quad (5.117)$$

$$e^{-i\nu\theta}K_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n \sin^n \theta K_{\nu-n}(ze^{i\theta}), \quad (5.118)$$

$$e^{i\nu\theta}K_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^n \sin^n \theta K_{\nu+n}(ze^{i\theta}). \quad (5.119)$$

同理, 也可以给出 (5.84) (5.87) 式及 (5.92) (5.95) 式的特殊形式:

$$\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}\right)^{\nu/2} I_\nu(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\beta^2 z}{2\alpha}\right)^n I_{\nu-n}(\alpha z), \quad (5.120)$$

$$\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}\right)^{-\nu/2} I_\nu(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\beta^2 z}{2\alpha}\right)^n I_{\nu+n}(\alpha z), \quad (5.121)$$

$$\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}\right)^{\nu/2} K_\nu(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\beta^2 z}{2\alpha}\right)^n K_{\nu-n}(\alpha z), \quad (5.122)$$

$$\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}\right)^{-\nu/2} K_\nu(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\beta^2 z}{2\alpha}\right)^n K_{\nu+n}(\alpha z) \quad (5.123)$$

以及

$$\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}\right)^{\nu/2} I_\nu(\alpha z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\beta^2 z}{2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}\right)^n I_{\nu-n}(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} z), \quad (5.124)$$

$$\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}\right)^{\nu/2} I_\nu(\alpha z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\beta^2 z}{2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}\right)^n I_{\nu+n}(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} z), \quad (5.125)$$

$$\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}\right)^{-\nu/2} K_\nu(\alpha z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\beta^2 z}{2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}\right)^n K_{\nu-n}(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} z), \quad (5.126)$$

$$\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}\right)^{\nu/2} K_\nu(\alpha z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\beta^2 z}{2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}\right)^n K_{\nu+n}(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} z). \quad (5.127)$$

§5.4 卷积型积分变换的 Möbius 反演

作为 §5.1 中级数序列及其反演的推广, 由卷积型级数过渡到卷积型积分, 可以定义积分变换

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-x) Q(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} K(y) Q(x+y) dy, \quad (5.128)$$

其中积分变换核 $K(y)$ 就相当于叠加系数 $A(n)$. 如果存在反演核, 记为 $K^{-1}(y)$, 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t) K^{-1}(s-t) dt = \delta(s), \quad (5.129)$$

则有

$$\begin{aligned}
 Q(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(y) \delta(y-x) dy = \int_{-\infty}^{\infty} Q(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} K(t) K^{-1}(y-x-t) dt \right] dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} K(y-\tau) K^{-1}(\tau-x) d\tau \right] dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} K^{-1}(\tau-x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} Q(y) K(y-\tau) dy \right] d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} K^{-1}(\tau-x) P(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} K^{-1}(t) P(x+t) dt. \quad (5.130)
 \end{aligned}$$

这正是 (5.128) 式的反演. 反之, 由 (5.130) 式亦可推出 (5.128) 式, 只要条件 (5.129) 成立. 这也就证明了 $K(y)$ 与 $K^{-1}(y)$ 互为反演:

$$K(y) = [K^{-1}(y)]^{-1}. \quad (5.131)$$

类似地, 也可以定义积分变换

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t+x) Q(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} K(y) Q(y-x) dy. \quad (5.132)$$

在 (5.129) 式的条件下, 也能导出

$$Q(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K^{-1}(t+x) P(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} K^{-1}(y) P(y-x) dy. \quad (5.133)$$

反之, 由 (5.133) 式亦可推出 (5.132) 式.

由于这类积分变换是由卷积型级数的 Möbius 反演推广而来, 也由于积分变换核的具体特点, 因此不妨称之为卷积型积分变换.

(5.129) 式不单是判定变换核的唯一标准, 而且也提供了寻找变换核的可能途径. 例如, 如果 $K(x)$ 与 $K^{-1}(x)$ 的 Fourier 变换均存在:

$$k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{ixt} dx, \quad \bar{k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K^{-1}(x) e^{ixt} dx,$$

则根据 Fourier 变换的卷积公式 (见第十二章中的 (12.41) 式), 一定有

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t) \bar{k}(t) e^{-ixt} dt = \delta(x).$$

由此就可以得到

$$k(t) \bar{k}(t) = \frac{1}{2\pi}.$$

直接计算可以验证:

$$K(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{i\alpha x^2}, \quad K^{-1}(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-i\alpha x^2} \quad (5.134)$$

就是这样的积分变换核.

第六章 应用留数定理计算定积分

§6.1 几个引理

下面先列出几个引理, 在应用留数定理计算定积分时, 常常要用到它们.

引理 6.1 设 $f(z)$ 在 ∞ 点的邻域内连续, 当 $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$, $z \rightarrow \infty$ 时, $zf(z)$ 一致地趋近于 K , 则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = iK(\theta_2 - \theta_1), \quad (6.1)$$

其中 C_R 是以原点为圆心, R 为半径, 夹角为 $\theta_2 - \theta_1$ 的圆弧, $|z| = R$, $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$ (见图 6.1).

为了叙述方便, 以后就将此引理简称为大圆弧引理.

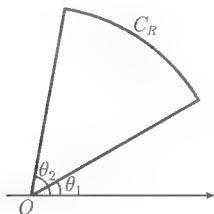


图 6.1 大圆弧引理

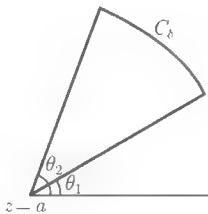


图 6.2 小圆弧引理

引理 6.2 若函数 $f(z)$ 在 $z = a$ 点的 (空心) 邻域内连续, 且当 $\theta_1 \leq \arg(z-a) \leq \theta_2$, $|z-a| \rightarrow 0$ 时, $(z-a)f(z)$ 一致地趋近于 k , 则

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} f(z) dz = ik(\theta_2 - \theta_1), \quad (6.2)$$

其中 C_δ 是以 $z = a$ 为圆心, δ 为半径, 夹角为 $\theta_2 - \theta_1$ 的圆弧, $|z-a| = \delta$, $\theta_1 \leq \arg(z-a) \leq \theta_2$ (见图 6.2).

以后称此引理为小圆弧引理.

在计算三角函数的无穷积分时, 常常用到 Jordan 引理, 例如适用于上半平面的 Jordan 引理:

引理 6.3a 设在 $0 \leq \arg z \leq \pi$ 的范围内, 当 $|z| \rightarrow \infty$ 时, $Q(z)$ 一致地趋近于 0, 则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) e^{ipz} dz = 0, \quad (6.3)$$

其中 $p > 0$, C_R 是以原点为圆心, R 为半径的半圆弧 (见图 6.3).

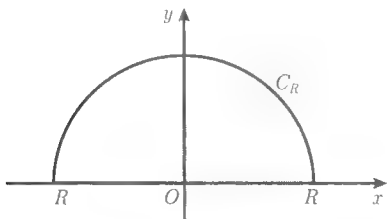


图 6.3 Jordan 引理应用于上半平面

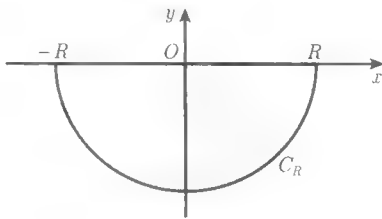


图 6.4 Jordan 引理应用于下半平面

作适当的旋转变换, 可以得到适用于其他半平面的 Jordan 引理. 例如, 将上面 (6.3) 式中的 z 改写为 $-z$, 但将这样出现的 $Q(-z)$ 仍写成 $Q(z)$, 则得到适用于下半平面的 Jordan 引理:

引理 6.3b 设在 $\pi \leq \arg z \leq 2\pi$ 的范围内, 当 $|z| \rightarrow \infty$ 时, $Q(z)$ 一致地趋近于 0, 则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) e^{-ipz} dz = 0, \quad (6.4)$$

其中 $p > 0$, C_R 是以原点为圆心, R 为半径的半圆弧 (见图 6.4).

类似地, 作变换 $z \rightarrow \pm iz$, 即得到适用于左半平面或右半平面的 Jordan 引理:

引理 6.3c 设在 $\pi/2 \leq \arg z \leq 3\pi/2$ 的范围内, 当 $|z| \rightarrow \infty$ 时, $Q(z)$ 一致地趋近于 0, 则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) e^{pz} dz = 0, \quad (6.5)$$

其中 $p > 0$, C_R 是以原点为圆心, R 为半径的半圆弧 (见图 6.5).

引理 6.3d 设在 $-\pi/2 \leq \arg z \leq \pi/2$ 的范围内, 当 $|z| \rightarrow \infty$ 时, $Q(z)$ 一致地趋

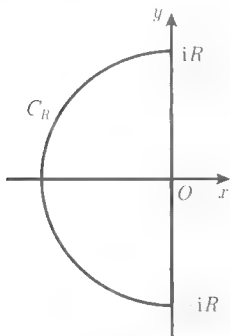


图 6.5 Jordan 引理应用于左半平面

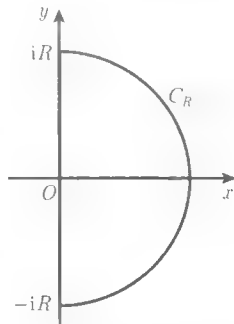


图 6.6 Jordan 引理应用于右半平面

近于 0, 则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) e^{-pz} dz = 0, \quad (6.6)$$

其中 $p > 0$, C_R 是以原点为圆心, R 为半径的半圆弧 (见图 6.6).

在应用普遍反演公式作 Laplace 变换的反演时, 常常要用到左半平面和右半平面的 Jordan 引理. 在作 Mellin 变换的反演时, 同样要用到它们.

以上讨论的 Jordan 引理, 涉及的都是半圆形的积分路径. 当然, 从证明中可以看出, Jordan 引理也适用于积分路径是张角小于 π 的圆弧. 另外, Jordan 引理还可以推广到张角大于 π 的情形. 例如, 上半平面的 Jordan 引理, 可以推广到圆弧在下半平面有恒定截距的情形. 在求 Laplace 变换反演时, 要用到这个结论.

Jordan 引理还可以应用于其他形式的积分路径. 例如, 对于矩形围道, 也可用到下列引理:

引理 6.4 设在 $0 \leq \arg z \leq \pi$ 的范围内, 当 $|z| \rightarrow \infty$ 时, $Q(z)$ 一致地趋近于 0, 则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_L Q(z) e^{ipz} dz = 0, \quad (6.7)$$

其中 $p > 0$, L 如图 6.7 所示, 是由 C_1 , C_2 和 C_3 组成的折线.

证 直接估计三条线段上的积分值. 在 C_1 上, $z = R + iy$, 所以

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_1} Q(z) e^{ipz} dz \right| &= \left| \int_0^R Q(R+iy) e^{ip(R+iy)} i dy \right| \\ &\leq \max\{Q(R+iy)\} \int_0^R e^{-py} dy = \max\{Q(R+iy)\} \cdot \frac{1}{p} (1 - e^{-pR}), \end{aligned}$$

其中 $\max\{Q(R+iy)\}$ 是 $|Q(z)|$ 在 C_1 上的最大值. 根据题设, 当 $R \rightarrow \infty$ 时, 应该有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \max\{Q(R+iy)\} = 0.$$

所以

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_1} Q(z) e^{ipz} dz \right| = 0.$$

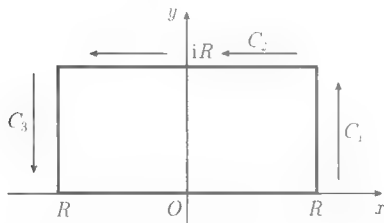


图 6.7 Jordan 引理应用于矩形路径

同理, 在 C_3 上, $z = -R + iy$, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_3} Q(z) e^{ipz} dz \right| &= \left| \int_R^0 Q(-R + iy) e^{ip(-R + iy)} i dy \right| \\ &\leq \max\{Q(-R + iy)\} \int_0^R e^{-py} dy \\ &= \max\{Q(-R + iy)\} \cdot \frac{1}{p} (1 - e^{-pR}) \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

在 C_2 上, $z = x + iR$, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_2} Q(z) e^{ipz} dz \right| &= \left| \int_R^{-R} Q(x + iR) e^{ip(x + iR)} dx \right| \\ &\leq \max\{Q(x + iR)\} \cdot 2R e^{-pR} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

综合以上结果, 就证得

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_L Q(z) e^{ipz} dz = 0. \quad \square$$

从以上过程可以看出, 矩形围道时 Jordan 引理的证明比半圆弧情形下来得简单, 这时并不需要寻找特殊的不等式.

完全类似于半圆弧时的做法, 通过适当的变换, 也可以将引理 6.4 变换为适用于不同辐角范围的半平面.

也可以从引理 6.3a 来推出引理 6.4. 这时可在矩形内再作半圆弧, 如图 6.8 所示, 考虑由 $L = C_1 + C_2 + C_3$ 及 $C_R^{(-)}$ 构成的围道 (准确地说是两个闭合围道). 因为被积函数在围道内无奇点, 故

$$\int_L Q(z) e^{ipz} dz - \int_{C_R} Q(z) e^{ipz} dz = 0.$$

所以就能由

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) e^{ipz} dz = 0$$

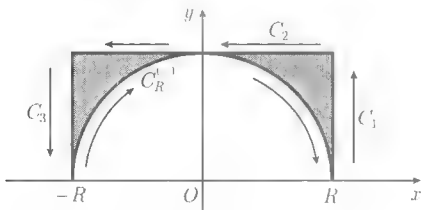


图 6.8 两种路径下 Jordan 引理的联系

推出

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_L Q(z) e^{ipz} dz = 0,$$

反之亦然.

下面介绍一些应用留数定理计算定积分的例子. 和教材不同, 这里将按照围道的形状分类, 希望或许能从另一个侧面了解这些定积分的共同特点.

§6.2 圆形围道

使用圆形围道时, 因为圆周上的变点 $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (或 $-\pi \leq \theta \leq \pi$), 所以这种围道多用于计算积分限为 0 与 2π (或 $-\pi$ 与 π) 的定积分.

例 6.1 计算积分 $\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2} d\theta$, 其中 $r \neq 1$ 为实数, n 为自然数.

解 这个积分的上、下限分别是 0 和 π , 但因为被积函数是偶函数, 故可化为从 $-\pi$ 到 π 的积分. 因此, 按照标准做法, 作变换 $z = e^{i\theta}$, 即可将积分路径化为 z 平面上的单位圆. 此时, 应当考虑围道积分

$$\oint_{|z|=1} \frac{z^n}{(z-r)(1-rz)} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta}}{(e^{i\theta}-r)(1-re^{i\theta})} e^{i\theta} i d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta}}{1-2r \cos \theta + r^2} i d\theta.$$

当 $r^2 < 1$ 时, 围道内有唯一一个奇点 $z = r$, 所以, 根据留数定理, 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta}}{1-2r \cos \theta + r^2} i d\theta = 2\pi i \times \frac{r^n}{1-r^2}.$$

比较虚部, 即得

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta}{1-2r \cos \theta + r^2} d\theta = \frac{2\pi r^n}{1-r^2}, \quad \text{即} \quad \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{1-2r \cos \theta + r^2} d\theta = \frac{\pi r^n}{1-r^2}. \quad (6.8a)$$

当 $r^2 > 1$ 时, 围道内的唯一一个奇点位于 $z = 1/r$ 处. 重复上面的计算步骤, 也可得到

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{1-2r \cos \theta + r^2} d\theta = \frac{\pi r^{-n}}{r^2-1}. \quad (6.8b)$$

讨论

1. 因为

$$2 \sin \theta \sin n\theta = \cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta,$$

所以根据 (6.8) 式还能导出

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta \sin n\theta}{1-2r \cos \theta + r^2} d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} r^{n-1}, & r^2 < 1, \\ -\frac{\pi}{2} r^{-n-1}, & r^2 > 1. \end{cases} \quad (6.9)$$

2. 因为

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta}{1-2r \cos \theta + r^2} \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \int_0^\pi \frac{2 \sin^2(\theta/2)}{1-2r \cos \theta + r^2} d\theta = \int_0^\pi \frac{1-\cos \theta}{1-2r \cos \theta + r^2} d\theta.$$

而当 $z = e^{i\theta}$ 时,

$$1 - \cos \theta = -\frac{(z-1)^2}{2z}.$$

所以计算围道积分 $\oint_{|z|=1} \frac{(1-z)^2}{(z-r)(1-rz)} \frac{dz}{z}$, 就可以计算得

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta}{1-2r \cos \theta + r^2} \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{1+r}, & r^2 < 1, \\ \frac{\pi}{r(1+r)}, & r^2 > 1. \end{cases} \quad (6.10)$$

3. 完全类似地, 读者可以计算围道积分 $\oint_{|z|=1} \frac{z^n}{rz^2 + 2z + r} dz$, 从而证明

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{1+r \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{1-r^2}} \left(\frac{-1+\sqrt{1-r^2}}{r} \right)^n, \quad r^2 < 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.11a)$$

或者令 $r = \sin \alpha$, $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$, 则有

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{1+\sin \alpha \cos \theta} d\theta = \frac{(-1)^n \pi}{\cos \alpha} \tan^n \frac{\alpha}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.11b)$$

例 6.2 计算积分 $\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{a - ib \cos \theta} d\theta$, $a > 0, b > 0$.

解 本题与例 6.1 相似, 故有

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{a - ib \cos \theta} d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \frac{\cos n\theta}{a - ib \cos \theta} d\theta = \frac{1}{2} \oint_{|z|=1} \frac{z^n + z^{-n}}{bz^2 + 2iaz + b} dz \\ &= \pi i \times \sum_{\text{单位圆内}} \operatorname{res} \left\{ \frac{z^n + z^{-n}}{bz^2 + 2iaz + b} \right\}. \end{aligned}$$

在积分围道内有两个奇点: $z = 0$ 及 $z = i(\sqrt{a^2 + b^2} - a)/b$, 求出被积函数在这两点的留数, 即算出所求积分.

但是本题还有更简便的办法, 原因是积分 $\int_{-\pi}^\pi \frac{\sin n\theta}{a - ib \cos \theta} d\theta = 0$, 因此

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{a - ib \cos \theta} d\theta = \frac{1}{2} \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{bz^2 + 2iaz + b} dz,$$

即只需要计算复变积分 $\oint_{|z|=1} \frac{z^n}{bz^2 + 2iaz + b} dz$. 这样, 被积函数在单位圆内只有一个奇点 $z = i(\sqrt{a^2 + b^2} - a)/b$, 因此

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{bz^2 + 2iaz + b} dz &= 2\pi i \frac{z^n}{(bz^2 + 2iaz + b)'} \Big|_{z=i(\sqrt{a^2+b^2}-a)/b} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(\frac{i}{b}\right)^n (\sqrt{a^2+b^2}-a)^n, \end{aligned}$$

从而就求得

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{a - ib \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(\frac{i}{b}\right)^n (\sqrt{a^2+b^2}-a)^n. \quad (6.12)$$

 **讨论** 进一步比较 (6.12) 式的实部和虚部, 还能得到

$$\int_0^\pi \frac{\cos 2n\theta}{a^2 + b^2 \cos^2 \theta} d\theta = \frac{(-1)^n \pi}{a b^{2n}} \frac{(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{2n}}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad (6.13a)$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta \cos 2n\theta}{a^2 + b^2 \cos^2 \theta} d\theta = 0, \quad (6.14a)$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos(2n+1)\theta}{a^2 + b^2 \cos^2 \theta} d\theta = 0, \quad (6.15a)$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta \cos(2n+1)\theta}{a^2 + b^2 \cos^2 \theta} d\theta = \frac{(-1)^n \pi}{b^{2n+2}} \frac{(\sqrt{a^2+b^2}-a)^{2n+1}}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad (6.16a)$$

令 $a = r \cos \alpha$, $b = r \sin \alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$, 又能将上述结果改写为

$$\int_0^\pi \frac{\cos 2n\theta}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \theta} d\theta = \frac{(-1)^n \pi}{\cos \alpha} \tan^{2n} \frac{\alpha}{2}, \quad (6.13b)$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta \cos 2n\theta}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \theta} d\theta = 0, \quad (6.14b)$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos(2n+1)\theta}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \theta} d\theta = 0, \quad (6.15b)$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta \cos(2n+1)\theta}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \theta} d\theta = \frac{(-1)^n \pi}{\sin \alpha} \tan^{2n+1} \frac{\alpha}{2}. \quad (6.16b)$$

例 6.3 计算积分 $v.p. \int_0^\pi \frac{e^{r \cos \theta} \cos(r \sin \theta)}{\cos \theta} d\theta$.

解 本题仍可化为沿单位圆的积分, 而被积函数为 $e^{rz}/(z^2+1)$. 因为奇点 $z = \pm i$ 正好位于单位圆上, 故需将积分围道稍作调整, 例如, 分别从 $z = i$ 的下方及 $z = -i$ 的上方绕过 (见图 6.9). 于是, 根据留数定理, 有

$$\oint_C \frac{e^{rz}}{z^2+1} dz = 0.$$

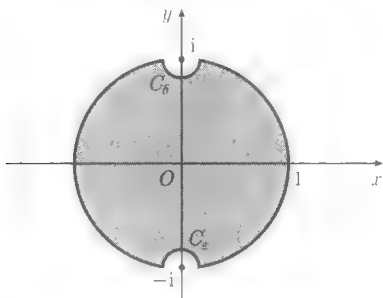


图 6.9 绕过奇点的单位圆

直接根据小圆弧引理能够证明

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{e^{rz}}{z^2+1} dz = -\pi i \times \frac{e^{ir}}{2i} = -\frac{\pi}{2} e^{ir}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{rz}}{z^2+1} dz = -\pi i \times \frac{e^{-ir}}{-2i} = \frac{\pi}{2} e^{-ir}.$$

因此, 在取极限 $\delta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ 后, 就有

$$\text{v.p.} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{r \cos \theta} e^{ir \sin \theta}}{e^{i2\theta} + 1} e^{i\theta} i d\theta - \frac{\pi}{2} (e^{ir} - e^{-ir}) = 0.$$

比较虚部, 即得

$$\text{v.p.} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{r \cos \theta} \cos(r \sin \theta)}{\cos \theta} d\theta = 2\pi \sin r. \quad (6.17a)$$

因为被积函数是偶函数, 所以

$$\text{v.p.} \int_0^{\pi} \frac{e^{r \cos \theta} \cos(r \sin \theta)}{\cos \theta} d\theta = \pi \sin r. \quad (6.17b)$$

讨论 如果将上面的结果作代换 $r \rightarrow -r$, 而后即可重新组合成

$$\int_0^{\pi} \frac{\sinh(r \cos \theta) \cos(r \sin \theta)}{\cos \theta} d\theta = \pi \sin r. \quad (6.18a)$$

而且, 还可以进一步化为

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sinh(r \cos \theta) \cos(r \sin \theta)}{\cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{2} \sin r. \quad (6.18b)$$

例 6.4 计算积分 $\int_0^{\pi} \cot(x-\alpha) dx$, $\text{Im } \alpha \neq 0$.

解 因为 $\cot z$ 的周期为 π , 所以

$$\int_0^{\pi} \cot(x-\alpha) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cot(x-\alpha) dx = \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{2i(x-\alpha)} + 1}{e^{2i(x-\alpha)} - 1} dx.$$

作变换 $z = e^{i(x-\alpha)}$, 则上述积分变为复平面上的围道积分

$$\frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{2i(x-\alpha)} + 1}{e^{2i(x-\alpha)} - 1} dx = \frac{1}{2} \oint_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} \frac{dz}{z},$$

其中积分围道为 $C: z = e^{i(x-\alpha)} | - e^{i\text{Im } \alpha}$, 见图 6.10. 因此, 当 $\text{Im } \alpha > 0$ 时, 被积函数在围道内有三个奇点: $z = 0, \pm 1$. 留数分别为

$$\text{res} \left\{ \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} \frac{1}{z} \right\}_{z=0} = -1, \quad \text{res} \left\{ \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} \frac{1}{z} \right\}_{z=1} = 1, \quad \text{res} \left\{ \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} \frac{1}{z} \right\}_{z=-1} = 1.$$

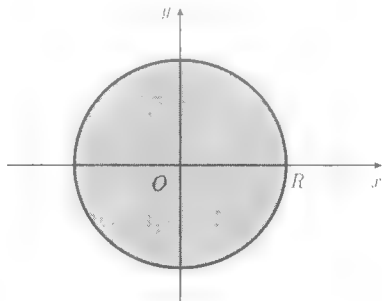


图 6.10 积分围道 $R = e^{\text{Im } \alpha}$

根据留数定理就有

$$\int_0^\pi \cot(x - \alpha) dx = \frac{1}{2} \oint_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} (-1 + 1 + 1) = \pi i.$$

当 $\text{Im } \alpha < 0$ 时, 围道内只有一个奇点 $z = 0$, 所以

$$\int_0^\pi \cot(x - \alpha) dx = \frac{1}{2} \oint_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \times (-1) = -\pi i.$$

把两个结果合并起来, 就可写成

$$\int_0^\pi \cot(x - \alpha) dx = \begin{cases} \pi i, & \text{Im } \alpha > 0, \\ -\pi i, & \text{Im } \alpha < 0. \end{cases} \quad (6.19)$$

§6.3 半圆形围道和扇形围道

标准的半圆形围道见图 6.11. 这种围道多用于计算无穷积分, 包括有理函数的无穷积分以及含有三角函数的无穷积分, 也包括含有双曲函数的无穷积分. 在采用

这种围道时,通常要求(复变积分的)被积函数在上半平面只有有限个奇点,只要半圆的半径足够大,就可以将全部奇点包含在内,应用留数定理,而后令半圆的半径趋于 ∞ ,只要能够准确求出沿半圆弧的积分的极限值(例如,根据大圆弧引理或 Jordan 引理判断出此极限值为0),即可计算出所求的定积分.另一种情况是被积函数在上半平面有无穷个奇点,此时仍可(有条件地)应用留数定理^①,但需令半圆的半径按照离散值(避开奇点)趋于 ∞ ,并且需要求出留数和(无穷级数).

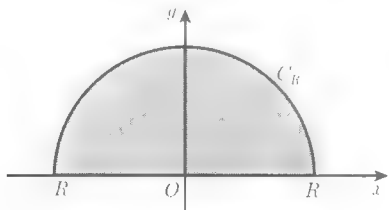


图 6.11 半圆形积分围道

例 6.5 采用半圆形的积分围道(见图 6.11),选择适当的被积函数,计算下列积分:

$$\int_0^{\infty} \frac{(1+x^2)\cos \alpha x}{1+x^2+x^4} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2+x^4} dx, \quad \alpha > 0.$$

解 考虑复变积分

$$\oint_C \frac{e^{i\alpha z}}{1+z+z^2} dz.$$

在积分围道内有奇点 $z_0 = e^{i2\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, 被积函数在该点的留数为

$$\left. \frac{e^{i\alpha z}}{1+2z} \right|_{z=z_0} = \frac{1}{i\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}\alpha/2} e^{-i\alpha/2}.$$

根据留数定理就有

$$\oint_C \frac{e^{i\alpha z}}{1+z+z^2} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{i\alpha z}}{1+z+z^2} dz + \int_{C_R} \frac{e^{i\alpha z}}{1+z+z^2} dz = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\sqrt{3}\alpha/2} e^{-i\alpha/2}.$$

因为

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{1+z+z^2} = 0.$$

所以

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i\alpha z}}{1+z+z^2} dz = 0.$$

^① 参见: 吴崇试, 数学物理方法, 第2版, 北京: 北京大学出版社, 2003: 90.

取极限 $R \rightarrow \infty$, 就得到

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x+x^2} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x + i \sin \alpha x}{1+x+x^2} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos \alpha x + i \sin \alpha x)(1-x+x^2)}{(1+x+x^2)(1-x+x^2)} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x^2) \cos \alpha x - ix \sin \alpha x}{1+x^2+x^4} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(1+x^2) \sin \alpha x - x \cos \alpha x}{1+x^2+x^4} dx \\
 &= 2 \int_0^{\infty} \frac{(1+x^2) \cos \alpha x - ix \sin \alpha x}{1+x^2+x^4} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}\alpha/2} e^{-i\alpha/2}.
 \end{aligned}$$

分别比较实部和虚部, 就得到

$$\int_0^{\infty} \frac{(1+x^2) \cos \alpha x}{1+x^2+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}\alpha/2} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (6.20a)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}\alpha/2} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (6.20b)$$

例 6.6 计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x} dx$.

解 令 $f(z) = \frac{e^{iz}}{\cosh z}$, 计算复变积分 $\oint_C f(z) dz$, 积分围道 C 仍如图 6.11 所示, 其中 C_R 不通过 $f(z)$ 的奇点, 即半径 $R \neq (2n+1)\pi/2$, $n=0, 1, 2, \dots$. 根据留数定理, 有

$$\begin{aligned}
 \oint_C f(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{\cosh x} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{\cosh z} dz \\
 &= 2\pi i \sum_{n=0}^N \operatorname{res} \left\{ \frac{e^{iz}}{\cosh z} \right\}_{z=(2n+1)\pi i/2} \\
 &= 2\pi \sum_{n=0}^N (-1)^n e^{-(2n+1)\pi/2}.
 \end{aligned}$$

为了判断沿半圆弧 C_R 积分的极限值, 需要将 C_R 分拆为三段: $0 < \theta < (\pi/2) - \delta$ (记为 $C_R^{(1)}$), $(\pi/2) - \delta < \theta < (\pi/2) + \delta$ (记为 $C_R^{(2)}$) 及 $(\pi/2) + \delta < \theta < \pi$ (记为 $C_R^{(3)}$), 其中 $0 < \delta < \pi/2$ 为任意常数. 在 $C_R^{(1)}$ 与 $C_R^{(3)}$ 段上, 直接有

$$\frac{1}{|\cosh z|} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(R \cos \theta) - \sin^2(R \sin \theta)}} \rightarrow 0;$$

而在 $C_R^{(2)}$ 段, 则因 $|\cosh z| \geq 1$, 故当序列 $\{C_R\}$ 的半径 R 趋于 ∞ 时, 有

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{e^{iz/2}}{\cosh z} = 0.$$

三段相加, 根据 Jordan 引理, 就有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{\cosh z} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iz/2} \cdot \frac{e^{iz/2}}{\cosh z} dz = 0,$$

所以取极限 $R \rightarrow \infty$, 即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{\cosh x} dx = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(2n+1)\pi/2} = \frac{2\pi e^{-\pi/2}}{1 + e^{-\pi}} = \frac{\pi}{\cosh \pi/2}.$$

比较上式两端的实部, 就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x} dx = \frac{\pi}{\cosh \pi/2}, \quad \text{即} \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x} dx = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\cosh \pi/2}. \quad (6.21)$$

☞ 讨论 亦可见下一节中的例 6.12. 本题是该例题的特殊情形.

例 6.7 计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin(a+2n)x - \sin ax}{\sin x} \frac{dx}{1+x^2}$, 其中 $a > -1$, n 为正整数.

解 表面上看来, 本题中被积函数的分母上出现了 $\sin x$, 似乎不好处理. 其实, 仔细分析一下, 可以发现

$$\begin{aligned} \frac{\sin(a+2n)x - \sin ax}{\sin x} &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{i(a+2n)x} - e^{iax}}{\sin x} \right\} = \operatorname{Im} \left\{ 2i \frac{e^{i(a+2n)x} - e^{iax}}{e^{ix} - e^{-ix}} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ 2e^{i(a+1)x} \frac{e^{i2nx} - 1}{e^{i2x} - 1} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 2e^{i(a+1)x} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i2kx} \right\}, \end{aligned}$$

所以本积分还是属于三角函数无穷积分. 因此, 还是应当采用半圆形围道, 计算复变积分

$$\oint_C e^{i(a+1)z} \frac{e^{i2nz} - 1}{e^{i2z} - 1} \frac{dz}{1+z^2}.$$

被积函数在围道内只有一个奇点: $z = i$, 所以, 根据留数定理, 有

$$\int_{-R}^R e^{i(a+1)x} \frac{e^{i2nx} - 1}{e^{i2x} - 1} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{C_R} e^{i(a+1)z} \frac{e^{i2nz} - 1}{e^{i2z} - 1} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \times e^{-(a+1)} \frac{e^{-2n} - 1}{e^{-2} - 1} \frac{1}{2i}.$$

由 Jordan 引理, 可以判断

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i(a+1)z} \frac{e^{i2nz} - 1}{e^{i2z} - 1} \frac{dz}{1+z^2} = 0,$$

因此, 令 $R \rightarrow \infty$, 就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(a+1)x} \frac{e^{i2nx} - 1}{e^{i2x} - 1} \frac{dx}{1+x^2} = \pi e^{-(a+1)} \frac{1 - e^{-2n}}{1 - e^{-2}}.$$

即

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(a+2n)x - \sin ax}{\sin x} \frac{dx}{1+x^2} = \pi e^{-(a+1)} \frac{1-e^{-2n}}{1-e^{-2}}. \quad (6.22)$$

例 6.8 计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{\cos bx} \frac{dx}{1+x^2}$, 其中 a, b 均为非零实数.

解 不妨设 $a > 0, b > 0$. 取积分围道为由下列几部分组成的闭合曲线:

- (1) 以原点为圆心, $n\pi/b$ 为半径的半圆弧 C_{R_n} , 位于上半平面.
- (2) 以 $z = (k+1/2)\pi/b$ 为圆心, ε_k 为半径的半圆弧 C_{ε_k} , $k = -n, -n+1, \dots, n-2, n-1$, 也都位于上半平面; 半径 ε_k 足够小, 因此这 $2n$ 个半圆弧不相交.
- (3) 实轴上的 $2n+1$ 个线段, 连接上述诸圆弧.

相应地, 取被积函数为 $\frac{e^{iaz}}{\cos bz} \frac{1}{1+z^2}$. 于是, 按照留数定理, 有

$$\oint_C \frac{e^{iaz}}{\cos bz} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \times \operatorname{res} \left\{ \frac{e^{iaz}}{\cos bz} \frac{1}{1+z^2} \right\}_{z=i} = \frac{\pi e^{-a}}{\cosh b}.$$

下面分别估计沿半圆弧 C_{R_n} 以及 C_{ε_k} 的积分值. 首先, 对于沿 C_{R_n} 的积分, 因为 $\cos(n\pi e^{i\theta}) \neq 0$, 且

$$|\cos(n\pi e^{i\theta})| = \sqrt{\cosh^2(n\pi \sin \theta) - \sin^2(n\pi \cos \theta)},$$

所以 $1 \leq \cosh(n\pi e^{i\theta}) \leq \cosh(n\pi)$, 从而有

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos bz} \frac{1}{1+z^2} = 0.$$

因此

$$\lim_{R_n \rightarrow \infty} \int_{C_{R_n}} \frac{e^{iaz}}{\cos bz} \frac{dz}{1+z^2} = 0.$$

至于沿 C_{ε_k} 的积分, 则因为 $z = (2k+1)\pi/(2b)$ 是一阶极点, 留数为

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \left\{ \frac{e^{iaz}}{\cos bz} \frac{1}{1+z^2} \right\}_{z=(2k+1)\pi/(2b)} &= \frac{e^{iaz}}{(\cos bz)'} \frac{1}{1+z^2} \Big|_{z=(2k+1)\pi/(2b)} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{b} \frac{1}{1 + [(2k+1)\pi/(2b)]^2} e^{i(2k+1)\pi a/(2b)} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{4b}{4b^2 + (2k+1)^2 \pi^2} e^{i(2k+1)\pi a/(2b)}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{C_{\varepsilon_k}} \frac{e^{iaz}}{\cos bz} \frac{dz}{1+z^2} &= -\pi i \times (-1)^{k+1} \frac{4b}{4b^2 + (2k+1)^2 \pi^2} e^{i(2k+1)\pi a/(2b)} \\ &= (-1)^k \frac{4b\pi i}{4b^2 + (2k+1)^2 \pi^2} e^{i(2k+1)\pi a/(2b)}. \end{aligned}$$

取极限 $R_n \rightarrow \infty$, $\varepsilon_k \rightarrow 0$, 就得到

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{\cos bx} \frac{dx}{1+x^2} &= \frac{\pi e^{-a}}{\cosh b} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4b\pi i}{4b^2 + (2k+1)^2\pi^2} e^{i(2k+1)\pi a/(2b)} \\ &= \frac{\pi e^{-a}}{\cosh b} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4b\pi i}{4b^2 + (2k+1)^2\pi^2} \left[e^{i(2k+1)\pi a/(2b)} - e^{-i(2k+1)\pi a/(2b)} \right] \\ &= \frac{\pi e^{-a}}{\cosh b} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{8b\pi}{4b^2 + (2k+1)^2\pi^2} \sin \frac{2k+1}{2b} \pi a. \end{aligned}$$

比较实部, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{\cos bx} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi e^{-a}}{\cosh b} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{8b\pi}{4b^2 + (2k+1)^2\pi^2} \sin \frac{2k+1}{2b} \pi a.$$

这里出现的和式正是 $\sinh x$ 按正交完备函数组 $\left\{ \sin \frac{2k+1}{2b} \pi x \right\}$ 的展开式:

$$\sinh x = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{2k+1}{2b} \pi x, \quad 0 \leq x < b,$$

其展开系数为

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{2}{b} \int_0^b \sinh x \sin \frac{2k+1}{2b} \pi x dx = \frac{1}{b} \int_0^b (e^x + e^{-x}) \sin \frac{2k+1}{2b} \pi x dx \\ &= \frac{2}{b} \frac{(-1)^k}{1 + [(2k+1)\pi/(2b)]^2} \cosh b = \frac{(-1)^k 8b}{(2k+1)^2\pi^2 + 4b^2} \cosh b, \end{aligned}$$

所以, 如果 $0 \leq a < b$, 就有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{\cos bx} \frac{dx}{1+x^2} = \pi \left(\frac{e^{-a}}{\cosh b} + \frac{\sinh a}{\cosh b} \right) = \frac{\pi \cosh a}{\cosh b}.$$

因此,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{\cos bx} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\cosh a}{\cosh b}. \quad (6.23)$$

讨论

1. 如果 $-b < a \leq 0$, 上述结果显然仍然成立.
2. 上面用到的展开式, 实际上应当理解为周期函数 $f(x) = f(x+2b)$:

$$f(x) = \sinh x, \quad -b < x < b$$

按周期函数 $\sin \frac{2k+1}{2b} \pi x$ 的 Fourier 展开, 所以, 如果 $a \notin (-b, b)$, 原则上应当按照周期函数的约定求出和函数.

3. 用类似的方法, 也能计算得

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\sinh a}{\sinh b}, \quad 0 \leq a < b, \quad (6.24)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{\cos bx} \frac{dx}{1-x^2} = 0, \quad 0 \leq a < b, \quad (6.25)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{\sin bx} \frac{dx}{1-x^2} = 0, \quad 0 \leq a < b. \quad (6.26)$$

再结合例 6.7, 又能导出

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(a+2n)x}{\sin x} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2 \sinh 1} (\cosh a - e^{-a-2n}), \quad 0 \leq a < 1. \quad (6.27)$$

例 6.9 应用留数定理计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - e^{-ax}}{x^4 + b^4} dx$, 其中 $a > 0, b > 0$.

解 取积分围道如图 6.12 所示, 计算复变积分 $\oint_C \frac{e^{iaz}}{z^4 + b^4} dz$. 因为被积函数在围道内只有一个奇点, 即一阶极点 $z = be^{i\pi/4} = b(1+i)/\sqrt{2}$, 留数为

$$-\frac{1}{4b^4} e^{iab(1+i)/\sqrt{2}} = -\frac{1}{4b^4} e^{-ab/\sqrt{2}} e^{iab/\sqrt{2}}.$$

所以, 按照留数定理, 有

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^R \frac{e^{iax}}{x^4 + b^4} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^4 + b^4} dz + \int_R^{\delta} \frac{e^{-ax}}{x^4 + b^4} dx + \int_{C_{\delta}} \frac{e^{iaz}}{z^4 + b^4} dz \\ = 2\pi i \times \left(-\frac{1}{4b^4} e^{-ab/\sqrt{2}} e^{iab/\sqrt{2}} \right) = -\frac{\pi i}{2} \frac{1}{b^4} e^{-ab/\sqrt{2}} e^{iab/\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

因为

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^4 + b^4} \frac{1}{z} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{e^{iaz}}{z^4 + b^4} \frac{1}{z} = \frac{1}{b^4},$$

所以, 分别按照 Jordan 引理及小圆弧引理, 有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z^4 + b^4} dz = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_{\delta}} \frac{e^{iaz}}{z^4 + b^4} dz = -\frac{i\pi}{2} \frac{1}{b^4}.$$

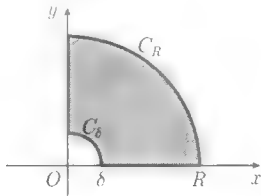


图 6.12 应用于例 6.9 的积分围道

综合以上结果, 并取极限 $R \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$, 就能得到

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{iax} - e^{-ax}}{x^4 + b^4} \frac{dx}{x} = \frac{i\pi}{2} \frac{1}{b^4} \left(1 - e^{-ab/\sqrt{2}} e^{iab/\sqrt{2}} \right).$$

比较实部, 即得

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - e^{-ax}}{x^4 + b^4} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{b^4} e^{-ab/\sqrt{2}} \sin \frac{ab}{\sqrt{2}}. \quad (6.28a)$$

与此同时, 比较虚部还能得到

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x^4 + b^4} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{b^4} \left(1 - e^{-ab/\sqrt{2}} \cos \frac{ab}{\sqrt{2}} \right). \quad (6.28b)$$

例 6.10 应用留数定理计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax^2+bx) - e^{-bx} \cos ax^2}{x} \frac{x^4+d^4}{x^4+c^4} dx$ 与 $\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax^2+bx) + e^{-bx} \sin ax^2}{x} \frac{x^4+d^4}{x^4+c^4} dx$, 其中 a, b, c, d 均为正数.

解 仍取积分围道如图 6.12 所示, 计算复变积分 $\oint_{C_R} e^{iaz^2+ibz} \frac{z^4+d^4}{z^4+c^4} \frac{dz}{z}$. 因为被积函数在围道内只有一个奇点, 即一阶极点 $z = c e^{i\pi/4} = c(1+i)/\sqrt{2}$, 留数为

$$\exp \left\{ -ac^2 + \frac{ibc}{\sqrt{2}} (1+i) \right\} \times \left(-\frac{d^4 - c^4}{4c^4} \right),$$

所以, 按照留数定理, 有

$$\begin{aligned} & \int_{\delta}^R e^{iaz^2+ibx} \frac{z^4+d^4}{z^4+c^4} \frac{dx}{x} + \int_{C_R} e^{iaz^2+ibz} \frac{z^4+d^4}{z^4+c^4} \frac{dz}{z} \\ & + \int_R^{\delta} e^{ia(ix)^2+ib(ix)} \frac{x^4+d^4}{x^4+c^4} \frac{dx}{x} + \int_{C_{\delta}} e^{iaz^2+ibz} \frac{z^4+d^4}{z^4+c^4} \frac{dz}{z} \\ & = 2\pi i \times e^{-ac^2+ibc(1+i)/\sqrt{2}} \times \left(-\frac{d^4-c^4}{4c^4} \right) \\ & = -2\pi i \times \frac{d^4-c^4}{4c^4} \times e^{-ac^2-bc/\sqrt{2}} e^{ibc/\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

对于 C_R 上的点 $z = Re^{i\theta}$, 当 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 而 R 足够大时, 有

$$\left| \frac{e^{iaz^2}}{z} \frac{z^4+d^4}{z^4+c^4} \right| = \frac{e^{-R^2 \sin 2\theta}}{R} \left| \frac{z^4+d^4}{z^4+c^4} \right| \leq \frac{1}{R} \frac{R^4+d^4}{R^4-c^4},$$

所以, 根据 Jordan 引理, 有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iaz^2+ibz} \frac{z^4+d^4}{z^4+c^4} \frac{dz}{z} = 0.$$

又因为

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{e^{iaz^2+ibz}}{z} \frac{z^4+d^4}{z^4+c^4} = \frac{d^4}{c^4},$$

因此

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} e^{iaz^2+ibz} \frac{z^4+d^4}{z^4+c^4} \frac{dz}{z} = -\frac{i\pi}{2} \frac{d^4}{c^4}.$$

于是, 取极限 $\delta \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, 就得到

$$\int_0^\infty \left(e^{iax^2+ibx} - e^{-iax^2-bx} \right) \frac{x^4+d^4}{x^4+c^4} \frac{dx}{x} = \frac{i\pi d^4}{2c^4} - \frac{i\pi}{2} \frac{d^4-c^4}{c^4} e^{-ac^2-bc/\sqrt{2}} \cdot e^{ibc/\sqrt{2}}.$$

再分别比较实部与虚部, 即求得

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax^2+bx) - e^{-bx} \cos ax^2}{x} \frac{x^4+d^4}{x^4+c^4} dx = \frac{\pi}{2} \frac{d^4-c^4}{c^4} e^{-ac^2-bc/\sqrt{2}} \sin \frac{bc}{\sqrt{2}}, \quad (6.29a)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax^2+bx) + e^{-bx} \sin ax^2}{x} \frac{x^4+d^4}{x^4+c^4} dx = \frac{\pi}{2} \frac{d^4}{c^4} - \frac{\pi}{2} \frac{d^4-c^4}{c^4} e^{-ac^2-bc/\sqrt{2}} \cos \frac{bc}{\sqrt{2}}. \quad (6.29b)$$

§6.4 矩形围道

在应用留数定理计算定积分时, 如果能将复变积分的被积函数写成分式, 分母具有周期性, 且周期为纯虚数, 就可以考虑采用矩形围道. 若矩形的底边长为 $2R$ (实轴上 $x = -R$ 到 $x = R$), 高度正好是一个周期 (在特殊情形下也可以是半周期), 令 $R \rightarrow \infty$ 就可能算出要求的积分.

例 6.11 采用矩形围道计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx$, 其中 $0 < \alpha < 1$.

解 选取被积函数为 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}$. 显然分母 $Q(z) = 1+e^z$ 为周期函数, $Q(z+2\pi i) = Q(z)$, 同时分子 $P(z) = e^{\alpha z}$ 也具有良好的变换性质: $P(z+2\pi i) = e^{2\pi\alpha i} P(z)$, 适合于采用矩形围道 (见图 6.13), 且矩形的高度为 2π . 函数 $f(z)$ 在此围道内只有一个奇点 $z = \pi i$, 留数为 $-e^{\alpha\pi i}$. 因此, 根据留数定理, 有

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^R \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx + \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} idy \\ & + \int_R^{-R} \frac{e^{\alpha(x+2\pi i)}}{1+e^x} dx + \int_{2\pi}^0 \frac{e^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} idy = -2\pi i e^{\alpha\pi i}. \end{aligned}$$

现在分别估计沿矩形两条侧边上的积分值. 因为

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} idy \right| \leq \frac{e^{\alpha R}}{e^R - 1} \int_0^{2\pi} dy = \frac{2\pi e^{\alpha R}}{e^R - 1},$$

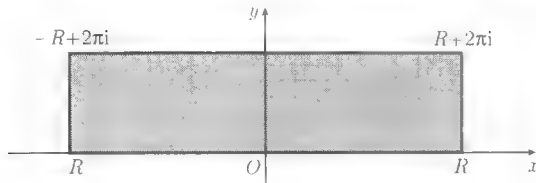


图 6.13 应用于例 6.11 的矩形积分围道

$$\left| \int_{2\pi}^0 \frac{e^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} idy \right| \leq e^{-\alpha R} \int_0^{2\pi} dy = 2\pi e^{-\alpha R},$$

所以

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\alpha(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} idy = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{2\pi}^0 \frac{e^{\alpha(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} idy = 0.$$

因此就得到

$$\begin{aligned} (1 - e^{2\pi\alpha i}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx &= -2\pi i e^{\pi\alpha i}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx &= \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \end{aligned} \quad (6.30)$$

讨论

1. 矩形围道的高度也可以取为 4π , 甚至 2π 的更高倍, 这时读者可以看到, 除了徒然在围道内出现更多个奇点外, 并不会给计算带来方便, 所以矩形的高度还是以 2π 为宜.

2. 如果作变换 $t = e^x$, 则 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x} dx = \int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt$. 后者在一般教材中都有计算^①.

3. 作为练习, 读者可计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\cosh x} dx = \frac{\pi}{\cos(\pi\alpha/2)}, \quad -1 < \operatorname{Re} \alpha < 1 \quad (6.31)$$

以及

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \alpha x}{\cosh x} dx = \frac{\pi}{\cos(\pi\alpha/2)}, \quad -1 < \operatorname{Re} \alpha < 1. \quad (6.32)$$

例 6.12 计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\alpha x}{\cosh x} dx$, 其中 $\alpha > 0$.

^① 例如, 可参见: 吴崇试. 数学物理方法. 第 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2003: 94.

解 本题与例 6.6 相似, 亦可仿照该题的办法计算. 现在改用矩形围道, 仍如图 6.13 所示, 只是高度变为 π . 取被积函数为 $f(z) = \frac{e^{-i2\alpha z}}{\cosh z}$, 此时围道内只有一个奇点 (一阶极点) $z = i\pi/2$, 留数为

$$\operatorname{res} f\left(\frac{i\pi}{2}\right) = \frac{e^{-i2\alpha z}}{(\cosh z)'} \Big|_{z=i\pi/2} = \frac{e^{-\pi\alpha}}{\sinh i\pi/2} = -i e^{-\pi\alpha},$$

所以, 根据留数定理, 有

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^{i2\alpha z}}{\cosh z} dz &= \int_{-R}^R \frac{e^{i2\alpha x}}{\cosh x} dx + \int_0^\pi \frac{e^{i2\alpha(R+iy)}}{\cosh(R+iy)} i dy \\ &\quad + \int_R^{-R} \frac{e^{i2\alpha(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)} dx + \int_\pi^0 \frac{e^{i2\alpha(R+iy)}}{\cosh(R+iy)} i dy \\ &= 2\pi i \times (-i e^{-\pi\alpha}) = 2\pi e^{-\pi\alpha}. \end{aligned}$$

而因为

$$\left| \int_0^\pi \frac{e^{i2\alpha(R+iy)}}{\cosh(R+iy)} i dy \right| < \frac{2\pi}{e^R - 1}, \quad \left| \int_\pi^0 \frac{e^{i2\alpha(R+iy)}}{\cosh(R+iy)} i dy \right| < \frac{2\pi}{e^R - 1}.$$

令 $R \rightarrow \infty$, 就得到

$$(1 + e^{-2\pi\alpha}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\alpha x}}{\cosh x} dx = 2\pi e^{-\pi\alpha},$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\alpha x}}{\cosh x} dx = \frac{\pi}{\cosh \pi\alpha}. \quad (6.33)$$

再比较实部, 即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\alpha x}{\cosh x} dx = \frac{\pi}{\cosh \pi\alpha}. \quad (6.34)$$

讨论

1. 采用同样的办法可以证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\alpha x}}{\cosh^n x} dx = \frac{2\pi i}{1 - (-1)^n e^{-2\pi\alpha}} \cdot \operatorname{res} \left\{ \frac{e^{i2\alpha z}}{\cosh^n z} \right\}_{z=i\pi/2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.35)$$

例如:

$$\begin{aligned} n = 2: \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\alpha x}}{\cosh^2 x} dx = \frac{2\pi\alpha}{\sinh \pi\alpha}; \\ n = 3: \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\alpha x}}{\cosh^3 x} dx = \frac{\pi}{2} \frac{1 + 4\alpha^2}{\cosh \pi\alpha}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n=4: \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\alpha x}}{\cosh^4 x} dx = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha + \alpha^3}{\sinh \pi\alpha}; \\
 n=5: \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\alpha x}}{\cosh^5 x} dx = \frac{\pi}{24} \frac{(1+4\alpha^2)(9+4\alpha^2)}{\cosh \pi\alpha}.
 \end{aligned}$$

再比较实部, 即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\alpha x}{\cosh^2 x} dx = \frac{2\pi\alpha}{\sinh \pi\alpha}, \quad (6.36)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\alpha x}{\cosh^3 x} dx = \frac{\pi}{2} \frac{1+4\alpha^2}{\cosh \pi\alpha}, \quad (6.37)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\alpha x}{\cosh^4 x} dx = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha + \alpha^3}{\sinh \pi\alpha}, \quad (6.38)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\alpha x}{\cosh^5 x} dx = \frac{\pi}{24} \frac{(1+4\alpha^2)(9+4\alpha^2)}{\cosh \pi\alpha}. \quad (6.39)$$

2. 将 (6.35) 式对 α 求导, 又能得到

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{i2\alpha x}}{\cosh^n x} dx &= \frac{1}{2i} \frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\alpha x}}{\cosh^n x} dx \\
 &= \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{\pi}{1 - (-1)^n e^{-2\pi\alpha}} \cdot \operatorname{res} \left\{ \frac{e^{i2\alpha z}}{\cosh^n z} \right\}_{z=\pi i/2} \right], \quad n=1, 2, 3, \dots,
 \end{aligned} \quad (6.40)$$

从而就可以计算出 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2\alpha x}{\cosh^n x} dx$ 型的积分:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2\alpha x}{\cosh x} dx = \frac{\pi^2}{2} \frac{\sinh \pi\alpha}{\cosh^2 \pi\alpha}, \quad (6.41)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2\alpha x}{\cosh^2 x} dx = \pi \left(\frac{\pi\alpha \cosh \pi\alpha}{\sinh^2 \pi\alpha} - \frac{1}{\sinh \pi\alpha} \right), \quad (6.42)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2\alpha x}{\cosh^3 x} dx = \frac{1+4\alpha^2}{4} \frac{\pi^2 \sinh \pi\alpha}{\cosh^2 \pi\alpha} - \frac{2\pi\alpha}{\cosh \pi\alpha}, \quad (6.43)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2\alpha x}{\cosh^4 x} dx = \frac{2\pi}{3} \left[(\alpha + \alpha^3) \frac{\pi \cosh \pi\alpha}{\sinh^2 \pi\alpha} - \frac{1+3\alpha^2}{\sinh \pi\alpha} \right]. \quad (6.44)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2\alpha x}{\cosh^5 x} dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{(1+4\alpha^2)(9+4\alpha^2)}{24} \frac{\pi \sinh \pi\alpha}{\cosh^2 \pi\alpha} - \frac{10\alpha + 8\alpha^3}{3 \cosh \pi\alpha} \right]. \quad (6.45)$$

例 6.13 仿照例 6.12 的做法, 还能计算得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\alpha x} \frac{\sinh x}{\cosh^n x} dx = \frac{2\pi i}{1 + (-1)^n e^{-2\pi\alpha}} \cdot \operatorname{res} \left\{ e^{i2\alpha z} \frac{\sinh z}{\cosh^n z} \right\}_{z=\pi i/2}. \quad (6.46)$$

其中 $\alpha > 0$, $n = 2, 3, 4, \dots$. 例如:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\alpha x} \frac{\sinh x}{\cosh^2 x} dx = \frac{2\pi\alpha i}{\cosh \pi\alpha}, \quad (6.47)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\alpha x} \frac{\sinh x}{\cosh^3 x} dx = \frac{2\pi\alpha^2 i}{\sinh \pi\alpha}, \quad (6.48)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\alpha x} \frac{\sinh x}{\cosh^4 x} dx = \frac{\pi i}{3} \frac{\alpha + 4\alpha^3}{\cosh \pi\alpha}, \quad (6.49)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\alpha x} \frac{\sinh x}{\cosh^5 x} dx = \frac{2\pi i}{3} \frac{\alpha^2 + \alpha^4}{\sinh \pi\alpha}. \quad (6.50)$$

比较上述诸式两端的虚部, 即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\alpha x \sinh x}{\cosh^2 x} dx = \frac{2\pi\alpha}{\cosh \pi\alpha}, \quad (6.51)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\alpha x \sinh x}{\cosh^3 x} dx = \frac{2\pi\alpha^2}{\sinh \pi\alpha}, \quad (6.52)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\alpha x \sinh x}{\cosh^4 x} dx = \frac{\pi}{3} \frac{\alpha + 4\alpha^3}{\cosh \pi\alpha}, \quad (6.53)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\alpha x \sinh x}{\cosh^5 x} dx = \frac{2\pi}{3} \frac{\alpha^2 + \alpha^4}{\sinh \pi\alpha}. \quad (6.54)$$

同样, 将 (6.46) 式两端对 α 微商, 又能得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\alpha x} \frac{x \sinh x}{\cosh^n x} dx = \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{2\pi i}{1 + (-1)^n e^{-2\pi\alpha}} \cdot \operatorname{res} \left\{ e^{i2\alpha z} \frac{\sinh z}{\cosh^n z} \right\}_{z=\pi i/2} \right],$$

因而又能进一步算出 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos 2\alpha x \sinh x}{\cosh^n x} dx$ 型的积分. 例如, 根据 (6.47) (6.50)

诸式的结果, 就有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos 2\alpha x \sinh x}{\cosh^2 x} dx = \pi \left(\frac{1}{\cosh \pi\alpha} - \frac{\pi\alpha \sinh \pi\alpha}{\cosh^2 \pi\alpha} \right), \quad (6.55)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos 2\alpha x \sinh x}{\cosh^3 x} dx = \pi \left(\frac{2\alpha}{\sinh \pi\alpha} - \frac{\pi\alpha^2 \cosh \pi\alpha}{\sinh^2 \pi\alpha} \right), \quad (6.56)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos 2\alpha x \sinh x}{\cosh^4 x} dx = \frac{\pi}{6} \left[\frac{1 + 12\alpha^2}{\cosh \pi\alpha} - \frac{\pi \sinh \pi\alpha}{\cosh^2 \pi\alpha} (\alpha + 4\alpha^3) \right], \quad (6.57)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos 2\alpha x \sinh x}{\cosh^5 x} dx = \frac{\pi}{3} \left[\frac{2\alpha + 4\alpha^3}{\sinh \pi\alpha} - \frac{\pi \cosh \pi\alpha}{\sinh^2 \pi\alpha} (\alpha^2 + \alpha^4) \right]. \quad (6.58)$$

例 6.14 计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-px}}{\cosh x \cosh(x+a) \cosh(x+b)} dx$, 其中 a 和 b 为不相等的非零实数, $-3 < p < 3$.

解 如例 6.12, 取被积函数为 $f(z) = \frac{e^{-pz}}{\cosh z \cosh(z+a) \cosh(x+b)}$, 矩形围道的高度仍为 π . 此时围道内有奇点 (均为一阶极点) $z = i\pi/2, -a + i\pi/2$ 及 $b + i\pi/2$,

留数分别为

$$\begin{aligned}
 \operatorname{res} \left\{ f\left(\frac{i\pi}{2}\right) \right\} &= \frac{e^{-pz}}{(\cosh z)' \cosh(z+a) \cosh(x+b)} \Big|_{z=i\pi/2} \\
 &= \frac{e^{-i\pi p/2}}{\cosh(a+i\pi/2) \cosh(b+i\pi/2)} = -\frac{1}{i} \frac{e^{-i\pi p/2}}{\sinh a \sinh b}, \\
 \operatorname{res} \left\{ f\left(-a+\frac{i\pi}{2}\right) \right\} &= \frac{e^{-pz}}{\cosh z [\cosh(z+a)]' \cosh(x+b)} \Big|_{z=-a+i\pi/2} \\
 &= \frac{e^{(a-i\pi)p/2}}{\cosh(-a+i\pi/2) \cosh(b-a+i\pi/2)} = \frac{1}{i} \frac{e^{ap} e^{-i\pi p/2}}{\sinh a \sinh(b-a)}, \\
 \operatorname{res} \left\{ f\left(-b+\frac{i\pi}{2}\right) \right\} &= \frac{e^{-pz}}{\cosh z \cosh(z+a) [\cosh(x+b)]'} \Big|_{z=-b+i\pi/2} \\
 &= \frac{e^{(-a+i\pi)p/2}}{\cosh(a-b+i\pi/2) \cosh(-b+i\pi/2)} = \frac{1}{i} \frac{e^{bp} e^{-i\pi p/2}}{\sinh(a-b) \sinh b}.
 \end{aligned}$$

根据留数定理, 有

$$\begin{aligned}
 &\int_{-R}^R \frac{e^{-px}}{\cosh x \cosh(x+a) \cosh(x+b)} dx \\
 &\quad + \int_0^\pi \frac{e^{-pR-ipy}}{\cosh(R+iy) \cosh(a+R+iy) \cosh(b+R+iy)} idy \\
 &\quad + \int_R^{-R} \frac{e^{-p(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi) \cosh(x+a+i\pi) \cosh(x+b+i\pi)} dx \\
 &\quad + \int_\pi^0 \frac{e^{pR-ipy}}{\cosh(-R+iy) \cosh(a-R+iy) \cosh(b-R+iy)} idy \\
 &= 2\pi i \times \frac{e^{-i\pi p/2}}{i} \left[-\frac{1}{\sinh a \sinh b} + \frac{e^{ap}}{\sinh a \sinh(b-a)} + \frac{e^{bp}}{\sinh(a-b) \sinh b} \right].
 \end{aligned}$$

取极限 $R \rightarrow \infty$, 因为

$$\begin{aligned}
 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{e^{-pR-ipy}}{\cosh(R+iy) \cosh(a+R+iy) \cosh(b+R+iy)} idy &= 0, \\
 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_\pi^0 \frac{e^{pR-ipy}}{\cosh(-R+iy) \cosh(a-R+iy) \cosh(b-R+iy)} idy &= 0.
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 & (1 + e^{-i\pi p}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-px}}{\cosh x \cosh(x+a) \cosh(x+b)} dx \\
 &= 2\pi \times e^{-i\pi p/2} \left[-\frac{1}{\sinh a \sinh b} + \frac{e^{ap}}{\sinh a \sinh(b-a)} + \frac{e^{bp}}{\sinh(a-b) \sinh b} \right].
 \end{aligned}$$

化简即得

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-px}}{\cosh x \cosh(x+a) \cosh(x+b)} dx \\
 &= \frac{\pi}{\cos(\pi p/2)} \left[-\frac{1}{\sinh a \sinh b} + \frac{e^{ap}}{\sinh a \sinh(b-a)} + \frac{e^{bp}}{\sinh(a-b) \sinh b} \right].
 \end{aligned} \tag{6.59}$$

例 6.15 计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + e^{2a}} \frac{dx}{x^2 + \pi^2}$, 其中 a 为实数.

解 本题中的被积函数是周期函数 $\frac{e^x}{e^{2x} + e^{2a}}$ 与

$$\frac{1}{x^2 + \pi^2} = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x - \pi i} - \frac{1}{x + \pi i} \right)$$

的乘积, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + e^{2a}} \frac{dx}{x^2 + \pi^2} = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + e^{2a}} \frac{dx}{x - \pi i} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + e^{2a}} \frac{dx}{x + \pi i} \right),$$

所以仍可采用图 6.13 中的矩形围道, 只是被积函数应当取为

$$f(z) = \frac{e^z}{e^{2z} + e^{2a}} \frac{1}{z - \pi i}.$$

这时围道内有三个奇点: $z = \pi i$, $z = a + \pi i/2$ 和 $z = \ln a + 3\pi i/2$, 留数分别为

$$\begin{aligned}
 \operatorname{res} f(\pi i) &= \frac{e^z}{e^{2z} + e^{2a}} \Big|_{z=\pi i} = -\frac{1}{1 + e^{2a}}, \\
 \operatorname{res} f\left(a + \frac{\pi i}{2}\right) &= \frac{1}{2} \frac{e^{-z}}{z - \pi i} \Big|_{z=a+\pi i/2} = -\frac{i}{2} \frac{e^{-a}}{a - \pi i/2}, \\
 \operatorname{res} f\left(a + \frac{3\pi i}{2}\right) &= \frac{1}{2} \frac{e^{-z}}{z - \pi i} \Big|_{z=a+3\pi i/2} = \frac{i}{2} \frac{e^{-a}}{a + \pi i/2},
 \end{aligned}$$

因此, 由留数定理, 有

$$\begin{aligned}
 & \int_{-R}^R \frac{e^x}{e^{2x} + e^{2a}} \frac{dx}{x - \pi i} + \int_0^{2\pi} \frac{e^{R+iy}}{e^{2(R+iy)} + e^{2a}} \frac{idy}{R + iy - \pi i} \\
 &+ \int_R^{-R} \frac{e^x}{e^{2x} + e^{2a}} \frac{dx}{x + \pi i} + \int_{2\pi}^0 \frac{e^{-R+iy}}{e^{2(-R+iy)} + e^{2a}} \frac{idy}{-R + iy - \pi i} \\
 &= 2\pi i \left(-\frac{1}{1 + e^{2a}} - \frac{i}{2} \frac{e^{-a}}{a - \pi i/2} + \frac{i}{2} \frac{e^{-a}}{a + \pi i/2} \right).
 \end{aligned}$$

取极限 $R \rightarrow \infty$, 因为

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{R+iy}}{e^{2(R+iy)} + e^{2a}} \frac{idy}{R+iy-\pi i} = 0,$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{2\pi}^0 \frac{e^{-R+iy}}{e^{2(-R+iy)} + e^{2a}} \frac{idy}{-R+iy-\pi i} = 0,$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + e^{2a}} \left(\frac{1}{x-\pi i} - \frac{1}{x+\pi i} \right) dx = 2\pi i \left(-\frac{1}{1+e^{2a}} + \frac{2\pi e^{-a}}{4a^2 + \pi^2} \right).$$

亦即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + e^{2a}} \frac{dx}{x^2 + \pi^2} = \frac{2\pi e^{-a}}{4a^2 + \pi^2} - \frac{1}{1+e^{2a}}. \quad (6.60a)$$

讨论

1. 若 a 为复数, $-\pi/2 < \operatorname{Im} a < \pi/2$, 本题的结果仍然成立.

2. 作变换 $e^x = t$, $e^a = b$, 则本题的积分即化为 $\int_0^{\infty} \frac{1}{t^2 + b^2} \frac{dt}{\ln^2 t + \pi^2}$, 因而有

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + b^2} \frac{dx}{\ln^2 x + \pi^2} = \frac{2\pi}{b} \frac{1}{4\ln^2 b + \pi^2} - \frac{1}{1+b^2}, \quad |\arg b| < \frac{\pi}{2}. \quad (6.60b)$$

是否也可直接采用留数定理计算此积分?

3. 在 (6.60b) 式中代入 $b=1$, 即得

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \frac{dx}{\ln^2 x + \pi^2} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}. \quad (6.60c)$$

更进一步, 还能导出

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} \frac{dx}{\ln^2 x + \pi^2} = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \frac{dx}{\ln^2 x + \pi^2} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}. \quad (6.60d)$$

例 6.16 计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sinh x} dx$.

解 本题和例 6.11 相似, 故取被积函数为 $f(z) = z/\sinh z$, 仍采用矩形围道, 矩形的高为 π ; 由于 $z=0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点, 无须特殊考虑, 但 $z=\pi i$ 是 $f(z)$ 的奇点 (一阶极点), 故围道应稍作修改, 见图 6.14. 根据留数定理, 有

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^R \frac{x}{\sinh x} dx + \int_0^{\pi} \frac{R+iy}{\sinh(R+iy)} i dy + \int_R^{R-\delta} \frac{x+i\pi}{\sinh(x+i\pi)} dx \\ & + \int_{C_{\delta}} \frac{z}{\sinh z} dz + \int_{-\delta}^{-R} \frac{x+i\pi}{\sinh(x+i\pi)} dx + \int_{\pi}^0 \frac{-R+iy}{\sinh(-R+iy)} i dy = 0. \end{aligned}$$

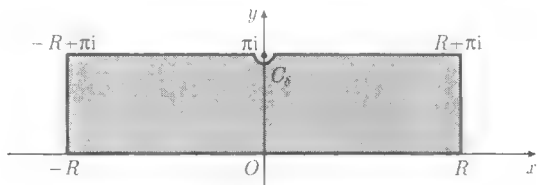


图 6.14 应用于例 6.16 的矩形积分围道

因为

$$\lim_{z \rightarrow \pi i} (z - \pi i) \cdot \frac{z}{\sinh z} = -\pi i.$$

所以

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{z}{\sinh z} dz = -\pi i \times (-\pi i) = -\pi^2.$$

同时由于 $R \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\left| \int_0^\pi \frac{R + iy}{\sinh(R + iy)} i dy \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{R + iy}{\sinh(R + iy)} \right| dy \leq \int_0^\pi \frac{2R}{\sinh R} dy = \frac{2\pi R}{\sinh R} \rightarrow 0.$$

$$\left| \int_\pi^0 \frac{-R + iy}{\sinh(-R + iy)} i dy \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{-R + iy}{\sinh(-R + iy)} \right| dy \leq \int_0^\pi \frac{2R}{\sinh R} dy = \frac{2\pi R}{\sinh R} \rightarrow 0.$$

所以, 取极限 $R \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$, 就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sinh x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x + \pi i}{\sinh x} - \pi^2 = 0.$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sinh x} dx = \frac{1}{2} \pi^2. \quad (6.61)$$

 **讨论** 可否采用半圆形围道计算此积分? 你能预料会遇到什么困难?

例 6.17 计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{\sinh x} dx$, 其中 $\alpha > 0$.

解 仍采用图 6.14 中的积分围道, 计算复变积分 $\oint_C \frac{\sin \alpha z}{\sinh z} dz$:

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^R \frac{\sin \alpha x}{\sinh x} dx + \int_0^\pi \frac{\sin \alpha(R + iy)}{\sinh(R + iy)} i dy + \int_R^{R-\delta} \frac{\sin \alpha(x + i\pi)}{\sinh(x + i\pi)} dx \\ & + \int_{C_\delta} \frac{\sin \alpha z}{\sinh z} dz + \int_{-\delta}^{-R} \frac{\sin \alpha(x + i\pi)}{\sinh(x + i\pi)} dx + \int_\pi^0 \frac{\sin \alpha(-R + iy)}{\sinh(-R + iy)} i dy = 0. \end{aligned}$$

类似于上题的计算, 因为

$$\lim_{z \rightarrow \pi i} (z - \pi i) \cdot \frac{\sin \alpha z}{\sinh z} = -i \sinh \pi \alpha,$$

所以

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{\sin \alpha z}{\sinh z} dz = -i\pi \times (-i \sinh \pi\alpha) = -\pi \sinh \pi\alpha.$$

同时由于

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi \frac{\sin \alpha(R+iy)}{\sinh(R+iy)} i dy \right| &\leq \int_0^\pi \left| \frac{\sin \alpha(R+iy)}{\sinh(R+iy)} \right| dy \\ &\leq \int_0^\pi \frac{\cosh \alpha R}{\sinh R} dy = \frac{\pi \cosh \alpha R}{\sinh R} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty, \\ \left| \int_\pi^0 \frac{\sin \alpha(-R+iy)}{\sinh(-R+iy)} i dy \right| &\leq \int_0^\pi \left| \frac{\sin \alpha(-R+iy)}{\sinh(-R+iy)} \right| dy \\ &\leq \int_0^\pi \frac{\cosh \alpha R}{\sinh R} dy = \frac{\pi \cosh \alpha R}{\sinh R} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

所以取极限 $R \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$, 就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{\sinh x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha(x+\pi i)}{\sinh x} dx - \pi \sinh \pi\alpha = 0.$$

注意到 $\sin \alpha(x+\pi i) = \sin \alpha x \cosh \pi\alpha + i \cos \alpha x \sinh \pi\alpha$, 所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha(x+\pi i)}{\sinh x} dx = \cosh \pi\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{\sinh x} dx.$$

于是最后就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{\sinh x} dx = \frac{\pi \sinh \pi\alpha}{1 + \cosh \pi\alpha} = \pi \tanh \frac{\pi\alpha}{2}. \quad (6.62)$$

讨论

1. (6.62) 式在 $\alpha = 0$ 时亦成立.
2. 被积函数也可取为 $e^{i\alpha z} / \sinh z$, 但积分围道需稍作修改.
3. 可否采用半圆形围道计算此积分? 是否也会遇到什么困难?
4. 作为练习, 请读者证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos \alpha x}{\sinh x} dx = \frac{2\pi^2 e^{\pi\alpha}}{(1 + e^{\pi\alpha})^2}, \quad \alpha \geq 0. \quad (6.63)$$

例 6.18 计算积分 $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} dx$, 其中 $r > 0$, 且 $r \neq 1$.

解 这是采用矩形围道计算定积分的一个特例, 特殊之处在于矩形的宽度有限 (为 2π) 而高度趋于 ∞ , 见图 6.15. 计算的复变积分是

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{z}{r - e^{-iz}} dz.$$

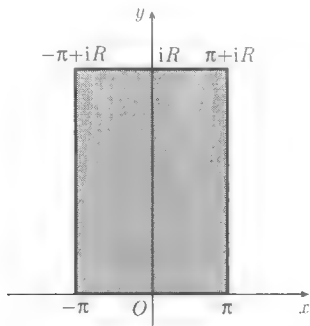


图 6.15 应用于例 6.18 的矩形积分围道

这时被积函数的奇点为 $z = i \ln r + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 当 $0 < r < 1$ 时, 这些奇点全都位于围道之外; 而当 $r > 1$ 时, 围道内只有唯一一个奇点 (一阶极点) $z = i \ln r$. 下面就分别讨论这两种情形.

当 $0 < r < 1$ 时, 按照留数定理, 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{r - e^{-ix}} dx + \int_0^R \frac{\pi + iy}{r + e^y} i dy + \int_{\pi}^{-\pi} \frac{x + iR}{r - e^{R-ix}} dx + \int_R^0 \frac{-\pi + iy}{r + e^y} i dy = 0.$$

令 $R \rightarrow \infty$, 因为

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^R \frac{\pi + iy}{r + e^y} i dy + \int_R^0 \frac{-\pi + iy}{r + e^y} i dy \right\} = 2\pi i \int_0^{\infty} \frac{dy}{r + e^y} = \frac{2\pi i}{r} \ln(1 + r),$$

同时, 当 $R \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\left| \int_{\pi}^{-\pi} \frac{x + iR}{r - e^{R-ix}} dx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2R}{e^{\frac{R}{2}} - \pi} dx \rightarrow 0.$$

所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{r - e^{-ix}} dx = -\frac{2\pi i}{r} \ln(1 + r).$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{r - e^{-ix}} dx &= \int_{-\pi}^0 \frac{x}{r - e^{-ix}} dx + \int_0^{\pi} \frac{x}{r - e^{-ix}} dx \\ &= -\int_0^{\pi} \frac{x}{r - e^{ix}} dx + \int_0^{\pi} \frac{x}{r - e^{-ix}} dx \\ &= -2i \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} dx, \end{aligned}$$

由此即得

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} dx = \frac{\pi}{r} \ln(1+r), \quad 0 < r < 1. \quad (6.64a)$$

当 $r > 1$ 时, 需要计入被积函数在奇点 $z = i \ln r$ 处的留数

$$\operatorname{res} \left\{ \frac{z}{r - e^{-iz}} \right\}_{z=i \ln r} = \frac{z}{i e^{-iz}} \Big|_{z=i \ln r} = \frac{\ln r}{r}.$$

重复上面的计算, 又可得到

$$-2i \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} dx = \frac{2\pi i}{r} \ln r - \frac{2\pi i}{r} \ln(1+r),$$

即

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2} dx = \frac{\pi}{r} [\ln(1+r) - \ln r] = \frac{\pi}{r} \ln \left(1 + \frac{1}{r} \right), \quad r > 1. \quad (6.64b)$$

§6.5 实轴上有奇点的情形

例 6.19 计算积分 $\text{v.p.} \int_0^\infty \frac{x \sin ax}{x^2 - r^2} dx$ 及 $\text{v.p.} \int_0^\infty \frac{r \cos ax}{x^2 - r^2} dx$, 其中 $a > 0, r > 0$.

解 本题的特殊之处是在实轴上有奇点: $z = \pm r$, 积分围道应避开这些奇点; 同时希望使得计算尽可能简单, 能一次就同时算出这两个积分, 因此采用的复变积分为 $\oint_C \frac{e^{iaz}}{z - r} dz$, 而积分围道如图 6.16 所示. 根据留数定理, 就能写出:

$$\int_{-R}^{r-\delta} \frac{e^{iax}}{x - r} dx + \int_{C_\delta} \frac{e^{iaz}}{z - r} dz + \int_{r+\delta}^R \frac{e^{iax}}{x - r} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z - r} dz = 0.$$

因为

$$\lim_{z \rightarrow r} (z - r) \cdot \frac{e^{iaz}}{z - r} = e^{iar}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z - r} = 0,$$

所以分别根据小圆弧引理及 Jordan 引理, 有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{e^{iaz}}{z - r} dz = -i\pi e^{iar}, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z - r} dz = 0.$$

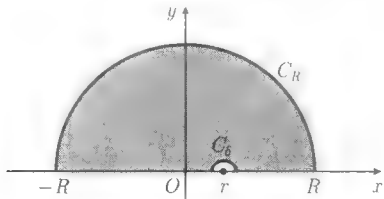


图 6.16 应用于例 6.19 的积分围道

因此, 取极限 $R \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$, 就得到

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x-r} dx &= \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+r)e^{iax}}{x^2-r^2} dx \\ &= \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r \cos ax + i x \sin ax}{x^2-r^2} dx = i\pi e^{iar}. \end{aligned}$$

比较实部和虚部, 即得

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{r \cos ax}{x^2-r^2} dx = -\frac{\pi}{2} \sin ar, \quad (6.65a)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2-r^2} dx = \frac{\pi}{2} \cos ar. \quad (6.65b)$$

例 6.20 计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{x^2-a^2} dx$, 其中 $a > 0$.

解 因为

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2a - \cos 2x}{x^2-a^2} dx,$$

所以考虑复变积分

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{e^{2ia} - e^{2iz}}{z^2 - a^2} dz.$$

其中积分围道 C 见图 6.17. $f(z)$ 在积分围道内无奇点, 故

$$\begin{aligned} &\int_{-R}^{-a-\varepsilon} \frac{e^{2ia} - e^{2iz}}{z^2 - a^2} dx + \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{2ia} - e^{2iz}}{z^2 - a^2} dz \\ &+ \int_{-a+\varepsilon}^R \frac{e^{2ia} - e^{2iz}}{z^2 - a^2} dx + \int_{C_R} \frac{e^{2ia} - e^{2iz}}{z^2 - a^2} dz = 0. \end{aligned}$$

因为

$$\lim_{z \rightarrow -a} (z+a) \frac{e^{2ia} - e^{2iz}}{z^2 - a^2} = \frac{-i \sin 2a}{a}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot \frac{1}{z^2 - a^2} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2 - a^2} = 0,$$

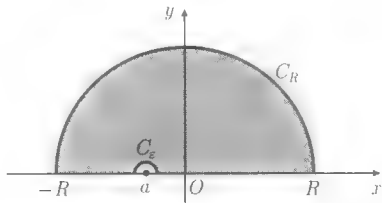


图 6.17 应用于例 6.20 的积分围道

所以有

$$\lim_{z \rightarrow -a} \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{2ia} - e^{2iz}}{z^2 - a^2} dz = -\frac{\pi}{a} \sin 2a,$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{2ia}}{z^2 - a^2} dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{2iz}}{z^2 - a^2} dz = 0.$$

因此, 取极限 $\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$, 得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ia} - e^{2ix}}{x^2 - a^2} dx = \frac{\pi}{a} \sin 2a.$$

比较实部, 就给出

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2a - \cos 2x}{x^2 - a^2} dx = \frac{\pi}{a} \sin 2a, \quad (6.66)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x+a) \sin(x-a)}{x^2 - a^2} dx = \frac{\pi}{4a} \sin 2a. \quad (6.67)$$

例 6.21 计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px} - e^{qx}}{1 - e^x} dx, 0 < p < 1$, 其中 $0 < q < 1$.

解 应该先计算 v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{1 - e^x} dx$. 为此, 考虑积分 $\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{e^{pz}}{1 - e^z} dz$, 其中积分围道 C 如图 6.18 所示. 根据留数定理, 有

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^{pz}}{1 - e^z} dz &= \int_{-R}^{-\delta} \frac{e^{px}}{1 - e^x} dx + \int_{C_\delta} \frac{e^{pz}}{1 - e^z} dz + \int_{\delta}^R \frac{e^{px}}{1 - e^x} dx \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \frac{e^{p(R+iy)}}{1 - e^{R+iy}} i dy + \int_R^\varepsilon \frac{e^{p(x+2\pi i)}}{1 - e^x} dx + \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{pz}}{1 - e^z} dz \\ &\quad + \int_{-\varepsilon}^{-R} \frac{e^{p(x+2\pi i)}}{1 - e^x} dx + \int_{2\pi}^0 \frac{e^{p(-R+iy)}}{1 - e^{-R+iy}} i dy = 0. \end{aligned}$$

因为

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{e^{pz}}{1 - e^z} = -1, \quad \lim_{z \rightarrow 2\pi i} (z - 2\pi i) \cdot \frac{e^{pz}}{1 - e^z} = -e^{i2\pi p},$$

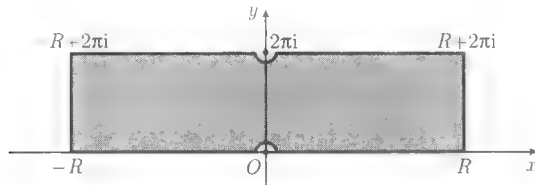


图 6.18 应用于例 6.21 的积分围道

所以

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{e^{pz}}{1-e^z} dz = \pi i, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{pz}}{1-e^z} dz = \pi i e^{i2\pi p}.$$

同时考虑到

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{p(R+iy)}}{1-e^{R+iy}} i dy \right| &\leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{p(R+iy)}}{1-e^{R+iy}} \right| dy \\ &\leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{pR}}{e^R-1} dy = 2\pi \cdot \frac{e^{pR}}{e^R-1} \rightarrow 0. \\ \left| \int_{2\pi}^0 \frac{e^{p(-R+iy)}}{1-e^{-R+iy}} i dy \right| &\leq \int_{2\pi}^0 \left| \frac{e^{p(-R+iy)}}{1-e^{-R+iy}} \right| dy \\ &\leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{-pR}}{1-e^{-R}} dy = 2\pi \cdot \frac{e^{-pR}}{1-e^{-R}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

所以就得到

$$(1 - e^{i2\pi p}) \times \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{1-e^x} dx = -\pi i (1 + e^{i2\pi p}),$$

即

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{1-e^x} dx = -\pi i \frac{1 + e^{i2\pi p}}{1 - e^{i2\pi p}} = \pi \cot \pi p. \quad (6.68)$$

由此就求出了

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px} - e^{qx}}{1-e^x} dx = \pi (\cot \pi p - \cot \pi q). \quad (6.69)$$

例 6.22 计算积分 $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 5x - 6} dx$.

解 考虑复变积分 $\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{ze^{i2z}}{z^2 - 5z - 6} dz$, 其中积分围道 C 如图 6.19 所示. 根据留数定理, 有

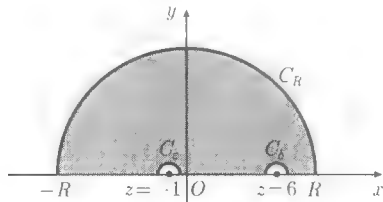


图 6.19 应用于例 6.22 的积分围道

$$\oint_C \frac{ze^{iz}}{z^2-5z-6} dz = \int_{-R}^{-1-\varepsilon} \frac{xe^{ix}}{x^2-5x-6} dx + \int_{C_\varepsilon} \frac{ze^{iz}}{z^2-5z-6} dz + \int_{-1+\varepsilon}^{6-\delta} \frac{xe^{ix}}{x^2-5x-6} dx \\ + \int_{C_\delta} \frac{ze^{iz}}{z^2-5z-6} dz + \int_{6+\delta}^R \frac{xe^{ix}}{x^2-5x-6} dx + \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2-5z-6} dz = 0.$$

现在分别计算沿半圆弧 C_ε , C_δ 以及 C_R 积分的极限值. 因为

$$\lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \cdot \frac{ze^{iz}}{z^2-5z-6} = \frac{1}{7}e^{-i}, \quad \lim_{z \rightarrow 6} (z-6) \cdot \frac{ze^{iz}}{z^2-5z-6} = \frac{6}{7}e^{6i},$$

所以

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{ze^{iz}}{z^2-5z-6} dz = -\frac{\pi i}{7}e^{-i}, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{ze^{iz}}{z^2-5z-6} dz = -\frac{6\pi i}{7}e^{6i}.$$

又因为

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z^2-5z-6} = 0.$$

由 Jordan 引理又有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{ze^{iz}}{z^2-5z-6} dz = 0.$$

取极限 $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, 综合以上结果就有

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2-5x-6} dx = \frac{\pi i}{7} (e^{-i} + 6e^{6i}).$$

取实部, 就有

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2-5x-6} dx = \frac{\pi}{7} (\sin 1 - 6 \sin 6). \quad (6.70a)$$

如果取虚部, 还可得到另外一个结果:

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2-5x-6} dx = \frac{\pi}{7} (\cos 1 + 6 \cos 6). \quad (6.70b)$$

例 6.23 计算积分 $\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$.

解 因为

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = -\frac{e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x}}{8i} = -\frac{\sin 3x - 3 \sin x}{4},$$

所以应考虑复变积分 $\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{e^{i3z} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz$, 其中积分围道 C 如图 6.20 所示. 选择这样的被积函数, 是考虑到它的虚部就给出所要求的积分, 同时 $z=0$

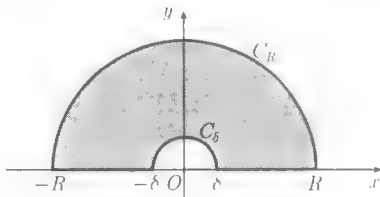


图 6.20 应用于例 6.23 的积分围道

又只是一阶极点; 而若简单地取被积函数为 $(e^{i3z} - 3e^{iz})/z^3$ 的话, 则 $z=0$ 为二阶极点, 因而沿 C_δ 的积分的极限不存在. 于是, 根据留数定理, 就有

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^{i3z} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz &= \int_{-R}^{-\delta} \frac{e^{i3x} - 3e^{ix} + 2}{x^3} dx + \int_{C_\delta} \frac{e^{i3z} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz \\ &\quad + \int_{\delta}^R \frac{e^{i3x} - 3e^{ix} + 2}{x^3} dx + \int_{C_R} \frac{e^{i3z} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz = 0. \end{aligned}$$

因为

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{e^{i3z} - 3e^{iz} + 2}{z^3} = -3, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot \frac{1}{z^3} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^3} = 0.$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{e^{i3z} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz &= 3\pi i, & \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{2}{z^3} dz &= 0, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i3z}}{z^3} dz &= 0, & \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^3} dz &= 0. \end{aligned}$$

取极限 $\delta \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$, 就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i3x} - 3e^{ix} + 2}{x^3} dx = -3\pi i.$$

比较两边的虚部, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3} dx = -3\pi.$$

所以

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{3\pi}{8}. \quad (6.71)$$

例 6.24 计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^{2n+1} x}{x^{2n+1}} dx$.

解 根据 Euler 公式, 有

$$\begin{aligned}
\sin^{2n+1} x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^{2n+1} = \left(\frac{1}{2i} \right)^{2n+1} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (e^{ix})^{2n+1-k} (-e^{-ix})^k \\
&= \left(\frac{1}{2i} \right)^{2n+1} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \binom{2n+1}{k} e^{i(2n+1-2k)x} \\
&= \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k} \sin(2n+1-2k)x. \tag{6.72}
\end{aligned}$$

因此, 考虑复变积分 $\oint_C \frac{f(z)}{z^{2n+1}} dz$, 其中积分围道 C 仍如图 6.20 所示, 而

$$f(z) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k} e^{i(2n+1-2k)z} - Q_{2n-1}(z),$$

其中 $Q_{2n-1}(z)$ 是不超过 $2n-1$ 次的多项式, 使 $z=0$ 为被积函数 $f(z)/z^{2n+1}$ 的一阶极点, 即 $z=0$ 为 $f(z)$ 的 $2n$ 阶零点, 则

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k} [i(2n+1-2k)]^l - Q_{2n-1}^{(l)}(0) = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, 2n-1.$$

注意到 (6.72) 式以及 $x=0$ 是 $\sin^{2n+1} x$ 的 $2n+1$ 阶零点, 于是就有

$$\begin{aligned}
Q_{2n-1}(0) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k}, \\
Q'_{2n-1}(0) &= i \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k} (2n+1-2k) = 0, \\
Q''_{2n-1}(0) &= - \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k} (2n+1-2k)^2, \\
&\dots\dots\dots \\
Q_{2n-1}^{(2n-2)}(0) &= (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k} (2n+1-2k)^{2n-2}, \\
Q_{2n-1}^{(2n-1)}(0) &= (-1)^{n-1} i \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k} (2n+1-2k)^{2n-1} = 0.
\end{aligned}$$

由此即可定出

$$Q_{2n-1}(z) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(-1)^l}{(2l)!} \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k} (2n+1-2k)^{2l} \right] z^{2l},$$

即 $Q_{2n-1}(z)$ 是 $2n-2$ 次的偶次多项式, 系数为实数. 根据留数定理, 有

$$\int_{-R}^{-\delta} \frac{f(x)}{x^{2n+1}} dx + \int_{C_\delta} \frac{f(z)}{z^{2n+1}} dz + \int_{\delta}^R \frac{f(x)}{x^{2n+1}} dx + \int_{C_R} \frac{f(z)}{z^{2n+1}} dz = 0.$$

因为

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^{2n+1}} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot \frac{Q_{2n-1}(z)}{z^{2n+1}} = 0,$$

所以

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i(2n+1-2k)z}}{z^{2n+1}} dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{Q_{2n-1}(z)}{z^{2n+1}} dz = 0.$$

将这两部分合并起来就得到

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z^{2n+1}} dz = 0.$$

另一方面, 因为

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{f(z)}{z^{2n+1}} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^{2n}} \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k} e^{i(2n+1-2k)z} - Q_{2n-1}(z) \right] \\ &= \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k} [i(2n+1-2k)]^{2n}, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{f(z)}{z^{2n+1}} dz = -\pi i \times \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k} (2n+1-2k)^{2n}.$$

取极限 $\delta \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, 即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x^{2n+1}} dx = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \pi i \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k} (2n+1-2k)^{2n}.$$

比较虚部, 并注意到 $Q_{2n-1}(x)$ 的系数为实数, 就得到

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^{2n+1}} \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k} \sin(2n+1-2k)x \right] dx \\ &= (-1)^n 2^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^{2n+1} x}{x^{2n+1}} dx \\ &= \frac{(-1)^n \pi}{(2n)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k} (2n+1-2k)^{2n}. \end{aligned}$$

最后就求出了

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^{2n+1} x}{x^{2n+1}} dx = \frac{\pi}{(2n)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{k} \left(\frac{2n+1}{2} - k \right)^{2n}. \quad (6.73)$$

例 6.25 计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^{2n} x}{x^{2n}} dx$.

解 根据 Euler 公式, 有

$$\begin{aligned} \sin^{2n} x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)x} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \left[2 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} \cos(2n-2k)x + (-1)^n \binom{2n}{n} \right]. \end{aligned} \quad (6.74)$$

因此, 考虑复变积分 $\oint_C \frac{f(z)}{z^{2n}} dz$, 其中积分围道 C 亦如图 6.20 所示, 而

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)z} + \frac{(-1)^n}{2} \binom{2n}{n} - Q_{2n-2}(z),$$

其中 $Q_{2n-2}(z)$ 是不超过 $2n-2$ 次的多项式, 使 $z=0$ 为被积函数 $f(z)/z^{2n}$ 的一阶极点, 即 $z=0$ 为 $f(z)$ 的 $2n-1$ 阶零点, 则

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} + \frac{(-1)^n}{2} \binom{2n}{n} - Q_{2n-2}(0) &= 0, \\ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} [i(2n-2k)]^l - Q_{2n-2}^{(l)}(0) &= 0, \quad l=1, 2, \dots, 2n-2. \end{aligned}$$

注意到 (6.74) 式以及 $x=0$ 是 $\sin^{2n} x$ 的 $2n$ 阶零点, 于是就有

$$Q_{2n-2}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} + \frac{(-1)^n}{2} \binom{2n}{n} = 0.$$

$$Q'_{2n-2}(0) = i \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} (2n-2k).$$

$$Q''_{2n-2}(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} (2n-2k)^2 = 0.$$

.....

$$Q_{2n-2}^{(2n-3)}(0) = (-1)^{n-1} i \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} (2n-2k)^{2n-3},$$

$$Q_{2n-2}^{(2n-2)}(0) = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} (2n-2k)^{2n-2} = 0.$$

由此即可定出

$$Q_{2n-2}(z) = i \sum_{l=0}^{n-2} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} (2n-2k)^{2l+1} \right] z^{2l+1},$$

即 $Q_{2n-2}(z)$ 是 $2n-3$ 次的奇次多项式, 系数为纯虚数. 根据留数定理, 有

$$\int_{-R}^{-\delta} \frac{f(z)}{z^{2n}} dx + \int_{C_\delta} \frac{f(z)}{z^{2n}} dz + \int_{\delta}^R \frac{f(z)}{z^{2n}} dx + \int_{C_R} \frac{f(z)}{z^{2n}} dz = 0.$$

因为

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^{2n}} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot \frac{1}{z^{2n}} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot \frac{Q_{2n-2}(z)}{z^{2n}} = 0,$$

所以

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i(2n-2k)z}}{z^{2n}} dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{dz}{z^{2n}} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{Q_{2n-2}(z)}{z^{2n}} dz = 0.$$

这几部分合并起来就有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z^{2n}} dz = 0.$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{f(z)}{z^{2n}} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^{2n-1}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)z} + \frac{(-1)^n}{2} \binom{2n}{n} - Q_{2n-2}(z) \right] \\ &= \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} [i(2n-2k)]^{2n-1}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{f(z)}{z^{2n}} dz &= -\pi i \times \frac{i^{2n-1}}{(2n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} (2n-2k)^{2n-1} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{\pi}{(2n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} (2n-2k)^{2n-1}. \end{aligned}$$

取极限 $\delta \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$, 即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{x^{2n}} dx = (-1)^n \frac{\pi}{(2n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} (2n-2k)^{2n-1}.$$

比较实部, 并注意到 $Q_{2n-2}(x)$ 的系数为纯虚数, 就得到

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} \cos(2n-2k)x + \frac{(-1)^n}{2} \binom{2n}{n} \right] \frac{dx}{x^{2n}} \\ &= (-1)^n 2^{2n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^{2n} x}{x^{2n}} dx \\ &= (-1)^n \frac{\pi}{(2n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} (2n-2k)^{2n-1}. \end{aligned}$$

最后就求出了

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^{2n} x}{x^{2n}} dx &= \frac{\pi}{(2n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} (n-k)^{2n-1} \\ &= \frac{\pi}{(2n-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{k} (n-k)^{2n-1}. \end{aligned} \quad (6.75)$$

§6.6 计算含三角函数无穷积分的新方法

上一节的例 6.24 与例 6.25, 甚至包括例 6.23, 讨论的都是 $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx$ 型积分的计算. 在应用留数定理计算这几个积分时, 关键, 或者说难点, 在于通过适当的演绎, 找出合适的复变积分. 更仔细地说, 这几个积分, 都属于 $\int_{-\infty}^{\infty} Q(x) \sin px dx$ 或 $\int_{-\infty}^{\infty} Q(x) \cos px dx$ 型积分 ($p > 0$). 按照传统的做法, 为了应用留数定理计算这类积分, 核心是在构造复变积分时, 不是简单地将 $Q(x) \sin px$ 或 $Q(x) \cos px$ 延拓为 $Q(z) \sin pz$ 或 $Q(z) \cos pz$, 而是需要将原被积函数中的三角函数改换为指数函数, 即应用留数定理计算围道积分 $\oint_C Q(z) e^{ipz} dz$, 并且在积分围道上只许可出现一阶极点. 本章前面几节中, 也多次出现这种类型的无穷积分, 我们也是这样处理的, 无一例外. 之所以采用这样的办法, 是因为在函数 $\sin pz$ 与 $\cos pz$ 中都含有 e^{-ipz} , 其模在上半平面的范围内趋于 ∞ 而非趋于 0, 因而为处理沿上半圆弧的积分带来一些困难. 选择围道积分 $\oint_C Q(z) e^{ipz} dz$ 而非 $\oint_C Q(z) \sin pzdz$ 或 $\oint_C Q(z) \cos pzdz$, 其用心所在, 正是为了避开这一困难. 但正如在第一章中就已经指出的, 我们绝不可以将这一困难绝对化, 更不应该把它看成不可克服的困难. 特别是对于例 6.24 与 6.25 中的积分, 与其要通过一定的演绎才能找出合适的复变积分, 还不如直接计算围道积分 $\oint_C Q(z) \sin pzdz$ 与 $\oint_C Q(z) \cos pzdz$. 本节就遵循这一思路, 探讨这一新方法的切实可行性. 不仅如此, 我们还将看到, 应用这一新方法, 在处理某些积分时可能更为简单.

为此需要建立一个新的引理,它是留数定理与 Jordan 引理相结合的产物.

补充引理 设函数 $Q(z)$ 只有有限个奇点,且在下半平面 $(-\pi \leq \arg z \leq 0)$ 的范围内,当 $|z| \rightarrow \infty$ 时, $Q(z)$ 一致地趋近于 0, 则

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) e^{-ipz} dz = 2\pi i \sum_{\text{全平面}} \operatorname{res} \{Q(z) e^{-ipz}\}, \quad (6.76)$$

其中 $p > 0$, C_R 是以原点为圆心, R 为半径的半圆弧, 位于上半平面内.

证 以原点为圆心, R 为半径作圆 $|z| = R$. 按照题设, 只要 R 足够大, 则有

$$\oint_{|z|=R} Q(z) e^{-ipz} dz = 2\pi i \sum_{\text{全平面}} \operatorname{res} \{Q(z) e^{-ipz}\}.$$

因此, 同样也有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} Q(z) e^{-ipz} dz = 2\pi i \sum_{\text{全平面}} \operatorname{res} \{Q(z) e^{-ipz}\}.$$

另一方面, 如果将此圆周位于上半平面内的半圆弧与位于下半平面内的半圆弧分别记为 C_R 与 C'_R , 则由 Jordan 引理有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} Q(z) e^{-ipz} dz = 0.$$

两式相减, 即可证得

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} Q(z) e^{-ipz} dz = 2\pi i \sum_{\text{全平面}} \operatorname{res} \{Q(z) e^{-ipz}\}. \quad \square$$

讨论 关于这个补充引理的内容, 有几点值得注意:

1. 从实用性来讲, 本引理主要适用于 C_R 为半圆弧的情形. 如果 C_R 超出上半平面, 引理仍成立. 如果 C_R 位于上半平面, 但当 $R \rightarrow \infty$ 时, 其张角 $< \pi$, 则本引理不成立.
2. 对于函数 $Q(z)$, 只要求它在下半平面的范围内一致地趋于 0, 至于它在上半平面范围内的行为, 没有任何要求.
3. 沿半圆弧 C_R 积分的极限值, 不只涉及上半平面内的奇点, 也涉及下半平面内的奇点.
4. 本引理也可表述为

$$\int_{C_R} Q(z) e^{-ipz} dz = -2\pi i \operatorname{res} \{Q(z) e^{-ipz}\}_{z=\infty}.$$

现在就可以应用此补充引理重新讨论例 6.23 例 6.25. 为了计算 $\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$, 可以直接考虑复变积分 $\oint_C \frac{\sin^3 z}{z^3} dz$, 其中积分围道 C 为如图 6.11 所示的半圆形围道. 要特别注意, 因为对于现在选取的被积函数, $z=0$ 为可去奇点, 所以积分围道无须绕过 $z=0$ 点. 此时, 在积分围道内无奇点, 故根据留数定理 (或 Cauchy 定理), 有

$$\oint_C \frac{\sin^3 z}{z^3} dz = \int_{-R}^R \frac{\sin^3 x}{x^3} dx + \int_{C_R} \frac{\sin^3 z}{z^3} dz = 0.$$

令 $R \rightarrow \infty$, 则有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx &= -\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\sin^3 z}{z^3} dz = -\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{(2i)^3} \int_{C_R} \frac{(e^{iz} - e^{-iz})^3}{z^3} dz \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{8i} \int_{C_R} \frac{e^{i3z} - 3e^{iz} + 3e^{-iz} - e^{-i3z}}{z^3} dz. \end{aligned}$$

根据 Jordan 引理, 有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i3z}}{z^3} dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{-iz}}{z^3} dz = 0.$$

同时, 根据上面证明的补充引理, 又有

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{-iz}}{z^3} dz &= 2\pi i \times \operatorname{res} \left\{ \frac{e^{-iz}}{z^3} \right\}_{z=0} = 2\pi i \cdot \frac{(-i)^2}{2} = -\pi i, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{-i3z}}{z^3} dz &= 2\pi i \times \operatorname{res} \left\{ \frac{e^{-i3z}}{z^3} \right\}_{z=0} = 2\pi i \cdot \frac{(-3i)^2}{2} = -9\pi i. \end{aligned}$$

由此即可求得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{1}{8i} (0 + 0 - 3\pi i + 9\pi i) = \frac{3\pi}{4}.$$

亦即

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{3\pi}{8}.$$

同样可以计算例 6.24 及例 6.25 中的积分. 我们甚至无须区分 n 为偶数或奇数, 而可以直接计算 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^n} dx$. 为此考虑复变积分 $\oint_C \frac{\sin^n z}{z^n} dz$, 其中 C 仍为上半平面上的半圆形围道. 我们有

$$\oint_C \frac{\sin^n z}{z^n} dz = \int_{-R}^R \frac{\sin^n x}{x^n} dx + \int_{C_R} \frac{\sin^n z}{z^n} dz = 0.$$

令 $R \rightarrow \infty$, 则有

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^n} dx &= -\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\sin^n z}{z^n} dz \\
&= -\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{(2i)^n} \int_{C_R} \frac{(e^{iz} - e^{-iz})^n}{z^n} dz \\
&= -\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \int_{C_R} \frac{e^{i(2k-n)z}}{z^n} dz.
\end{aligned}$$

当 $2k - n \geq 0$, 即 $k \geq [(n+1)/2]$ 时, 根据 Jordan 引理, 有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i(2k-n)z}}{z^n} dz = 0.$$

当 $2k - n < 0$, 即 $k \leq [n/2]$ 时, 按照上述补充引理, 又有

$$\begin{aligned}
\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i(2k-n)z}}{z^n} dz &= 2\pi i \times \operatorname{res} \left\{ \frac{e^{-i(n-2k)z}}{z^n} \right\}_{z=0} \\
&= 2\pi i \times \frac{1}{(n-1)!} [-i(n-2k)]^{n-1}.
\end{aligned}$$

于是就得到最后结果

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^n} dx &= \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{2\pi i^n}{(n-1)!} (n-2k)^{n-1} \\
&= \frac{\pi}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n}{2} - k\right)^{n-1}. \quad (6.77)
\end{aligned}$$

回顾一下例 6.24 与例 6.25 中的计算, 读者可以看到计算简繁程度上的明显差异.

用同样的方法甚至可以计算 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^{n+2m} x}{x^n} dx$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^{n+2m} x}{x^n} dx &= -\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\sin^{n+2m} z}{z^n} dz \\
&= -\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{(2i)^{n+2m}} \int_{C_R} \frac{(e^{iz} - e^{-iz})^{n+2m}}{z^n} dz \\
&= -\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{(2i)^{n+2m}} \sum_{k=0}^{n+2m} (-1)^{n-k} \binom{n+2m}{k} \int_{C_R} \frac{e^{i(2k-n-2m)z}}{z^n} dz \\
&= -\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{(2i)^{n+2m}} \sum_{k=0}^{[n/2]+m} (-1)^{n-k} \binom{n+2m}{k} \int_{C_R} \frac{e^{i(2k-n-2m)z}}{z^n} dz \\
&= \frac{\pi}{(n-1)!} \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{[n/2]+m} (-1)^{m-k} \binom{n+2m}{k} \left(\frac{n}{2} + m - k\right)^{n-1}. \quad (6.78)
\end{aligned}$$

还可以计算本章中讨论过的其他积分, 例如例 6.7 中的定积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(a+2n)x - \sin ax}{\sin x} \frac{dx}{1+x^2}, \quad a > -1, n \text{ 为正整数}.$$

为此计算围道积分 $\oint_C \frac{\sin(a+2n)z - \sin az}{\sin z} \frac{dz}{1+z^2}$, 其中积分围道 C 仍为上半平面内的半圆形围道. 我们注意到, 函数

$$\begin{aligned} \frac{\sin(a+2n)z - \sin az}{\sin z} &= \frac{[e^{i(a+2n)z} - e^{-i(a+2n)z}] - [e^{iaz} - e^{-iaz}]}{e^{iz} - e^{-iz}} \\ &= e^{i(a+1)z} \frac{e^{i2nz} - 1}{e^{i2z} - 1} + e^{-i(a+1)z} \frac{e^{-i2nz} - 1}{e^{-i2z} - 1} \end{aligned}$$

在全平面无奇点 (特别是在实轴上无奇点), 因此积分围道无须绕过 $\sin z$ 的零点 $z = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 根据留数定理, 我们有

$$\begin{aligned} &\oint_C \frac{\sin(a+2n)z - \sin az}{\sin z} \frac{dz}{1+z^2} \\ &= \int_{-R}^R \frac{\sin(a+2n)x - \sin ax}{\sin x} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{C_R} \frac{\sin(a+2n)z - \sin az}{\sin z} \frac{dz}{1+z^2} \\ &= 2\pi i \times \operatorname{res} \left\{ \frac{\sin(a+2n)z - \sin az}{\sin z} \frac{1}{1+z^2} \right\}_{z=i} \\ &= \pi \left[e^{-(a+1)} \frac{1-e^{-2n}}{1-e^{-2}} + e^{a+1} \frac{1-e^{2n}}{1-e^2} \right]. \end{aligned}$$

令 $R \rightarrow \infty$, 则有

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a+2n)x - \sin ax}{\sin x} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \pi \left[e^{-(a+1)} \frac{1-e^{-2n}}{1-e^{-2}} + e^{a+1} \frac{1-e^{2n}}{1-e^2} \right] - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\sin(a+2n)z - \sin az}{\sin z} \frac{dz}{1+z^2} \\ &= \pi \left[e^{-(a+1)} \frac{1-e^{-2n}}{1-e^{-2}} + e^{a+1} \frac{1-e^{2n}}{1-e^2} \right] \\ &\quad - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \left[e^{i(a+1)z} \frac{e^{i2nz} - 1}{e^{i2z} - 1} + e^{-i(a+1)z} \frac{e^{-i2nz} - 1}{e^{-i2z} - 1} \right] \frac{dz}{1+z^2}. \end{aligned}$$

在 $a > -1, n$ 为正整数的条件下, 根据 Jordan 引理, 有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i(a+1)z} \frac{e^{i2nz} - 1}{e^{i2z} - 1} \frac{dz}{1+z^2} = 0.$$

同时, 根据上面的补充引理, 又有

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{-i(a+1)z} \frac{e^{-i2nz} - 1}{e^{-i2z} - 1} \frac{dz}{1+z^2} &= 2\pi i \sum_{z=-i} \operatorname{res} \left\{ \frac{e^{-i(a+1)z}}{1+z^2} \frac{e^{-i2nz} - 1}{e^{-i2z} - 1} \right\} \\ &= \pi \left[e^{a+1} \frac{1-e^{2n}}{1-e^2} - e^{-(a+1)} \frac{1-e^{-2n}}{1-e^{-2}} \right]. \end{aligned}$$

代入即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(a+2n)x - \sin ax}{\sin x} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi e^{-(a+1)} \frac{1-e^{-2n}}{1-e^{-2}},$$

因此

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(a+2n)x - \sin ax}{\sin x} \frac{dx}{1+x^2} = \pi e^{-(a+1)} \frac{1-e^{-2n}}{1-e^{-2}}.$$

也可以重新讨论例 6.20. 这时仍然只需要计算积分 $\oint_C \frac{\cos 2a - \cos 2z}{z^2 - a^2} dz$, 而积分围道 C 仍为上半平面内的半圆形围道. 重复上面的计算过程, 就能得到

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2a - \cos 2x}{x^2 - a^2} dx &= -\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\cos 2a - \cos 2z}{z^2 - a^2} dz \\ &= -\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\cos 2a}{z^2 - a^2} dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\cos 2z}{z^2 - a^2} dz \\ &= -\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\cos 2a}{z^2 - a^2} dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{C_R} \frac{e^{i2z} + e^{-i2z}}{z^2 - a^2} dz. \end{aligned}$$

根据大圆弧引理、Jordan 引理及补充引理, 我们分别有

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{z^2 - a^2} dz &= 0, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i2z}}{z^2 - a^2} dz &= 0, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{-i2z}}{z^2 - a^2} dz &= 2\pi i \sum_{z=\pm a} \operatorname{res} \left\{ \frac{e^{-2z}}{z^2 - a^2} \right\} = \frac{2\pi}{a} \sin 2a. \end{aligned}$$

于是就求得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2a - \cos 2x}{x^2 - a^2} dx = \frac{\pi}{a} \sin 2a,$$

亦即

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{x^2 - a^2} dx = \frac{\pi}{4a} \sin 2a.$$

讨论 对于本节中建立的补充引理, 也绝不可夸大它的作用. 除了上面指出的补充引理适用条件的限制外, 有些积分, 特别是要求“成对”计算含三角函数的无穷积分 (例如例 6.5), 尽管原则上仍然可以应用补充引理计算, 但因为要独立计算两个围道积分, 因而失去了计算的简便性. 在某些情况下, 将本节的做法与原有做法 (即将三角函数更改为指数函数) 结合起来, 更可能是最佳选择.

例 6.26 计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^n} \cos mx dx$, 其中 n, m 均为正整数.

解 仍采用上半平面内的半圆形围道 C , 计算积分 $\oint_C \frac{\sin^n z}{z^n} e^{imz} dz$. 因为在积分围道内无奇点, 所以

$$\oint_C \frac{\sin^n z}{z^n} e^{imz} dz = \int_{-R}^R \frac{\sin^n x}{x^n} e^{imx} dx + \int_{C_R} \frac{\sin^n z}{z^n} e^{imz} dz = 0.$$

令 $R \rightarrow \infty$, 即得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^n} e^{imx} dx &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\sin^n z}{z^n} e^{imz} dz \\ &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \int_{C_R} \frac{e^{i(2k-n+m)z}}{z^n} dz. \end{aligned} \quad (6.79)$$

下面需要区分三种情况:

(1) $m = n = 1$. 此时 (6.79) 式中的 $k=0$ 项不为 0, 也容易计算出积分值. 但是, 在这种情况下, 还不如从头计算:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cos x dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (6.80a)$$

(2) $m \geq n \geq 2$. 此时恒有 $2k - n + m \geq 0$, 根据 Jordan 引理 ($2k - n + m > 0$ 时) 或大圆弧引理 ($2k - n + m = 0$ 时), 一定有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^n} e^{imx} dx = 0.$$

取实部, 即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^n} \cos mx dx = 0. \quad (6.80b)$$

(3) $0 < m < n$. 此时 (6.79) 式中 $2k - n + m \geq 0$ 的项仍无贡献, 因此

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^n} e^{imx} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\sin^n z}{z^n} e^{imz} dz \\ &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^{[(n-m)/2]} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \int_{C_R} \frac{e^{i(2k-n+m)z}}{z^n} dz \\ &= - \frac{2\pi i}{(2i)^n} \sum_{k=0}^{[(n-m)/2]} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-1)!} \binom{n}{k} [i(n-m-2k)]^{n-1} \\ &= \frac{\pi}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{[(n-m)/2]} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n-m}{2} - k\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

比较实部, 又可得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^n x}{x^n} \cos mx dx = \frac{\pi}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{[(n-m)/2]} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n-m}{2} - k\right)^{n-1}. \quad (6.80c)$$

第七章 多值函数的积分

在应用留数定理计算定积分时, 如果涉及多值函数, 需要特别注意的是有关单值分支 (亦即有关宗量辐角) 的规定. 在某些问题中, 也还存在关于如何选择围道积分的技巧.

为了节省篇幅, 从本章开始, 凡是涉及沿大圆弧或小圆弧上积分极限值的计算, 均将直接给出结果而不叙述理由, 当然, 需要特别讨论的除外.

§7.1 含根式函数的积分

例 7.1 计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{x^2+x+1} dx$, 其中 $-1 < \alpha < 1$.

解 被积函数可取为 $z^{\alpha}/(z^2+z+1)$; 积分围道如图 7.1 所示, 其形如玉块 (见图 7.2), 故可称为块形围道. 若规定在割线上岸 $\arg z = 0$, 则由留数定理有

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{x^{\alpha}}{1+x+x^2} dx + \int_{C_R} \frac{z^{\alpha}}{1+z+z^2} dz + \int_R^0 \frac{(xe^{i2\pi})^{\alpha}}{1+x+x^2} dx + \int_{C_{\delta}} \frac{z^{\alpha}}{1+z+z^2} dz \\ = 2\pi i \left(\frac{z^{\alpha}}{2z+1} \Big|_{z=e^{2\pi i/3}} + \frac{z^{\alpha}}{2z+1} \Big|_{z=e^{4\pi i/3}} \right). \end{aligned}$$

因为在 $-1 < \alpha < 1$ 的条件下, 有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_{\delta}} \frac{z^{\alpha}}{1+z+z^2} dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z^{\alpha}}{1+z+z^2} dz = 0,$$

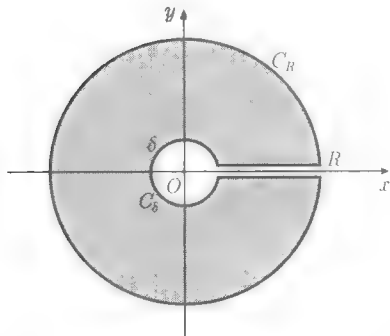


图 7.1 应用于例 7.1 的块形积分围道

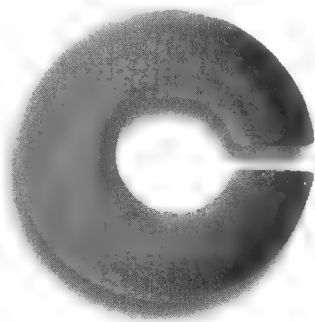


图 7.2 玉块

所以, 取极限 $R \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, 就得到

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x+x^2} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{e^{i2\pi\alpha/3} e^{i4\pi\alpha/3}}{1-e^{i2\pi\alpha}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\sin(\pi\alpha/3)}{\sin\pi\alpha}. \quad (7.1)$$

另一种办法是取被积函数为 $z^{\alpha} \ln z / (1+z+z^2)$, 而积分围道仍如图 7.1 所示. 经过类似的计算, 可以得到

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha} \ln x}{1+x+x^2} dx - \int_0^{\infty} \frac{(xe^{i2\pi})^{\alpha} (\ln x + i2\pi)}{1+x+x^2} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha} (1 - \cos 2\pi\alpha) \ln x + x^{\alpha} 2\pi \sin 2\pi\alpha}{1+x+x^2} dx \\ & \quad - i \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha} 2\pi \cos 2\pi\alpha + x^{\alpha} \sin 2\pi\alpha \ln x}{1+x+x^2} dx \\ &= 2\pi i \left(\frac{z^{\alpha} \ln z}{1+2z} \Big|_{z=e^{2\pi i/3}} + \frac{z^{\alpha} \ln z}{1+2z} \Big|_{z=e^{4\pi i/3}} \right) = \frac{2\pi i}{\sqrt{3}} \left(\frac{2\pi}{3} e^{i2\pi\alpha/3} - \frac{4\pi}{3} e^{i4\pi\alpha/3} \right). \end{aligned}$$

分别比较实部和虚部, 得

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha} (1 - \cos 2\pi\alpha) \ln x + x^{\alpha} 2\pi \sin 2\pi\alpha}{1+x+x^2} dx &= \frac{4\pi^2}{3\sqrt{3}} \left(2 \sin \frac{4\pi\alpha}{3} - \sin \frac{2\pi\alpha}{3} \right), \\ \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha} 2\pi \cos 2\pi\alpha + x^{\alpha} \sin 2\pi\alpha \ln x}{1+x+x^2} dx &= \frac{4\pi^2}{3\sqrt{3}} \left(2 \cos \frac{4\pi\alpha}{3} - \cos \frac{2\pi\alpha}{3} \right), \end{aligned}$$

这正是关于

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x+x^2} dx \quad \text{和} \quad J = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha} \ln x}{1+x+x^2} dx$$

的代数方程组:

$$\begin{aligned} (1 - \cos 2\pi\alpha) \cdot I + 2\pi \sin 2\pi\alpha \cdot J &= \frac{4\pi^2}{3\sqrt{3}} \left(2 \sin \frac{4\pi\alpha}{3} - \sin \frac{2\pi\alpha}{3} \right), \\ \sin 2\pi\alpha \cdot I + 2\pi \cos 2\pi\alpha \cdot J &= \frac{4\pi^2}{3\sqrt{3}} \left(2 \cos \frac{4\pi\alpha}{3} - \cos \frac{2\pi\alpha}{3} \right). \end{aligned}$$

解出 I , 即可得到 (7.1) 式. 与此同时, 还能额外求得

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha} \ln x}{1+x+x^2} dx = \frac{16\pi^2}{3\sqrt{3}} \frac{\sin^3(\pi\alpha/3) \cos(\pi\alpha/3)}{\sin^2 \pi\alpha}. \quad (7.2)$$

 **讨论** 这里得到的结果, 其实正是证明了

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha} \ln x}{1+x+x^2} dx = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x+x^2} dx$$

的合法性.

例 7.2 采用适当围道, 应用留数定理计算 $\oint_C \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{z^\alpha}{1+z^2} dz$, 从而导出 $\int_0^{\pi/2} \frac{1-r \cos 2\theta}{1-2r \cos 2\theta + r^2} \tan^\alpha \theta d\theta$, 其中 r 为实数, $-1 < \alpha < 1$.

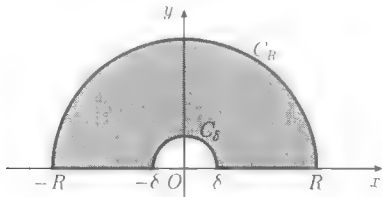


图 7.3 应用于例 7.2 的积分围道

解 取积分围道如图 7.3 所示. 规定在正实轴上 $\arg z = 0$. 根据留数定理, 有

$$\begin{aligned} & \int_R^\delta \frac{(1+r)x^2 + (1-r)}{(1+r)^2 x^2 + (1-r)^2} \frac{(xe^{i\pi})^\alpha}{1+x^2} (-dx) + \int_{C_R} \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{z^\alpha}{1+z^2} dz \\ & + \int_\delta^R \frac{(1+r)x^2 + (1-r)}{(1+r)^2 x^2 + (1-r)^2} \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx + \int_{C_R} \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{z^\alpha}{1+z^2} dz \\ & = 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} \left\{ \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{z^\alpha}{1+z^2} \right\}. \end{aligned}$$

应用小圆弧引理与大圆弧引理, 可以证明

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{z^\alpha}{1+z^2} dz &= 0, \\ \lim_{R \rightarrow 0} \int_{C_R} \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{z^\alpha}{1+z^2} dz &= 0. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & (1+e^{i\pi\alpha}) \int_0^\infty \frac{(1+r)x^2 + (1-r)}{(1+r)^2 x^2 + (1-r)^2} \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx \\ & = 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} \left\{ \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{z^\alpha}{1+z^2} \right\}. \end{aligned}$$

下面先分别讨论 $r^2 < 1$ 及 $r^2 > 1$ 的两种情形. 当 $r^2 < 1$ 时, 被积函数在积分围道内有两个奇点, 即 $z = e^{i\pi/2}$ 与 $z = e^{i\pi/2} (1-r)/(1+r)$, 留数分别为

$$\operatorname{res} \left\{ \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{z^\alpha}{1+z^2} \right\}_{z=e^{i\pi/2}} = \frac{1}{4i} e^{i\pi\alpha/2}$$

$$\operatorname{res} \left\{ \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{z^\alpha}{1+z^2} \right\}_{z=e^{i\pi/2}(1-r)/(1+r)} = \frac{1}{4i} \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\alpha e^{i\pi\alpha/2}.$$

因此

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{(1+r)x^2 + (1-r)}{(1+r)^2 x^2 + (1-r)^2} \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx &= \frac{\pi}{2} \frac{e^{i\pi\alpha/2}}{1+e^{i\pi\alpha}} \left[1 + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\alpha \right] \\ &= \frac{\pi}{4 \cos(\pi\alpha/2)} \left[1 + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\alpha \right]. \end{aligned} \quad (7.3a)$$

当 $r^2 > 1$ 时, 被积函数在积分围道内的奇点为 $z = e^{i\pi/2}$ 与 $z = e^{i\pi/2}(r-1)/(1+r)$, 在 $z = e^{i\pi/2}$ 处的留数同上, 而 $z = e^{i\pi/2}(r-1)/(1+r)$ 处的留数为

$$\operatorname{res} \left\{ \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{z^\alpha}{1+z^2} \right\}_{z=e^{i\pi/2}(r-1)/(1+r)} = -\frac{1}{4i} \left(\frac{r-1}{1+r} \right)^\alpha e^{i\pi\alpha/2}.$$

因此,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{(1+r)x^2 + (1-r)}{(1+r)^2 x^2 + (1-r)^2} \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx &= \frac{\pi}{2} \frac{e^{i\pi\alpha/2}}{1+e^{i\pi\alpha}} \left[1 - \left(\frac{r-1}{r+1} \right)^\alpha \right] \\ &= \frac{\pi}{4 \cos(\pi\alpha/2)} \left[1 - \left(\frac{r-1}{r+1} \right)^\alpha \right]. \end{aligned} \quad (7.3b)$$

当 $r^2 = 1$ 即 $r = \pm 1$ 时特别简单, 这时的复变积分就是 $\frac{1}{2} \oint_C \frac{z^\alpha}{1+z^2} dz$. 由于在积分围道内只有一个奇点 $z = e^{i\pi/2}$, 应用留数定理就能计算得

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4 \cos(\pi\alpha/2)}. \quad (7.3c)$$

总结以上结果, 并作变换 $x = \tan \theta$, 就得到

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1-r \cos 2\theta}{1-2r \cos 2\theta+r^2} \tan^\alpha \theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{4 \cos(\pi\alpha/2)} \left[1 + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\alpha \right], & r^2 < 1, \\ \frac{\pi}{4 \cos(\pi\alpha/2)}, & r^2 = 1, \\ \frac{\pi}{4 \cos(\pi\alpha/2)} \left[1 - \left(\frac{r-1}{r+1} \right)^\alpha \right], & r^2 > 1. \end{cases} \quad (7.4a)$$

如果作变换 $x = \cot \theta$, 也可以得到

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1+r \cos 2\theta}{1+2r \cos 2\theta+r^2} \cot^\alpha \theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{4 \cos(\pi\alpha/2)} \left[1 + \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^\alpha \right], & r^2 < 1, \\ \frac{\pi}{4 \cos(\pi\alpha/2)}, & r^2 = 1, \\ \frac{\pi}{4 \cos(\pi\alpha/2)} \left[1 - \left(\frac{r-1}{r+1} \right)^\alpha \right], & r^2 > 1. \end{cases} \quad (7.4b)$$

例 7.3 采用图 7.3 中的围道, 应用留数定理计算复变积分 $\int_C z^{\alpha-1} e^{ibz} \frac{dz}{z^2+1}$, 从而导出 $\int_0^\infty x^{\alpha-1} \sin\left(bx - \frac{\pi\alpha}{2}\right) \frac{dx}{x^2+1}$, 其中 $b > 0, 0 < \alpha < 2$.

解 如上题, 规定在正实轴上 $\arg z = 0$. 在积分围道内只有一个奇点 $z = e^{i\pi/2}$, 故根据留数定理, 有

$$\begin{aligned} & \int_R^\delta (xe^{i\pi})^{\alpha-1} e^{-ibx} \frac{-dx}{x^2+1} + \int_{C_\delta} z^{\alpha-1} e^{ibz} \frac{dz}{z^2+1} \\ & + \int_\delta^R x^{\alpha-1} e^{ibx} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{C_R} z^{\alpha-1} e^{ibz} \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i \times \frac{1}{2} e^{i\pi(\alpha-2)/2} e^{-b}. \end{aligned}$$

取极限 $\delta \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$, 因为

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} z^{\alpha-1} e^{ibz} \frac{dz}{z^2+1} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} z^{\alpha-1} e^{ibz} \frac{dz}{z^2+1} = 0,$$

所以就有

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} (e^{ibx} - e^{i\pi\alpha} e^{-ibx}) \frac{dx}{x^2+1} = -\pi i e^{i\pi\alpha/2} e^{-b},$$

即

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} [e^{i(bx-\alpha\pi/2)} - e^{-i(bx-\alpha\pi/2)}] \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2} e^{-b}.$$

这样就得到

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x^2+1} \sin\left(bx - \frac{\alpha\pi}{2}\right) dx = -\frac{\pi}{2} e^{-b}. \quad (7.5a)$$

 **讨论:**

1. 作为本题的特殊情形, 可以列出:

$$\alpha = 1: \quad \int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-b} \quad (b > 0); \quad (7.5b)$$

$$\alpha = 2: \quad \int_0^\infty \frac{x \sin bx}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-b} \quad (b > 0); \quad (7.5c)$$

$$b = 0: \quad \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2 \sin(\alpha\pi/2)} \quad (0 < \alpha < 2). \quad (7.5d)$$

2. 取被积函数为 $f(z) = z^{\alpha-1} e^{ibz} / (z^2 - 1)$, 也可以计算出

$$\text{v.p.} \int_0^\infty x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2} - bx\right) \frac{dx}{x^2-1} = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2} - b\right), \quad (7.6)$$

但因为, 在实轴上的 $z = \pm 1$ 也是奇点, 故积分围道需稍作调整.

3. 取被积函数为 $f(z) = z^{\alpha-1}e^{ibz}/(z^2+1)$, 还可以计算出

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{\cos bx} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2} - \sin bx\right) \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}e^{e^{-b}}, \quad 0 < \alpha < 2. \quad (7.7)$$

例 7.4 指定积分围道如图 7.4 所示, 选择适当的被积函数, 计算积分

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3} dx.$$



图 7.4 应用于例 7.4 的积分围道

解 考虑复变积分 $\oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3} dz$, 并规定在割线上岸 $\arg z = 0$, $\arg(1-z) = 0$. 相应地, 在割线下岸就应有 $\arg z = 0$, $\arg(1-z) = -2\pi$. 除 $z = e^{i\pi}$ 点外, 被积函数 $f(z)$ 在围道外单值解析, 所以

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3} dz &= \int_\delta^{1-\varepsilon} \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3} dx + \int_{C_1} \frac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3} dz \\ &\quad + \int_{1-\varepsilon}^\delta \frac{\sqrt[4]{x[(1-x)e^{-i2\pi}]^3}}{(1+x)^3} dx + \int_{C_2} \frac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3} dz \\ &= 2\pi i [\operatorname{res} f(e^{i\pi}) + \operatorname{res} f(\infty)]. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_2} \frac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3} dz = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_1} \frac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3} dz = 0,$$

令 $\delta \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$, 就得到

$$(1 - e^{-i3\pi/2}) \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3} dx = 2\pi i [\operatorname{res} f(e^{i\pi}) + \operatorname{res} f(\infty)].$$

现在就来求这两个留数. 对于 $\operatorname{res} f(e^{i\pi})$, 有

$$\operatorname{res} f(e^{i\pi}) = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z+1)^3 \cdot \frac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3} \right]_{z=e^{i\pi}} = -\frac{3}{128} 2^{3/4} e^{i\pi/4}.$$

为了求 $\operatorname{res} f(\infty)$, 只需注意

$$\sqrt[4]{z(1-z)^3} = O(z), \quad \frac{\sqrt[4]{z(1-z)^3}}{(1+z)^3} = O(z^{-2}),$$

这说明 $f(z)$ 在 $z = \infty$ 点的幂级数展开中不可能含有 z^{-1} 项, 因而 $\operatorname{res} f(\infty) = 0$.

将求得的 $\operatorname{res} f(e^{i\pi})$ 和 $\operatorname{res} f(\infty)$ 代入, 并注意 $e^{-i3\pi/2} = e^{i\pi/2}$, 最后就得到

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3} dx = -\frac{3\pi i}{64} 2^{3/4} \frac{e^{i\pi/4}}{1 - e^{i\pi/2}} = \frac{3\pi}{64} \frac{2^{-1/4}}{\sin \pi/4} = \frac{3\sqrt[4]{2}}{64} \pi. \quad (7.8a)$$

讨论

1. 本题用的是无界区域的留数定理. 函数在围道 C 外只有一个奇点 $z = e^{i\pi}$. 注意: 即使函数在 ∞ 点解析, 其留数也可以不为 0.
2. 本题还可通过化为 B 函数而直接计算出积分, 见第十章例 10.11.
3. 作变换 $x = 1/t$, 则可证明

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3} dx = \int_1^\infty \frac{\sqrt[4]{t(t-1)^3}}{(1+t)^3} dt = \frac{3\sqrt[4]{2}}{64} \pi. \quad (7.8b)$$

因此有

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x|1-x|^3}}{(1+x)^3} \frac{dx}{x} = \frac{3\sqrt[4]{2}}{32} \pi. \quad (7.8c)$$

例 7.5 计算积分

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{a+b-2} \theta \cos(b-a)\theta d\theta, \quad 0 < a < 1, 0 < b < 1, a+b > 1.$$

解 介绍两种略为不同的解法:

解法一 考虑复变积分 $\int_C (1+z)^{\alpha-1} z^{\beta-1} dz$, 其中积分围道如图 7.5 所示, 并规定在割线上岸 $\arg z = \pi$, $\arg(1+z) = 0$, 则根据留数定理, 有

$$\begin{aligned} & \int_{C_R} (1+z)^{\alpha-1} z^{\beta-1} dz + \int_{C_\varepsilon} (1+z)^{\alpha-1} z^{\beta-1} dz + \int_{\text{I}} (1+z)^{\alpha-1} z^{\beta-1} dz \\ & + \int_{C'_\varepsilon} (1+z)^{\alpha-1} z^{\beta-1} dz + \int_{\text{II}} (1+z)^{\alpha-1} z^{\beta-1} dz + \int_{C'_R} (1+z)^{\alpha-1} z^{\beta-1} dz = 0. \end{aligned}$$

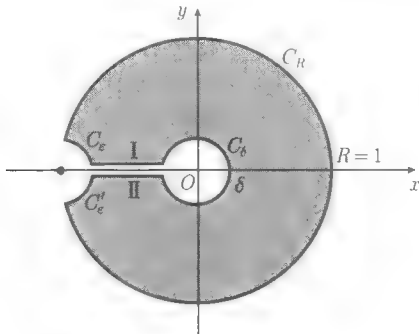


图 7.5 应用于例 7.5 的积分围道

因为 $\beta > 0$, 所以

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} (1+z)^{\alpha-1} z^{\beta-1} dz = 0;$$

又因为 $\alpha > 0$, 也有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} (1+z)^{\alpha-1} z^{\beta-1} dz = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C'_\varepsilon} (1+z)^{\alpha-1} z^{\beta-1} dz = 0.$$

所以就得到

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} (1+e^{i\theta})^{\alpha-1} e^{i\beta\theta} i d\theta + \int_1^0 (1-x)^{\alpha-1} (xe^{i\pi})^{\beta-1} e^{i\pi} dx \\ & + \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} (xe^{-i\pi})^{\beta-1} e^{-i\pi} dx = 0, \end{aligned}$$

即

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(2e^{i\theta/2} \cos \frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1} e^{i\beta\theta} i d\theta = (e^{i\pi\beta} - e^{-i\pi\beta}) \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^{\beta-1} dx.$$

而等式左端为

$$\begin{aligned} & 2^{\alpha-1} i \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1} e^{i(2\beta+\alpha-1)\theta/2} d\theta = 2^{\alpha} i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{\alpha-1} \theta e^{i(2\beta+\alpha-1)\theta} d\theta \\ & = 2^{\alpha+1} i \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha-1} \theta \cos(2\beta+\alpha-1)\theta d\theta, \end{aligned}$$

等式右端为

$$2i \sin \pi\beta \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = 2\pi i \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\beta) \Gamma(\alpha+\beta)},$$

所以

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha-1} \theta \cos(2\beta+\alpha-1)\theta d\theta = \frac{\pi}{2^{\alpha}} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\beta) \Gamma(\alpha+\beta)}.$$

取 $\alpha-1 = a+b-2$, $2\beta+\alpha-1 = b-a$, 即

$$\alpha = a+b-1, \quad \beta = 1-\alpha,$$

代入即得

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{a+b-2} \theta \cos(b-a)\theta d\theta = \frac{\pi}{2^{a+b-1}} \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a) \Gamma(b)}. \quad (7.9)$$

解法二 考虑复变积分 $\oint_C \frac{dz}{(1+iz)^a(1-iz)^b}$, 其中积分围道如图 7.6 所示, 并规定在割线右岸 I 处 $\arg(1+iz) = \pi$, $\arg(1-iz) = 0$, 于是根据留数定理有

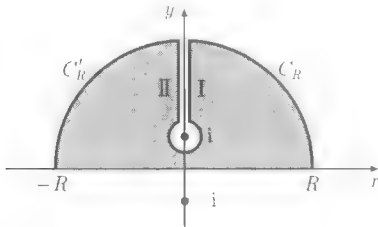


图 7.6 应用于例 7.5 的另一种积分围道

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{(1+ix)^a(1-ix)^b} + \int_{C_R} \frac{dz}{(1+iz)^a(1-iz)^b} + \int_I \frac{dz}{(1+iz)^a(1-iz)^b} \\ + \int_{C'_R} \frac{dz}{(1+iz)^a(1-iz)^b} + \int_{II} \frac{dz}{(1+iz)^a(1-iz)^b} + \int_{C'_R} \frac{dz}{(1+iz)^a(1-iz)^b} = 0.$$

当 $a < 1$, $a+b > 1$ 时, 对于沿小圆弧 C_δ 及大圆弧 C_R , C'_R 的积分, 极限值为

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{dz}{(1+iz)^a(1-iz)^b} = 0, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{dz}{(1+iz)^a(1-iz)^b} = 0, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} \frac{dz}{(1+iz)^a(1-iz)^b} = 0.$$

这样, 在取极限 $R \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$ 之后, 就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+ix)^a(1-ix)^b} = - \int_{\infty}^1 \frac{idx}{[(x-1)e^{i\pi}]^a(1+x)^b} - \int_1^{\infty} \frac{idx}{[(x-1)e^{-i\pi}]^a(1+x)^b} \\ = i(e^{-i\pi} - e^{i\pi}) \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^a(1+x)^b} = 2 \sin \pi a \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^a(1+x)^b}.$$

在等式右端作变换 $t = 2/(x+1)$, 就可以化得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+ix)^a(1-ix)^b} = \frac{\sin \pi a}{2^{a+b-2}} \int_0^1 t^{a+b-2}(1-t)^{-a} dt \\ = \frac{\sin \pi a}{2^{a+b-2}} \frac{\Gamma(a+b-1) \Gamma(1-a)}{\Gamma(b)} = \frac{\pi}{2^{a+b-2}} \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a) \Gamma(b)}.$$

再在等式左端作变换 $x = \tan \theta$, 则

$$1+ix = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta}, \quad 1-ix = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos \theta}.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+ix)^a(1-ix)^b} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{-i\theta} \cos \theta)^a (e^{i\theta} \cos \theta)^b \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{a+b-2} \theta e^{i(b-a)\theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{a+b-2} \theta \cos(b-a)\theta d\theta.\end{aligned}$$

所以最后就得到 (7.9) 式.

§7.2 含对数函数的积分

例 7.6 计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x[\ln^2 x + \pi^2]}$.

解 取积分围道如图 7.7 所示, 计算复变积分 $\oint_C \frac{dz}{z \ln z}$. 规定在正实轴上 $\arg z = 0$, 所以在图中割线的上、下岸 $\arg z = \pm\pi$. 由于在围道内只有一个奇点 $z = e^{i0}$, 被积函数在该点的留数为 1, 因此, 根据留数定理, 有

$$\int_{C_R} \frac{dz}{z \ln z} + \int_R^{\delta} \frac{dx}{x(\ln x + i\pi)} + \int_{C_{\delta}} \frac{dz}{z \ln z} + \int_{\delta}^R \frac{dx}{x(\ln x - i\pi)} = 2\pi i.$$

取极限 $\delta \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$, 因为

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_{\delta}} \frac{dz}{z \ln z} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{dz}{z \ln z} = 0,$$

所以就得到

$$\int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln x + i\pi} + \frac{1}{\ln x - i\pi} \right) \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} \frac{2\pi i}{\ln^2 x + \pi^2} \frac{dx}{x} = 2\pi i,$$

即

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\ln^2 x + \pi^2} \frac{dx}{x} = 1. \quad (7.10a)$$

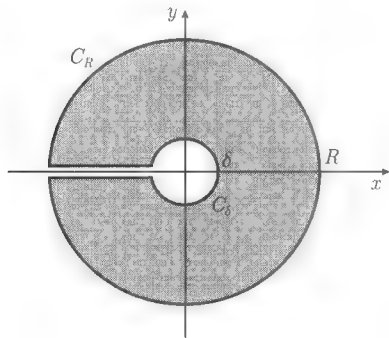


图 7.7 应用于例 7.6 的积分围道

讨论 还可以将上面的结果改写为

$$\int_0^1 \frac{1}{\ln^2 x + \pi^2} \frac{dx}{x} + \int_1^\infty \frac{1}{\ln^2 x + \pi^2} \frac{dx}{x} = 1.$$

在第二个积分中作变换 $t = 1/x$, 就能证明

$$\int_0^1 \frac{1}{\ln^2 x + \pi^2} \frac{dx}{x} = \int_0^1 \frac{1}{\ln^2 t + \pi^2} \frac{dt}{t},$$

所以

$$\int_0^1 \frac{1}{\ln^2 x + \pi^2} \frac{dx}{x} = \int_1^\infty \frac{1}{\ln^2 x + \pi^2} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}. \quad (7.10b)$$

例 7.7 计算积分 $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$.

解 首先面临的问题是如何选择复变积分中的被积函数. 如果取被积函数为 $\ln(1+z^2)/(1+z^2)$, 则在上下平面均有枝点, 因此积分围道必须作相应的变化; 但若取被积函数为 $\ln(z+i)/(1+z^2)$, 则在上半平面没有枝点, 积分围道就可以取为半圆形 (见图 7.8), 因而有

$$\int_{-R}^R \frac{\ln(x+i)}{1+x^2} dx + \int_{C_R} \frac{\ln(z+i)}{1+z^2} dz = 2\pi i \times \frac{\ln 2 + i\pi/2}{2i}.$$

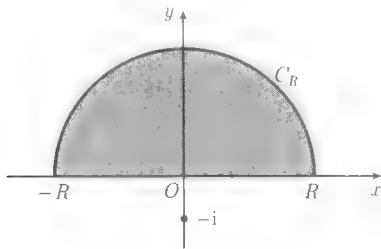


图 7.8 最简单的半圆形围道

根据大圆弧引理, 有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\ln(z+i)}{1+z^2} dz = 0.$$

因此就得到

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln(x+i)}{1+x^2} dx = \pi \left(\ln 2 + \frac{i\pi}{2} \right).$$

利用

$$\ln(x+i) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + i \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right),$$

比较实部, 就有

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx = \pi \ln 2.$$

即

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx = \pi \ln 2. \quad (7.11)$$

讨论 仿照上题的办法, 也能导出

$$\int_0^1 \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \ln 2. \quad (7.12)$$

例 7.8 计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{\pi(1 - \cos ax) - 2 \ln x \sin ax}{\ln^2 x + \pi^2/4} \frac{dx}{x}$, 其中 $a > 0$.

解 取复变积分的被积函数为 $f(z) = \frac{1 - e^{iaz}}{z(\ln z - i\pi/2)}$. 由于 $z = 0$ 是枝点, 所以仍需取积分围道如图 7.3 所示. 在积分围道内只有一个奇点 $z = e^{i\pi/2}$, 留数为

$$\operatorname{res} \left\{ \frac{1 - e^{iaz}}{z(\ln z - i\pi/2)} \right\}_{z=e^{i\pi/2}} = (1 - e^{iaz})_{z=e^{i\pi/2}} = 1 - e^{-a},$$

所以, 根据留数定理, 有

$$\begin{aligned} & \int_R^{\delta} \frac{1 - e^{-iax}}{\ln x + i\pi/2} \frac{dx}{x} + \int_{C_{\delta}} \frac{1 - e^{iaz}}{\ln z - i\pi/2} \frac{dz}{z} + \int_{\delta}^R \frac{1 - e^{iax}}{\ln x - i\pi/2} \frac{dx}{x} \\ & + \int_{C_R} \frac{1 - e^{iaz}}{\ln z - i\pi/2} \frac{dz}{z} = 2\pi i (1 - e^{-a}). \end{aligned}$$

按照小圆弧引理, 有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_{\delta}} \frac{e^{iaz}}{\ln z - i\pi/2} \frac{dz}{z} = 0.$$

又按照 Jordan 引理及大圆弧引理, 有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{\ln z - i\pi/2} \frac{dz}{z} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{\ln z - i\pi/2} \frac{dz}{z} = 0.$$

这样就得出

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left(-\frac{1 - e^{-iax}}{\ln x + i\pi/2} + \frac{1 - e^{iax}}{\ln x - i\pi/2} \right) \frac{dx}{x} \\ & = \int_0^{\infty} \frac{-(1 - e^{-iax})(\ln x - i\pi/2) + (1 - e^{iax})(\ln x + i\pi/2)}{\ln^2 x + \pi^2/4} \frac{dx}{x} \\ & = \int_0^{\infty} \frac{(e^{-iax} - e^{iax}) \ln x + i\pi(2 - e^{-iax} - e^{iax})/2}{\ln^2 x + \pi^2/4} \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{-2i \sin ax \ln x + i\pi(1 - \cos ax)}{\ln^2 x + \pi^2/4} \frac{dx}{x} = 2\pi i(1 - e^{-a}),$$

即

$$\int_0^{\infty} \frac{\pi(1 - \cos ax) - 2 \sin ax \ln x}{\ln^2 x + \pi^2/4} \frac{dx}{x} = 2\pi(1 - e^{-a}). \quad (7.13)$$

再代入例 7.6 的结果, 还能进一步得到

$$\int_0^{\infty} \frac{\pi \cos ax + 2 \sin ax \ln x}{\ln^2 x + \pi^2/4} \frac{dx}{x} = 2\pi e^{-a}. \quad (7.14)$$

例 7.9 计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x^2 + a^2)^2} dx, a > 0$.

解 在复平面上计算围道积分 $\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{\ln z}{\sqrt{z}(z^2 + a^2)^2} dz$, 其中积分围道 C 如图 7.3 所示, 并规定在正实轴上 $\arg z = 0$. 在积分围道内, 被积函数只有一个奇点 $z = ae^{i\pi/2}$, 留数为

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \frac{\ln z}{\sqrt{z}(z^2 + a^2)^2} \Big|_{z=ae^{i\pi/2}} &= \frac{d}{dz} \left[(z - ai)^2 \cdot \frac{\ln z}{\sqrt{z}(z^2 + a^2)^2} \right]_{z=ae^{i\pi/2}} = \frac{d}{dz} \left[\frac{\ln z}{\sqrt{z}(z + ai)^2} \right]_{z=ae^{i\pi/2}} \\ &= \left[\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}(z + ai)^2} - \frac{1}{2z^{3/2}} \cdot \frac{\ln z}{(z + ai)^2} + \frac{\ln z}{\sqrt{z}} \cdot \frac{-2}{(z + ai)^3} \right]_{z=ae^{i\pi/2}} \\ &= \frac{1}{4a^{7/2}} e^{-i3\pi/4} \left[-1 + \frac{3}{2} \left(\ln a + \frac{i\pi}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

根据留数定理, 就有

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\ln z}{\sqrt{z}(z^2 + a^2)^2} dz &= \int_{\delta}^R \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x^2 + a^2)^2} dx + \int_{C_R} \frac{\ln z}{\sqrt{z}(z^2 + a^2)^2} dz \\ &\quad + \int_R^{\delta} \frac{\ln x + i\pi}{i\sqrt{x}(x^2 + a^2)^2} (-dx) + \int_{C_{\delta}} \frac{\ln z}{\sqrt{z}(z^2 + a^2)^2} dz \\ &= 2\pi i \times \frac{1}{4a^{7/2}} e^{-i3\pi/4} \left[-1 + \frac{3}{2} \left(\ln a + \frac{i\pi}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

因为

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_{\delta}} \frac{\ln z}{\sqrt{z}(z^2 + a^2)^2} dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\ln z}{\sqrt{z}(z^2 + a^2)^2} dz = 0,$$

所以, 取极限 $\delta \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$, 就有

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x + \pi}{\sqrt{x}(x^2 + a^2)^2} dx - i \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{2a^{7/2}} e^{-i\pi/4} \left[-1 + \frac{3}{2} \left(\ln a + \frac{i\pi}{2} \right) \right].$$

比较虚部, 即得

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x^2+a^2)^2} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}a^{7/2}} \left(\frac{3}{2} \ln a - 1 - \frac{3\pi}{4} \right). \quad (7.15)$$

若比较实部, 又可得到

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x + \pi}{\sqrt{x}(x^2+a^2)^2} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}a^{7/2}} \left(\frac{3}{2} \ln a - 1 + \frac{3\pi}{4} \right).$$

因而还给出

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+a^2)^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}a^{7/2}} \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}a^{7/2}}. \quad (7.16)$$

讨论 在 (7.16) 式中取 $a=1$, 而后再拆成 $(0,1)$ 与 $(1,\infty)$ 的两段积分, 即可推出

$$\int_0^1 \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_1^{\infty} \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}. \quad (7.17)$$

例 7.10 计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2-1} dx$.

解 采用积分围道如图 7.9 所示, 计算围道积分 $\oint_C \frac{\ln z}{z^2-1} dz$. 注意 $z=1$ 是可去奇点, 故可不必避开. 规定在正实轴上 $\arg z=0$, 因而在负实轴上有 $\arg z=\pi$. 于是, 由留数定理, 有

$$\begin{aligned} & \int_R^{1+\varepsilon} \frac{\ln x + i\pi}{x^2-1} (-dx) + \int_{C_\varepsilon} \frac{\ln z}{z^2-1} dz + \int_{1-\varepsilon}^\delta \frac{\ln x + i\pi}{x^2-1} (-dx) \\ & + \int_{C_\delta} \frac{\ln z}{z^2-1} dz + \int_\delta^R \frac{\ln x + i\pi}{x^2-1} (-dx) + \int_{C_R} \frac{\ln z}{z^2-1} dz = 0. \end{aligned}$$

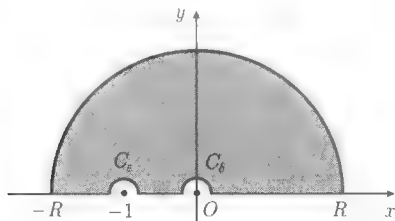


图 7.9 应用于例 7.10 的积分围道

取极限 $\varepsilon \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, 则根据小圆弧引理和大圆弧引理, 能够求出

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{\ln z}{z^2-1} dz = -i\pi \cdot \left(-\frac{\pi i}{2} \right) = -\frac{\pi^2}{2},$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{\ln z}{z^2 - 1} dz = 0,$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\ln z}{z^2 - 1} dz = 0,$$

由此即可得到

$$\int_0^\infty \left(\frac{\ln x + i\pi}{x^2 - 1} + \frac{\ln x}{x^2 - 1} \right) dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

比较实部, 就能求得

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{4}. \quad (7.18a)$$

讨论

1. 作变换 $x = e^t$, 本题即可化为例 6.16.
2. 由 (7.18a) 式也能导出

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \frac{\pi^2}{8}. \quad (7.18b)$$

例 7.11 计算积分 $\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha \ln x)}{x^2 + 1} dx$, 其中 $\alpha > 0$.

解 按照一般经验, 本题可选用被积函数 $e^{i \ln z} / (z^2 + 1)$, 积分围道如图 7.3 所示, 请读者完成此项计算.

下面介绍一种略为不同的做法 (其实没有本质差别), 即取被积函数 $f(z) = e^{i \alpha \ln z} / (z^2 - 1)$, 积分围道如图 7.10 所示, 于是有

$$\begin{aligned} & \int_R^\delta \frac{e^{i \alpha \ln(xe^{i\pi/2})}}{-x^2 - 1} (i dx) + \int_{C_\delta} \frac{e^{i \alpha \ln z}}{z^2 - 1} dz + \int_\delta^R \frac{e^{i \alpha \ln(xe^{-i\pi/2})}}{-x^2 - 1} (-i dx) + \int_{C_R} \frac{e^{i \alpha \ln z}}{z^2 - 1} dz \\ & = 2\pi i \times \operatorname{res} \left\{ \frac{e^{i \alpha \ln z}}{z^2 - 1} \right\}_{z=1} = i\pi. \end{aligned}$$

注意这里使用了约定 $\arg z|_{z=1} = 0$. 取极限 $\delta \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$, 因为 $\left| \frac{e^{i \alpha \ln z}}{z^2 - 1} \right| = \frac{e^{-\alpha \arg z}}{|z^2 - 1|}$, 所以根据小圆弧引理及大圆弧引理, 就有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{e^{i \alpha \ln z}}{z^2 - 1} dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i \alpha \ln z}}{z^2 - 1} dz = 0,$$

从而导出

$$(e^{-\pi\alpha/2} + e^{\pi\alpha/2}) \int_0^\infty \frac{e^{i \alpha \ln x}}{x^2 + 1} dx = \pi, \quad \text{亦即} \quad \int_0^\infty \frac{e^{i \alpha \ln x}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2 \cosh(\pi\alpha/2)}.$$

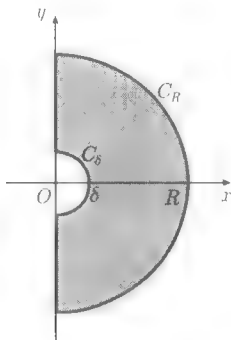


图 7.10 应用于例 7.11 的积分围道

分别比较实部和虚部, 即得

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha \ln x)}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2 \cosh(\pi\alpha/2)}, \quad (7.19a)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha \ln x)}{x^2 + 1} dx = 0. \quad (7.19b)$$

讨论

1. 如果作变换 $t = \ln x$, 本题就可以化为例 6.12.

2. 由 (7.19a) 式亦可推出

$$\int_0^1 \frac{\cos(\alpha \ln x)}{x^2 + 1} dx = \int_1^{\infty} \frac{\cos(\alpha \ln x)}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{4 \cosh(\pi\alpha/2)}. \quad (7.19c)$$

例 7.12 计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha \ln x)}{x^2 - 1} dx$, 其中 $\alpha > 0$.

解 本题的计算方法与例 7.8 及例 7.11 相似. 但考虑到复变积分中的被积函数应取为 $f(z) = e^{i\alpha \ln z} / (z^2 - 1)$, 相应地, 积分围道亦应避开 $z=1$ 点 (该点现在是一阶极点), 如图 7.11 所示. 由留数定理, 得

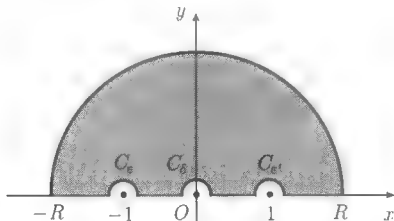


图 7.11 应用于例 7.12 的积分围道

$$\begin{aligned} & \int_R^{1+\varepsilon} \frac{e^{i\alpha(\ln x+i\pi)}}{x^2-1}(-dx) + \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{i\alpha \ln z}}{z^2-1} dz + \int_{1-\varepsilon}^\delta \frac{e^{i\alpha(\ln x+i\pi)}}{x^2-1}(-dx) + \int_{C_\delta} \frac{e^{i\alpha \ln z}}{z^2-1} dz \\ & + \int_\delta^{1-\varepsilon'} \frac{e^{i\alpha \ln x}}{x^2-1}(-dx) + \int_{C_{\varepsilon'}} \frac{e^{i\alpha \ln z}}{z^2-1} dz + \int_{1+\varepsilon'}^R \frac{e^{i\alpha \ln x}}{x^2-1} dx + \int_{C_R} \frac{e^{i\alpha \ln z}}{z^2-1} dz = 0. \end{aligned}$$

取极限 $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon' \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, 因为

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{i\alpha \ln z}}{z^2-1} dz &= -i\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-\pi\alpha}\right) = \frac{i\pi}{2}e^{-\pi\alpha}, \\ \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{C_{\varepsilon'}} \frac{e^{i\alpha \ln z}}{z^2-1} dz &= -i\pi \cdot \frac{1}{2} = -\frac{i\pi}{2}, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{e^{i\alpha \ln z}}{z^2-1} dz &= 0, \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i\alpha \ln z}}{z^2-1} dz &= 0, \end{aligned}$$

由此可导出

$$(1 + e^{\pi\alpha}) \int_0^\infty \frac{e^{i\alpha \ln x}}{x^2-1} dx = \frac{i\pi}{2} (1 - e^{-\pi\alpha}).$$

比较虚部, 即得

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha \ln x)}{x^2-1} dx = \frac{\pi}{2} \tanh \frac{\pi\alpha}{2}. \quad (7.20a)$$

讨论

1. 作变换 $x = e^t$, 本题即可化为例 6.17.
2. 由本题还可导出

$$\int_0^1 \frac{\sin(\alpha \ln x)}{x^2-1} dx = \int_1^\infty \frac{\sin(\alpha \ln x)}{x^2-1} dx = \frac{\pi}{4} \tanh \frac{\pi\alpha}{2}. \quad (7.20b)$$

例 7.13 计算积分 $\int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos \theta + r^2) d\theta$, 其中 $r \neq \pm 1$ 为实数.

解 本题的被积函数为 $\ln(1 - 2r \cos \theta + r^2)$, 根据例 7.2 的启发, 应当可以考虑半圆形围道, 而被积函数中则应含有 $\ln[(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2]$. 但这样出现一个新问题, 即被积函数在上半平面并不解析: 它在上、下半平面均有一个枝点^①. 为了克服这一困难, 正确的做法是沿半圆形围道 (见图 7.8) 计算围道积分

$$\oint_C \ln \frac{(1-r) - i(1+r)z}{1-iz} \frac{dz}{1+z^2}.$$

^① 除了这两个枝点外, ∞ 点也是枝点.

在 $r^2 < 1$ 的条件下, 被积函数的枝点全都位于负虚轴上. 而且, 如果规定

$$\left\{ \ln \frac{(1-r) - i(1+r)z}{1-iz} \right\}_{z=0} = \ln(1-r), \quad \text{即} \quad \left\{ \ln \frac{(1-r) - i(1+r)z}{1-iz} \right\}_{z=i} = 0,$$

则 $z=i$ 是被积函数的可去奇点, 因此

$$\oint_C \ln \frac{(1-r) - i(1+r)z}{1-iz} \frac{dz}{1+z^2} = 0, \quad r^2 < 1.$$

因为

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \ln \frac{(1-r) - i(1+r)z}{1-iz} \frac{dz}{1+z^2} = 0,$$

所以, 在取极限 $R \rightarrow \infty$ 后, 就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(1-r) - i(1+r)x}{1-ix} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\infty} \ln \frac{(1-r)^2 + (1+r)^2 x^2}{1+x^2} \frac{dx}{1+x^2} = 0.$$

再作变换 $x = \tan \theta$, 就得到

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1 - 2r \cos 2\theta + r^2) d\theta = 0, \quad r^2 < 1,$$

亦即

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2r \cos \theta + r^2) d\theta = 0, \quad r^2 < 1. \quad (7.21a)$$

当 $r^2 > 1$ 时, 则应计算围道积分 $\oint_C \ln \frac{(|r|-1) - i(|r|+1)z}{1-iz} \frac{dz}{1+z^2}$. 因为这时

$$\operatorname{res} \left\{ \ln \frac{(|r|-1) - i(|r|+1)z}{1-iz} \frac{1}{1-z^2} \right\}_{z=i} = \ln \frac{(|r|-1) - i(|r|+1)z}{1-iz} \frac{1}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2i} \ln |r|.$$

所以最后就得到

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2r \cos \theta + r^2) d\theta = 2\pi \ln |r|, \quad r^2 > 1. \quad (7.21b)$$

讨论

1. 本题还有另一种做法, 即计算沿单位圆的围道积分

$$\oint_{|z|=1} \ln(1-rz) \frac{dz}{z} \quad \text{或} \quad \oint_{|z|=1} \ln(|r|-z) \frac{dz}{z},$$

前者适用于 $r^2 < 1$, 后者适用于 $r^2 > 1$.

2. 将积分围道稍作变化, 计算复变积分

$$\oint_C \ln \frac{(1-r) - i(1+r)z}{1-iz} \frac{dz}{(1+z^2)^2},$$

则可导出

$$\text{v.p.} \int_0^\pi \frac{\ln(1-2r \cos \theta + r^2)}{\cos \theta} d\theta = 2\pi \arctan r, \quad r^2 < 1. \quad (7.22)$$

例 7.14 计算积分 $\int_0^\pi \ln(1-2r \cos \theta + r^2) \cos n\theta d\theta$, 其中 $r \neq \pm 1$ 为实数.

解 采用单位圆作围道来计算此积分. 当 $r^2 < 1$ 时, 有

$$\oint_{|z|=1} \ln(1-rz) \frac{dz}{z^{n+1}} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} r^k \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^{n-k+1}} = -\frac{2\pi i}{n} r^n.$$

$$\oint_{|z|=1} \ln(1-rz) z^{n-1} dz = 0 \quad (\text{因为积分围道内无奇点}).$$

另一方面, 又有

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} \ln(1-rz) \frac{z^n + z^{-n}}{z} dz &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1-re^{i\theta}) (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) i d\theta \\ &= \int_0^\pi [\ln(1-re^{i\theta}) + \ln(1-re^{-i\theta})] (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) i d\theta \\ &= 2i \int_0^\pi \ln(1-2r \cos \theta + r^2) \cos n\theta d\theta. \end{aligned}$$

所以就求得

$$\int_0^\pi \ln(1-2r \cos \theta + r^2) \cos n\theta d\theta = -\frac{\pi}{n} r^n, \quad r^2 < 1. \quad (7.23a)$$

当 $r^2 > 1$ 时, 则可考虑围道积分

$$\oint_{|z|=1} \ln(r-z) \frac{dz}{z^{n+1}} \quad \text{或} \quad \oint_{|z|=1} \ln(r-z) z^{n-1} dz,$$

从而即可计算出

$$\int_0^\pi \ln(1-2r \cos \theta + r^2) \cos n\theta d\theta = -\frac{\pi}{n} r^{-n}, \quad r^2 > 1. \quad (7.23b)$$

讨论

1. 如果采用图 7.12 中的围道, 计算围道积分 $\oint_C \frac{\ln(1-rz)}{z^2+1} dz$, 则也能得到上一例题中的 (7.22) 式.

2. 本例题和例 7.13 结合起来, 就是函数 $\ln(1-2r \cos \theta + r^2)$ 的 Fourier 展开问题, 甚至也可以归结为函数 $\ln(1+z)$ 或 $\ln(1+1/z)$ 的 Taylor 展开问题.

对于 $\ln(1+z)$, 枝点为 $z=1$ 与 $z=\infty$. 沿负实轴作割线, 并规定 $\ln(1+z)|_{z=0} = 0$, 则可将 $\ln(1+z)$ 在单位圆内作 Taylor 展开:

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$$

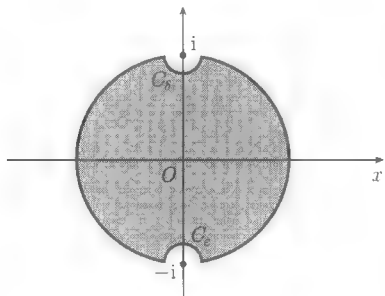


图 7.12 绕过奇点的单位圆

代入 $z = re^{i\theta}$, 并分别比较实部与虚部, 即得

$$\frac{1}{2} \ln(1 + 2r \cos \theta + r^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} r^n \cos n\theta, \quad (7.24a)$$

$$\arctan \frac{r \sin \theta}{1 + r \cos \theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} r^n \sin n\theta. \quad (7.24b)$$

将 (7.24a) 式看成函数 $\ln(1 + 2r \cos \theta + r^2)$ 所作的 Fourier 展开, 因此, 根据 Fourier 展开的系数公式, 就有

$$\int_0^{\pi} \ln(1 + 2r \cos \theta + r^2) d\theta = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad (7.25a)$$

$$\int_0^{\pi} \ln(1 + 2r \cos \theta + r^2) \cos n\theta d\theta = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \pi r^n, \quad 0 \leq r < 1. \quad (7.25b)$$

作变换 $\theta \rightarrow \pi - \theta$, 就能得到 (7.21a) 与 (7.23a) 两式.

与此同时, 还可由 (7.24b) 式导出

$$\int_0^{\pi} \arctan \frac{r \sin \theta}{1 + r \cos \theta} \sin n\theta d\theta = \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \pi r^n, \quad 0 \leq r < 1, \quad (7.26a)$$

或者记为

$$\int_0^{\pi} \arctan \frac{r \sin \theta}{1 - r \cos \theta} \sin n\theta d\theta = \frac{1}{2n} \pi r^n, \quad 0 \leq r < 1. \quad (7.26b)$$

同理, 将 $\ln(1 + 1/z)$ 在无穷远点作 Taylor 展开, 也能得到

$$\frac{1}{2} \ln(1 + 2r \cos \theta + r^2) - \ln r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} r^{-n} \cos n\theta, \quad r > 1, \quad (7.27a)$$

$$\arctan \frac{r \sin \theta}{1 + r \cos \theta} - \theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} r^{-n} \sin n\theta, \quad r > 1. \quad (7.27b)$$

由此亦可导出

$$\int_0^\pi \ln(1+2r \cos \theta + r^2) d\theta = 2\pi \ln r, \quad r > 1, \quad (7.28a)$$

$$\int_0^\pi \ln(1+2r \cos \theta + r^2) \cos n\theta d\theta = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \pi r^{-n}, \quad r > 1 \quad (7.28b)$$

以及

$$\int_0^\pi \arctan \frac{r \sin \theta}{1+r \cos \theta} \sin n\theta d\theta = \frac{(-1)^n}{2n} \pi (r^{-n} - 2), \quad r > 1, \quad (7.29a)$$

$$\int_0^\pi \arctan \frac{r \sin \theta}{1-r \cos \theta} \sin n\theta d\theta = -\frac{1}{2n} \pi (r^{-n} - 2), \quad r > 1. \quad (7.29b)$$

也能将 (7.28a) 和 (7.28b) 两式化为 (7.21a) 和 (7.23a) 两式.

3. 由 (7.24b) 式还能推出

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \arctan \frac{r \sin \theta}{1+r \cos \theta} \frac{d\theta}{\sin \theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} r^n \int_0^\pi \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2n+1} r^{2n+1} = \frac{\pi}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}, \quad 0 \leq r < 1, \end{aligned} \quad (7.30)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \arctan \frac{r \sin \theta}{1+r \cos \theta} \frac{d\theta}{\tan \theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} r^n \int_0^\pi \frac{\sin n\theta \cos \theta}{\sin \theta} d\theta \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} r^n \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta}{\sin \theta} d\theta \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2n} r^{2n} = -\frac{\pi}{2} \ln \frac{1}{1-r^2}, \quad 0 \leq r < 1. \end{aligned} \quad (7.31)$$

计算中用到了第十章中的结果, 即 (10.49a) 与 (10.49b) 两式.

§7.3 含 $\ln \tan \theta$ 的积分

例 7.15 计算积分 $\int_0^{\pi/2} \frac{1-r \cos 2\theta}{1-2r \cos 2\theta+r^2} \ln \tan \theta d\theta$, 其中 $r \neq \pm 1$ 为实数.

解 本题的计算仍可从例 7.2 得到启发. 取被积函数为

$$f(z) = \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{\ln z}{1+z^2},$$

积分围道仍如图 7.3 所示, 则有

$$\begin{aligned}
& \int_R^\delta \frac{(1+r)x^2 + (1-r)}{(1+r)^2 x^2 + (1-r)^2} \frac{\ln x + i\pi}{1+x^2} (-dx) + \int_{C_\delta} \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{\ln z}{1+z^2} dz \\
& + \int_\delta^R \frac{(1+r)x^2 + (1-r)}{(1+r)^2 x^2 + (1-r)^2} \frac{\ln x}{1+x^2} dx + \int_{C_R} \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{\ln z}{1+z^2} dz \\
& = 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} \left\{ \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{\ln z}{1+z^2} \right\}.
\end{aligned}$$

当 $\delta \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ 时, 因为

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{\ln z}{1+z^2} dz &= 0, \\
\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{\ln z}{1+z^2} dz &= 0,
\end{aligned}$$

所以有

$$\int_0^\infty \frac{(1+r)x^2 + (1-r)}{(1+r)^2 x^2 + (1-r)^2} \frac{2 \ln x + i\pi}{1+x^2} dx - 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} \left\{ \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{\ln z}{1+z^2} \right\}.$$

下面求出相关奇点处的留数:

$$\begin{aligned}
\operatorname{res} \left\{ \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{\ln z}{1+z^2} \right\}_{z=e^{i\pi/2}} &= \frac{\pi}{8}, \\
\operatorname{res} \left\{ \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{\ln z}{1+z^2} \right\}_{z=e^{i\pi/2}(1-r)/(1+r)} &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4i} \ln \frac{1-r}{1+r}, \\
\operatorname{res} \left\{ \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{\ln z}{1+z^2} \right\}_{z=e^{i\pi/2}(r-1)/(r+1)} &= -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4i} \ln \frac{r-1}{r+1}.
\end{aligned}$$

当 $r^2 < 1$, 即 $-1 < r < 1$ 时, 处于上半平面的奇点是 $e^{i\pi/2}(1-r)/(1+r)$ 和 $z = e^{i\pi/2}$, 所以有

$$\sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} \left\{ \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{\ln z}{1+z^2} \right\} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4i} \ln \frac{1-r}{1+r}.$$

分别比较实部和虚部, 即得

$$\int_0^\infty \frac{(1+r)x^2 + (1-r)}{(1+r)^2 x^2 + (1-r)^2} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} \ln \frac{1-r}{1+r}, \quad (7.32a)$$

$$\int_0^\infty \frac{(1+r)x^2 + (1-r)}{(1+r)^2 x^2 + (1-r)^2} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (7.33a)$$

当 $r^2 > 1$, 即 $r < -1$ 或 $r > 1$ 时, 处于上半平面的奇点是 $e^{i\pi/2}(r-1)/(r+1)$ 和 $z = e^{i\pi/2}$, 也有

$$\sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} \left\{ \frac{(1+r)z^2 + (1-r)}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \frac{\ln z}{1+z^2} \right\} = \frac{i}{4} \ln \frac{r-1}{r+1}.$$

分别比较实部和虚部, 又得到

$$\int_0^{\infty} \frac{(1+r)x^2 + (1-r)}{(1+r)^2x^2 + (1-r)^2} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = -\frac{\pi}{4} \ln \frac{r-1}{r+1}, \quad (7.32b)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{(1+r)x^2 + (1-r)}{(1+r)^2x^2 + (1-r)^2} \frac{1}{1+x^2} dx = 0. \quad (7.33b)$$

进一步作变换 $x = \tan \theta$, 上述结果就可改写为

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1-r \cos 2\theta}{1-2r \cos 2\theta + r^2} \ln \tan \theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \ln \frac{1-r}{1+r}, & r^2 < 1, \\ -\frac{\pi}{4} \ln \frac{r-1}{r+1}, & r^2 > 1 \end{cases} \quad (7.34)$$

以及

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1-r \cos 2\theta}{1-2r \cos 2\theta + r^2} d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & r^2 < 1, \\ 0, & r^2 > 1. \end{cases} \quad (7.35)$$

例 7.16 指定被积函数为 $f(z) = \frac{2zr}{z^2(1+r)^2 + (1-r)^2} \frac{\ln(1-iz)}{1+z^2}$, 选择适当的积分围道, 计算积分 $\int_0^{\pi/2} \frac{r \sin 2\theta}{1-2r \cos 2\theta + r^2} \theta d\theta$, 其中 r 为实数, 且 $r \neq \pm 1$.

解 本题尽管不含有 $\ln \tan \theta$ 等函数, 但与例 7.15 有类似之处, 所以也收录在此. 与例 7.15 略有不同的是, $z=0$ 不是被积函数的奇点, 故只需要取图 7.8 中的半圆形积分围道, 计算复变积分

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{2zr}{z^2(1+r)^2 + (1-r)^2} \frac{\ln(1-iz)}{1+z^2} dz$$

即可. 这里规定当 z 取实数值 x 时,

$$\ln(1-ix) = \ln \sqrt{1+x^2} - i \arctan x.$$

考虑到在积分围道内有奇点 $z=i$ 及

$$z = \begin{cases} i \frac{1-r}{1+r}, & r^2 < 1, \\ -i \frac{1-r}{1+r}, & r^2 > 1. \end{cases}$$

于是, 当 $r^2 < 1$ 时, 按照留数定理, 有

$$\begin{aligned}
& \oint_C \frac{2zr}{z^2(1+r)^2 + (1-r)^2} \frac{\ln(1-iz)}{1+z^2} dz \\
&= \int_{-R}^R \frac{2zr}{z^2(1+r)^2 + (1-r)^2} \frac{\ln(1-iz)}{1+z^2} dz + \int_{C_R} \frac{2zr}{z^2(1+r)^2 + (1-r)^2} \frac{\ln(1-iz)}{1+z^2} dz \\
&= 2\pi i \left[\operatorname{res} f(i) + \operatorname{res} f\left(i \frac{1-r}{1+r}\right) \right],
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\operatorname{res} f(i) &= \frac{2zr}{z^2(1+r)^2 + (1-r)^2} \frac{\ln(1-iz)}{2z} \Big|_{z=i} = -\frac{1}{4} \ln 2, \\
\operatorname{res} f\left(i \frac{1-r}{1+r}\right) &= \frac{r}{(1+r)^2} \frac{\ln(1-iz)}{1+z^2} \Big|_{z=i(1-r)/(1+r)} = \frac{1}{4} [\ln 2 - \ln(1+r)].
\end{aligned}$$

考虑到

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{2zr}{z^2(1+r)^2 + (1-r)^2} \frac{\ln(1-iz)}{1+z^2} dz = 0,$$

将上面的围道积分取极限 $R \rightarrow \infty$, 得

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2xr}{x^2(1+r)^2 + (1-r)^2} \frac{\ln(1-ix)}{1+x^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2xr}{x^2(1+r)^2 + (1-r)^2} \frac{\ln \sqrt{1+x^2} - i \arctan x}{1+x^2} dx \\
&= -2i \int_0^{\infty} \frac{2xr}{x^2(1+r)^2 + (1-r)^2} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (\text{根据被积函数的奇偶性}) \\
&= -2i \int_0^{\pi/2} \frac{2r \tan \theta}{(1+r)^2 \tan^2 \theta + (1-r)^2} \theta d\theta \quad (\text{令 } x = \tan \theta) \\
&= -2i \int_0^{\pi/2} \frac{r \sin 2\theta}{1 - 2r \cos 2\theta + r^2} \theta d\theta \\
&= 2\pi i \left\{ -\frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{4} [\ln 2 - \ln(1+r)] \right\}.
\end{aligned}$$

所以就能得到

$$\int_0^{\pi/2} \frac{r \sin 2\theta}{1 - 2r \cos 2\theta + r^2} \theta d\theta = \frac{\pi}{4} \ln(1+r). \quad r^2 < 1. \quad (7.36a)$$

当 $r^2 > 1$ 时, $\operatorname{res} f(i)$ 的计算结果同前, 而

$$\operatorname{res} f\left(-i \frac{1-r}{1+r}\right) = \frac{1}{4} \ln \left(1 - \frac{1-r}{1+r}\right) = \frac{1}{4} \left[\ln 2 - \ln \left(1 + \frac{1}{r}\right) \right],$$

又可得到

$$\int_0^{\pi/2} \frac{r \sin 2\theta}{1 - 2r \cos 2\theta + r^2} \theta d\theta = \frac{\pi}{4} \ln \left(1 + \frac{1}{r}\right), \quad r^2 > 1. \quad (7.36b)$$

例 7.17 计算积分 $\int_0^{\pi/2} \cos[2(2n+1)\theta] \ln \tan \theta d\theta, n=0,1,2,\dots$.

解 可考虑复变积分 $\oint_C z^{2n} \ln \frac{1-z}{1+z} dz$, 而积分围道 C 如图 7.13(a) 所示. 按照应用留数定理计算定积分的标准做法, 就能计算出所求的积分. 值得注意的是, 由于 $z = \pm 1$ 都是被积函数的枝点, 故需要沿实轴作割线, 并规定在割线上岸,

$$\arg(1-z) = -\pi, \quad \arg(1+z) = 0.$$

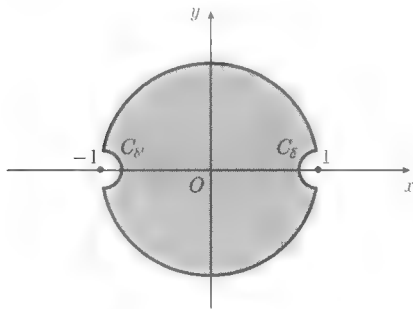
在这样的单值分支规定下, 则对于单位圆上的变点 z , 恒有

$$\arg \left\{ \ln \frac{1-z}{1+z} \right\} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{上半圆周,} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{下半圆周.} \end{cases}$$

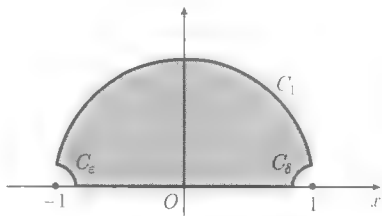
所以, 如果将单位圆上的变点写成 $z = e^{\pm i\theta}, 0 < \theta < \pi$, 则

$$\ln \frac{1-z}{1+z} \Big|_{z=e^{i\theta}} = \ln \tan \frac{\theta}{2} \mp \frac{i\pi}{2}.$$

以下计算从略, 请读者补足.



(a) 绕过枝点 $z = \pm 1$ 的圆形围道



(b) 绕过枝点 $z = \pm 1$ 的半圆形围道

图 7.13 应用于例 7.17 的两种积分围道

现在采用图 7.13(b) 中的半圆形围道. 因为被积函数

$$z^{2n} \ln \frac{1-z}{1+z} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} z^{2n+2k+1}, \quad |z| < 1$$

为奇函数, 所以沿实轴的两段积分互相抵消. 再由于

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} z^{2n} \ln \frac{1-z}{1+z} dz = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} z^{2n} \ln \frac{1-z}{1+z} dz = 0,$$

因此, 取极限 $\delta \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, 就有

$$\int_0^\pi e^{i2n\theta} \left(\ln \tan \frac{\theta}{2} - \frac{i\pi}{2} \right) i e^{i\theta} d\theta = 0.$$

分别比较实部与虚部, 即得

$$\int_0^\pi \cos(2n+1)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin(2n+1)\theta d\theta = -\frac{\pi}{2n+1}, \quad (7.37)$$

$$\int_0^\pi \sin(2n+1)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \cos(2n+1)\theta d\theta = 0, \quad (7.38)$$

或者写为

$$\int_0^{\pi/2} \cos[2(2n+1)\theta] \ln \tan \theta d\theta = -\frac{\pi}{2(2n+1)}, \quad (7.37')$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin[2(2n+1)\theta] \ln \tan \theta d\theta = 0. \quad (7.38')$$

讨论

1. 计算围道积分 $\oint_C z^{2n-1} \ln \frac{1-z}{1+z} dz$, 可以导出

$$\int_0^\pi e^{i2n\theta} \left(\ln \tan \frac{\theta}{2} - \frac{i\pi}{2} \right) i d\theta + \int_{-1}^1 x^{2n-1} \ln \frac{1-x}{1+x} dx = 0.$$

因为

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^{2n-1} \ln \frac{1-x}{1+x} dx &= 4 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2k}}{2k+1} dx = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{2k+2n+1} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1/2} - \frac{1}{k+n+1/2} \right) = \frac{1}{n} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

所以, 分别比较实部与虚部, 即可得到

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin 2n\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \cos 2n\theta d\theta - \int_{-1}^1 x^{2n-1} \ln \frac{1-x}{1+x} dx \\ &= -\frac{1}{n} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (7.39)$$

$$\int_0^\pi \cos 2n\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin 2n\theta d\theta = 0. \quad (7.40)$$

当然也能直接证明 (7.40) 式, 例如:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos 2n\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta &= \int_0^{\pi/2} \cos 2n\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta + \int_{\pi/2}^\pi \cos 2n\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos 2n\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta + \int_0^{\pi/2} \cos 2n\theta \ln \cot \frac{\theta}{2} d\theta = 0. \end{aligned}$$

2. 在 (7.37) 式逐次代入 $n = 0, 1, 2, \dots$, 即得

$$\int_0^\pi \cos \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\pi, \quad (7.41a)$$

$$\int_0^\pi \cos 3\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi}{3}, \quad (7.41b)$$

$$\int_0^\pi \cos 5\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi}{5}, \quad (7.41c)$$

.....

在 (7.39) 式代入 $n = 1, 2, 3, \dots$, 也有

$$\int_0^\pi \sin 2\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -2, \quad (7.42a)$$

$$\int_0^\pi \sin 4\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{3}{4}, \quad (7.42b)$$

$$\int_0^\pi \sin 6\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{46}{45}, \quad (7.42c)$$

.....

§7.4 含 $\ln \sin \theta$ 或 $\ln \cos \theta$ 的积分

例 7.18 计算积分 $\int_0^{\pi/2} \ln \sin \theta d\theta$.

解 如果说 $\ln \sin(\theta/2)$ 可以来自函数 $\ln(1-z)$, 自然 $\ln \sin \theta$ 就应当来自函数 $\ln(1-z^2)$. 若由 $z = +1$ 出发, 分别沿正负实轴与 $z = \infty$ 相连而作割线, 并规定 $\arg(1-z^2)|_{z=0} = 0$, 则对于上半圆周上的变点 $z = e^{i\theta}$, $0 < \theta < \pi$, 有

$$\ln(1-z^2) = \ln(2 \sin \theta) + i(\theta - \pi/2).$$

仍采用图 7.13(b) 中的围道, 计算积分 $\oint_C \ln(1-z^2) \frac{dz}{z}$, 并令 $\delta \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, 则得到

$$\int_{-1}^1 \ln(1-x^2) \frac{dx}{x} + \int_0^\pi \left[\ln(2 \sin \theta) + i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \right] i d\theta = 0.$$

上式第一项为沿实轴的积分, 因为被积函数为奇函数, 故必为 0. 这样, 比较虚部, 就有

$$\int_0^\pi \ln(2 \sin \theta) d\theta = 0. \quad (7.43a)$$

考虑到 $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$, 所以进一步有

$$\int_0^{\pi/2} \ln(2 \sin \theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta = 0. \quad (7.43b)$$

另一方面, 可将 (7.43a) 式改写为

$$\int_0^{\pi} \ln \sin \theta \, d\theta = -\ln 2 \int_0^{\pi} d\theta = -\pi \ln 2,$$

由此即得

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin \theta \, d\theta = -\frac{\pi}{2} \ln 2. \quad (7.44a)$$

 **讨论** 通过适当的自变量变换, 也可将 (7.44a) 式化为

$$\int_0^{\pi/2} \ln \cos \theta \, d\theta = -\frac{\pi}{2} \ln 2. \quad (7.44b)$$

如果采用图 7.14 中的积分围道, 计算积分 $\oint_C \ln(1+z^2) \frac{dz}{z}$, 也能得到这个结果.

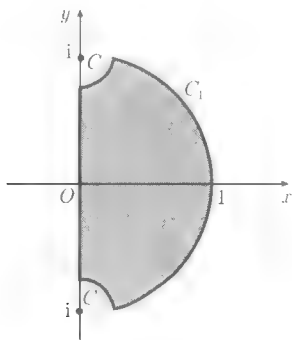


图 7.14 用于计算 $\int_0^{\pi/2} \ln \cos \theta \, d\theta$ 的积分围道

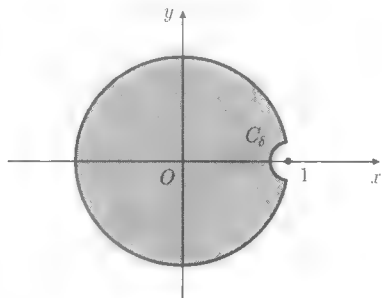


图 7.15 应用于例 7.19 的积分围道

例 7.19 计算积分 $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin \theta}{1-2r \cos 2\theta + r^2} d\theta$, $r \neq 1$ 为实数.

解 考虑复变积分 $\oint_C \frac{\ln(1-z)}{(z-r)(1-rz)} dz$, 其中的积分围道 C 如图 7.15 所示. 规定 $\arg(1-z)|_{z=0} = 0$, 则对于圆周上的变点 $z = e^{i\theta}$, 有

$$\ln(1-z) = \begin{cases} \ln\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) + i \frac{\theta - \pi}{2}, & 0 < \theta < \pi, \\ \ln\left|2 \sin \frac{\theta}{2}\right| + i \frac{\theta + \pi}{2}, & -\pi < \theta < 0. \end{cases}$$

当 $r^2 > 1$ 时, 围道内有唯一奇点 $z = 1/r$, 所以

$$\oint_C \frac{\ln(1-z)}{(z-r)(1-rz)} dz = 2\pi i \cdot \frac{\ln(1-1/r)}{r^2-1}.$$

因为

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{\ln(1-z)}{(z-r)(1-rz)} dz = 0,$$

所以在取极限 $\delta \rightarrow 0$ 后, 就得到

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^0 \frac{\ln |2 \sin(\theta/2)| + i(\theta+\pi)/2}{1-2r \cos \theta + r^2} d\theta + \int_0^\pi \frac{\ln[2 \sin(\theta/2)] + i(\theta-\pi)/2}{1-2r \cos \theta + r^2} d\theta \\ &= \frac{2\pi}{r^2-1} \ln\left(1-\frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

略加化简, 即得

$$\int_0^\pi \frac{\ln[2 \sin(\theta/2)] d\theta}{1-2r \cos \theta + r^2} = \frac{\pi}{r^2-1} \ln\left(1-\frac{1}{r}\right),$$

亦即

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(2 \sin \theta) d\theta}{1-2r \cos 2\theta + r^2} = \frac{\pi}{2(r^2-1)} \ln\left(1-\frac{1}{r}\right).$$

又根据 (6.8) 式 (取 $n=0$), 有


$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1-2r \cos 2\theta + r^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{r^2-1},$$

所以最后就得到

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin \theta d\theta}{1-2r \cos 2\theta + r^2} = \frac{\pi}{2(r^2-1)} \ln \frac{r-1}{2r}, \quad r^2 > 1. \quad (7.45a)$$

当 $r^2 < 1$ 时, 围道内的奇点变为 $z=r$. 经过类似的计算, 同样可以求得

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin \theta d\theta}{1-2r \cos 2\theta + r^2} = \frac{\pi}{2(1-r^2)} \ln \frac{1-r}{2}, \quad r^2 < 1. \quad (7.45b)$$

 **讨论** 将上面的结果作适当的自变量代换, 或是直接采用如图 7.16 所示的围道, 计算复变积分 $\oint_C \frac{\ln(1+z)}{(z-r)(1-rz)} dz$, 同样能够得到

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \cos \theta d\theta}{1-2r \cos 2\theta + r^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2(r^2-1)} \ln \frac{r+1}{2r}, & r^2 > 1, \\ \frac{\pi}{2(1-r^2)} \ln \frac{1+r}{2}, & r^2 < 1. \end{cases} \quad (7.46)$$

在计算中仍规定 $\arg(1+z)|_{z=0} = 0$.

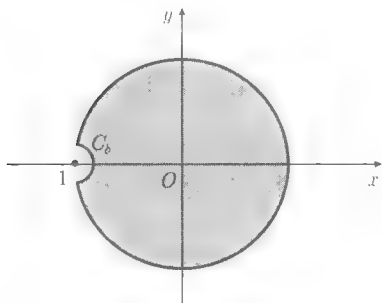


图 7.16 应用于例 7.19 的另一积分围道

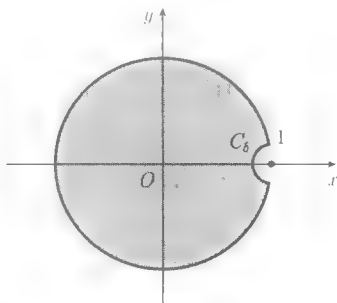


图 7.17 应用于例 7.20 的积分围道

例 7.20 类似于例 7.18, 现在应用留数定理计算围道积分

$$\oint_C z^{-n-1} \ln(1-z) dz, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

其中积分围道 C 如图 7.17 所示, 并规定在割线上岸 $\arg(1-z) = -\pi$. 在这样的单值分枝规定下, 对于单位圆周上的点 $z = e^{\pm i\theta}$, $0 < \theta < \pi$, 有

$$\ln(1-z)|_{z=e^{\pm i\theta}} = \ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) \mp i\frac{\pi-\theta}{2}.$$

因为在积分围道内只有一个奇点 $z=0$, 被积函数在该点的留数即为函数 $\ln(1-z)$ 在 $z=0$ 点 Taylor 级数中 z^n 项的系数:

$$\operatorname{res} \left\{ z^{-n-1} \ln(1-z) \right\}_{z=0} = -\frac{1}{n}.$$

于是, 根据留数定理, 有

$$\oint_C z^{-n-1} \ln(1-z) dz = -\frac{2\pi i}{n}.$$

因为

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} z^{-n-1} \ln(1-z) dz = 0.$$

所以就得到

$$\begin{aligned} & \int_{\pi}^0 (e^{-i\theta})^{-n-1} \left[\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) + i\frac{\pi-\theta}{2} \right] e^{i\theta} (-i) d\theta \\ & + \int_0^{\pi} (e^{i\theta})^{-n-1} \left[\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) - i\frac{\pi-\theta}{2} \right] e^{i\theta} i d\theta = -\frac{2\pi i}{n}. \end{aligned}$$

化简即得

$$\int_0^\pi \left[\cos n\theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) - \frac{\pi - \theta}{2} \sin n\theta \right] d\theta = -\frac{\pi}{n}. \quad (7.47)$$

还可以计算积分

$$\oint_C z^{n-1} \ln(1-z) dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

从而得到

$$\int_0^\pi \left[\cos n\theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) + \frac{\pi - \theta}{2} \sin n\theta \right] d\theta = 0. \quad (7.48)$$

和 (7.47) 式相加、减, 就有

$$\int_0^\pi \cos n\theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta = -\frac{\pi}{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.49)$$

$$\int_0^\pi (\pi - \theta) \sin n\theta d\theta = \frac{\pi}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.50)$$

进一步区分 n 为奇数或偶数两种情形, 还能将 (7.49) 式改写成

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2n+1)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{1}{2n+1} \frac{\pi}{2}, \quad (7.51)$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2n\theta \ln(2 \sin \theta) d\theta = -\frac{\pi}{4n}. \quad (7.52)$$

更进一步, 有

$$\int_0^\pi \cos(2n+1)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi}{2n+1}, \quad (7.53)$$

$$\int_0^\pi \cos 2n\theta \ln(2 \sin \theta) d\theta = -\frac{\pi}{2n}. \quad (7.54)$$

因为

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2n+1)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \int_{\pi/2}^\pi \cos(2n+1)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta,$$

所以 (7.51) 式与 (7.37) 式可以互化. 至于 (7.50) 式, 可以改写为

$$\int_0^\pi \theta \sin n\theta d\theta = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.50')$$

其实用分部积分, 就可以直接计算得到这一结果.

讨论

1. 因为 $\int_0^\pi \cos n\theta d\theta = 0$, 所以可以将 (7.49) 式改写为

$$\int_0^\pi \cos n\theta \ln \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta = -\frac{\pi}{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.49')$$

2. 可以直接证明

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos n\theta \ln\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta = \int_0^{\pi} \cos n\theta \ln\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta,$$

因此

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \ln\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos n\theta \ln\left(\sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta = -\frac{\pi}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.55)$$

例 7.21 计算积分 $\int_0^{\pi} \ln^2\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta$.

解 考虑积分 $\oint_C \ln^2(1-z) \frac{dz}{z}$, 其中积分围道 C 仍见图 7.17. 因为被积函数在围道内无奇点, 所以

$$\oint_C \ln^2(1-z) \frac{dz}{z} = 0.$$

容易判断

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \ln^2(1-z) \frac{dz}{z} = 0.$$

因此有

$$\int_{\pi}^0 \left[\ln\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) + i \frac{\pi - \theta}{2} \right]^2 (-i d\theta) + \int_0^{\pi} \left[\ln\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) - i \frac{\pi - \theta}{2} \right]^2 i d\theta = 0,$$

即

$$2 \int_0^{\pi} \left[\ln^2\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) - \frac{(\pi - \theta)^2}{4} \right] d\theta = 0.$$

所以

$$\int_0^{\pi} \ln^2\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - \theta)^2}{4} d\theta = \frac{\pi^3}{12}. \quad (7.56)$$

例 7.22 计算积分 $\int_0^{\pi} \cos \theta \ln^2\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta$.

解 仍取围道 C 如图 7.17 所示, 考虑积分 $\oint_C \ln^2(1-z) dz$ 与 $\oint_C \ln^2(1-z) \frac{dz}{z^2}$. 因为被积函数在围道内无奇点, 而且考虑到

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \ln^2(1-z) dz = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \ln^2(1-z) \frac{dz}{z^2} = 0,$$

所以有

$$\int_{\pi}^0 e^{-i\theta} \left[\ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) + i \frac{\pi - \theta}{2} \right]^2 (-i d\theta) + \int_0^{\pi} e^{i\theta} \left[\ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) - i \frac{\pi - \theta}{2} \right]^2 i d\theta = 0,$$

$$\int_{\pi}^0 e^{i\theta} \left[\ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) + i \frac{\pi - \theta}{2} \right]^2 (-i d\theta) + \int_0^{\pi} e^{-i\theta} \left[\ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) - i \frac{\pi - \theta}{2} \right]^2 i d\theta = 0.$$

由此即得

$$\int_0^{\pi} \cos \theta \left[\ln^2 \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) - \left(\frac{\pi - \theta}{2} \right)^2 \right] d\theta = 0,$$

$$\int_0^{\pi} (\pi - \theta) \sin \theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta = 0. \quad (7.57)$$

直接计算可得

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\pi - \theta}{2} \right)^2 \cos \theta d\theta = \frac{\pi}{2},$$

所以有

$$\int_0^{\pi} \cos \theta \ln^2 \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta = \frac{\pi}{2}. \quad (7.58a)$$

讨论

1. 再进一步, 有

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos \theta \ln^2 \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta &= \int_0^{\pi} \cos \theta \left(\ln 2 + \ln \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 d\theta \\ &= 2 \ln 2 \int_0^{\pi} \cos \theta \ln \sin \frac{\theta}{2} d\theta + \int_0^{\pi} \cos \theta \ln^2 \sin \frac{\theta}{2} d\theta. \end{aligned}$$

代入 (7.49') 式的结果 ($n=1$), 就又有

$$\int_0^{\pi} \cos \theta \ln^2 \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta = \frac{\pi}{2} [2 \ln 2 + 1]. \quad (7.59a)$$

2. 对 (7.58a) 与 (7.59a) 两式再作变换 $\phi = \pi - \theta$, 即可得到

$$\int_0^{\pi} \cos \theta \ln^2 \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right) d\theta = -\frac{\pi}{2}, \quad (7.58b)$$

$$\int_0^{\pi} \cos \theta \ln^2 \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) d\theta = -\frac{\pi}{2} (2 \ln 2 + 1). \quad (7.59b)$$

3. 直接计算可得

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin \theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta &= (1 - \cos \theta) \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos \theta) \cot \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 2 \ln 2 - 1. \end{aligned} \quad (7.60a)$$

再根据 (7.57) 式, 又能进一步导出

$$\int_0^\pi \theta \sin \theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta = \pi(2 \ln 2 - 1). \quad (7.60b)$$

例 7.23 计算积分 $\int_0^\pi \cos n\theta \ln^2 \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta$, $n = 2, 3, 4, \dots$.

解 本题与例 7.22 极为类似, 故考虑复变积分

$$\oint_C z^{-n-1} \ln^2(1-z) dz \quad \text{与} \quad \oint_C z^{n-1} \ln^2(1-z) dz.$$

其中积分围道 C 不变. 但现在不同的是, 被积函数 $z^{-n-1} \ln^2(1-z)$ 在积分围道内有奇点 $z=0$, 因此

$$\begin{aligned} \oint_C z^{-n-1} \ln^2(1-z) dz &= 2\pi i \times \operatorname{res} \left\{ z^{-n-1} \ln^2(1-z) \right\}_{z=0}, \\ \oint_C z^{n-1} \ln^2(1-z) dz &= 0. \end{aligned}$$

重复上题的计算, 并取极限 $\delta \rightarrow 0$, 就得到

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos n\theta \left[\ln^2 \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) - \left(\frac{\pi-\theta}{2} \right)^2 \right] d\theta &= - \int_0^\pi (\pi-\theta) \sin n\theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \times \operatorname{res} \left\{ z^{-n-1} \ln^2(1-z) \right\}_{z=0}. \end{aligned}$$

为了求出 $\operatorname{res} \left\{ z^{-n-1} \ln^2(1-z) \right\}_{z=0}$, 不妨将 $\ln^2(1-z)$ 在单位圆内作 Taylor 展开:

$$\begin{aligned} \ln^2(1-z) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{kl} z^{k+l} \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k(m-k)} \right] z^m = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m-k} \right) \right] z^m \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2}{m} \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \right) z^m = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2}{m} [\psi(m) - \psi(1)] z^m. \end{aligned} \quad (7.61)$$

这说明

$$\operatorname{res} \left\{ z^{-n-1} \ln^2(1-z) \right\}_{z=0} = \frac{2}{n} [\psi(n) - \psi(1)],$$

所以

$$\int_0^\pi \cos n\theta \left[\ln^2 \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) - \left(\frac{\pi-\theta}{2} \right)^2 \right] d\theta = \frac{\pi}{n} [\psi(n) - \psi(1)], \quad (7.62a)$$

$$\int_0^\pi (\pi-\theta) \sin n\theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta = -\frac{\pi}{n} [\psi(n) - \psi(1)]. \quad (7.62b)$$

再应用分部积分可以计算得

$$\int_0^\pi \left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)^2 \cos n\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2n^2},$$

所以, 由 (7.62a) 式就能够导出

$$\int_0^\pi \cos n\theta \ln^2\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta = \frac{\pi}{n}[\psi(n) - \psi(1)] + \frac{\pi}{2n^2}. \quad (7.63a)$$

☞ 讨论 作变换 $\theta \rightarrow \pi - \theta$, 也能得到

$$\int_0^\pi \cos n\theta \ln^2\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta = (-1)^n \left\{ \frac{\pi}{n}[\psi(n) - \psi(1)] + \frac{\pi}{2n^2} \right\}. \quad (7.63b)$$

而且, 还能进一步导出

$$\int_0^\pi \cos n\theta \ln^2\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta = \frac{\pi}{n}[\psi(n) - \psi(1)] + \frac{\pi}{2n} \left[2\ln 2 + \frac{1}{n} \right], \quad (7.64a)$$

$$\int_0^\pi \cos n\theta \ln^2\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta = (-1)^n \left\{ \frac{\pi}{n}[\psi(n) - \psi(1)] + \frac{\pi}{2n} \left[2\ln 2 + \frac{1}{n} \right] \right\}. \quad (7.64b)$$

作为本题的额外收获, 还能计算得积分

$$\int_0^\pi \theta \sin n\theta \ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta \quad \text{与} \quad \int_0^\pi \theta \sin n\theta \ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta.$$

首先, 对 (7.62b) 式作变换 $\theta \rightarrow \pi - \theta$, 即得

$$\int_0^\pi \theta \sin n\theta \ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta = (-1)^n \frac{\pi}{n} [\psi(n) - \psi(1)]. \quad (7.65)$$

另一方面, 将 (7.62b) 式与 (7.65) 式相加, 有

$$\pi \int_0^\pi \sin n\theta \ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta - \int_0^\pi \theta \sin n\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = [-1 + (-1)^n] \frac{\pi}{n} [\psi(n) - \psi(1)].$$

可以计算出 (见第九章 (9.105b) 及 (9.87c) 两式)

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \theta \sin 2k\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta &= -\frac{\pi}{2k} \left[\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \\ \int_0^\pi \theta \sin(2k+1)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta &= \frac{\pi}{2k+1} \left[\psi(k+1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] - \frac{\pi}{(2k+1)^2}. \end{aligned}$$

因此就能求得

$$\int_0^\pi \sin 2k\theta \ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta = -\frac{1}{2k} \left[\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (7.66a)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sin(2k+1)\theta \ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\ &= -\frac{1}{2k+1} \left[\psi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \psi(1) \right] - \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad k=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.66b)$$

再代回到 (7.62b) 式中, 又有

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \theta \sin 2k\theta \ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{4k} \left\{ \left[\psi(k) - \psi(1) \right] - \left[\psi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\}, \quad k=1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (7.67a)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \theta \sin(2k+1)\theta \ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2(2k+1)} \left\{ \left[\psi(k+1) - \psi(1) \right] - \left[\psi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\} \\ & \quad - \frac{\pi}{(2k+1)^2} + \frac{2\pi}{2k+1} \ln 2, \quad k=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.67b)$$

上面在推导 (7.66b) 与 (7.67b) 两式的过程中, 本来限定 k 为正整数, 但考虑到例 7.22 中的 (7.60a) 与 (7.60b) 两式, 故 (7.66b) 与 (7.67b) 式在 $k=0$ 时亦成立.

如果在 (7.66a) 与 (7.66b) 两式中作变换 $\theta \rightarrow \pi - \theta$, 即得

$$\int_0^\pi \sin 2k\theta \ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta = \frac{1}{2k} \left[\psi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad k=1, 2, 3, \dots, \quad (7.68a)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sin(2k+1)\theta \ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\ &= -\frac{1}{2k+1} \left[\psi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \psi(1) \right] - \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad k=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.68b)$$

再分别与 (7.66a) 或 (7.66b) 式相加, 则又有

$$\int_0^\pi \sin 2k\theta \ln(2\sin\theta) d\theta = 0, \quad k=1, 2, 3, \dots, \quad (7.69)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sin(2k+1)\theta \ln(2\sin\theta) d\theta \\ &= -\frac{2}{2k+1} \left[\psi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \psi(1) \right] - \frac{2}{(2k+1)^2}, \quad k=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.70)$$

例 7.24 计算积分 $\int_0^{\pi/2} \frac{\theta \tan \theta}{\ln^2 \cos \theta + \theta^2} d\theta$.

解 本题的关键在于认识到被积函数分母上的 $\ln^2 \cos \theta + \theta^2$ 可能来自

$$\ln(1 - i \tan \theta) = -\ln \cos \theta - i\theta,$$

因此所求积分大体上可以化为

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\tan \theta}{\ln(1-i \tan \theta)} d\theta = \int_0^\infty \frac{x}{\ln(1-ix)} \frac{dx}{1+x^2}.$$

这就提示我们应当考虑复变积分 $\oint_C \frac{z}{\ln(1-iz)} \frac{dz}{1+z^2}$, 而积分围道 C 如图 7.8 所示. 若规定 $\ln(1-iz)|_{z=0} = 0$, 则对于实轴上的点, 有

$$\ln(1-iz)|_{\operatorname{Re} z=x, \operatorname{Im} z=0} = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - i \arctan x.$$

于是, 根据留数定理, 就有

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^R \frac{2x}{\ln(1+x^2) - 2i \arctan x} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{C_R} \frac{z}{\ln(1-iz)} \frac{1}{1+z^2} \\ &= \operatorname{res} \left\{ \frac{z}{\ln(1-iz)} \frac{dz}{1+z^2} \right\}_{z=i} = \frac{\pi i}{\ln 2}. \end{aligned}$$

取极限 $R \rightarrow \infty$, 注意到

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z}{\ln(1-iz)} \frac{dz}{1+z^2} = 0,$$

因而有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{\ln(1+x^2) - 2i \arctan x} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi i}{\ln 2}.$$

再令 $x = \tan \theta$, 于是变为

$$- \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\tan \theta}{\ln \cos \theta + i\theta} d\theta = \frac{\pi i}{\ln 2}, \quad \text{即} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\tan \theta (\ln \cos \theta - i\theta)}{\ln^2 \cos \theta + \theta^2} d\theta = -\frac{\pi i}{\ln 2}.$$

比较虚部, 就求得

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\theta \tan \theta}{\ln^2 \cos \theta + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{\ln 2}, \quad \text{即} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\theta \tan \theta}{\ln^2 \cos \theta + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2 \ln 2}. \quad (7.71)$$

讨论

1. 如果计算围道积分 $\oint_C \frac{1}{\ln(1-iz)} \frac{dz}{1+z^2}$, 就可以导出

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \cos \theta}{\ln^2 \cos \theta + \theta^2} d\theta = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\ln 2} \right). \quad (7.72)$$

2. 类似地, 采用图 7.3 中的围道 C , 计算复变积分 $\oint_C \frac{1-e^{iaz}}{\ln(1-iz)} \frac{dz}{z}$, 则将导致

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2(1-e^{iax})}{\ln(1+x^2) - 2i \arctan x} \frac{dx}{x} = i\pi a.$$

进一步, 令 $x = \tan \theta$, 并比较虚部, 即可得到积分

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{[1 - \cos(a \tan \theta)]\theta + \sin(a \tan \theta) \ln(\cos \theta)}{\ln^2(\cos \theta) + \theta^2} \frac{d\theta}{\sin 2\theta} = \frac{\pi a}{2}. \quad (7.73)$$

§7.5 含 $\arctan x$ 的积分

例 7.25 应用留数定理计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan x}{1 - 2x \sin \alpha + x^2} dx$, 其中 $0 < \alpha < \pi/2$.

解 采用半圆形的积分围道 (见图 7.8), 被积函数取为 $f(z) = \frac{\ln(1-iz)}{1-2z \sin \alpha + z^2}$. 因为被积函数在围道内有奇点 $z = ie^{-i\alpha}$, 留数为

$$\operatorname{res} \left\{ \frac{\ln(1-iz)}{1-2z \sin \alpha + z^2} \right\}_{z=ie^{-i\alpha}} = \frac{1}{2i \cos \alpha} \left[\ln \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{i\alpha}{2} \right],$$

所以

$$\int_{-R}^R \frac{\ln(1-ix)}{1-2x \sin \alpha + x^2} dx + \int_{C_R} \frac{\ln(1-iz)}{1-2z \sin \alpha + z^2} dz = \frac{\pi}{\cos \alpha} \left[\ln \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{i\alpha}{2} \right].$$

又因为

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\ln(1-iz)}{1-2z \sin \alpha + z^2} dz = 0,$$

所以, 取极限 $R \rightarrow \infty$, 就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1-ix)}{1-2x \sin \alpha + x^2} dx = \frac{\pi}{\cos \alpha} \left[\ln \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{i\alpha}{2} \right].$$

因为

$$\ln(1-ix) = \ln|1-ix| - i \arctan x = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - i \arctan x,$$

所以比较虚部, 即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan x}{1-2x \sin \alpha + x^2} dx = \frac{\pi \alpha}{2 \cos \alpha}. \quad (7.74a)$$

如果比较等式两端的实部, 还可以得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1-2x \sin \alpha + x^2} dx = \frac{2\pi}{\cos \alpha} \ln \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} \right). \quad (7.74b)$$

或者将它们进一步化成

$$\int_0^{\infty} \frac{x \arctan x}{1+2x^2 \cos 2\alpha + x^4} dx = \frac{\pi \alpha}{4 \sin 2\alpha}, \quad (7.75a)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1+x^2}{1+2x^2 \cos 2\alpha + x^4} \ln(1+x^2) dx = \frac{\pi}{\cos \alpha} \ln \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} \right). \quad (7.75b)$$

例 7.26 应用留数定理计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{x \arctan x}{(1+2x^2)^2} dx$.

解 仍采用图 7.8 中的半圆形积分围道, 取被积函数为 $f(z) = \frac{z \ln(1-iz)}{(1+2z^2)^2}$. 显然, 被积函数在上半平面只有一个奇点 $z = z_0 = i/\sqrt{2}$, 留数为

$$\operatorname{res} f(z_0) = \left. \frac{d}{dz} \frac{z \ln(1-iz)}{4(z+z_0)^2} \right|_{z=z_0} = -\frac{\sqrt{2}-1}{8},$$

因此, 根据留数定理, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \ln(1-ix)}{(1+2x^2)^2} dx = -\frac{\pi i}{4}(\sqrt{2}-1),$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x[\ln \sqrt{1+x^2} - i \arctan x]}{(1+2x^2)^2} dx = -\frac{\pi i}{4}(\sqrt{2}-1).$$

比较虚部即得

$$\int_0^{\infty} \frac{x \arctan x}{(1+2x^2)^2} dx = \frac{\pi}{8}(\sqrt{2}-1). \quad (7.76)$$

例 7.27 从例 7.26 的计算中还能推出更普遍的结论. 如果函数 $f(z)$ 满足下列条件:

- (1) 除了有限个奇点 z_1, z_2, \dots, z_n 外, $f(z)$ 在上半平面解析, 在实轴上无奇点;
- (2) 对于实数 x , $f(x)$ 为奇函数: $f(-x) = -f(x)$;
- (3) 在 $0 \leq \arg z \leq \pi$ 的范围内, 当 $|z| \rightarrow \infty$ 时, $zf(z)$ 一致地趋于 0,

则不难证明

$$\int_0^{\infty} f(x) \arctan x dx = -\pi \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} \left\{ f(z) \ln(1-iz) \right\}. \quad (7.77)$$

在这个公式中约定了对于实轴上的点 x , 有

$$\ln(1+ix) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + i \arctan x, \quad \ln(1-ix) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - i \arctan x,$$

或者说, 当 $x = \operatorname{Re} z \rightarrow +\infty$ 时, $\arg(1 \mp iz) \rightarrow \mp \pi/2$.

例如, 为了计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{x \arctan x}{x^4+1} dx$, 就只要求出函数 $\frac{z}{z^4+1} \ln(1-iz)$ 在奇点 $z_1 = e^{i\pi/4}$, $z_2 = e^{i3\pi/4}$ 处的留数:

$$\operatorname{res} \left\{ \frac{z \ln(1-iz)}{z^4+1} \right\}_{z=z_1} = \left. \frac{\ln(1-iz)}{4z^3} \right|_{z=z_1} = \frac{1}{4i} \ln(1-iz_1),$$

$$\operatorname{res} \left\{ \frac{z \ln(1-iz)}{z^4+1} \right\}_{z=z_2} = \frac{\ln(1-iz)}{4z^2} \Big|_{z=z_2} = -\frac{1}{4i} \ln(1-iz_2).$$

而由于 $1-iz_1 = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}$, $1-iz_2 = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{i}{\sqrt{2}}$, 所以 $|1-iz_1| = |1-iz_2|$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x \arctan x}{x^4+1} dx &= -\frac{\pi}{4i} \ln \frac{1-iz_1}{1-iz_2} = -\frac{\pi}{4} [\arg(1-iz_1) - \arg(1-iz_2)] \\ &= -\frac{\pi}{4} [\arg(z_1+i) - \arg(z_2+i)]. \end{aligned}$$

由图 7.18 可以求出 $\arg(z_1+i)$ 与 $\arg(z_2+i)$, 而且更容易直接求出 $\arg(z_1+i)$ $\arg(z_2+i)$. 由此就得到

$$\int_0^\infty \frac{x \arctan x}{x^4+1} dx = \frac{\pi^2}{16}. \quad (7.78)$$

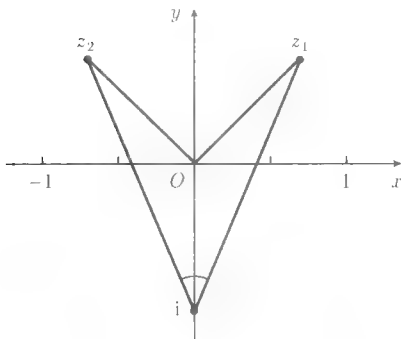


图 7.18 $\arg(z_1+i) - \arg(z_2+i) = -\pi/4$

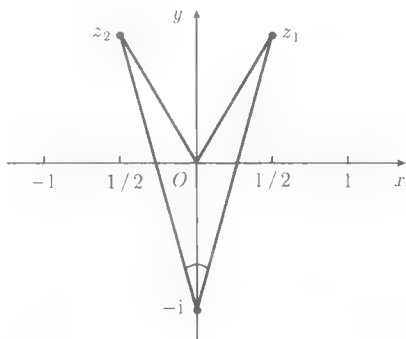


图 7.19 $\arg(z_1+i) - \arg(z_2+i) = -\pi/6$

也可以用同样的办法计算积分 $\int_0^\infty \frac{x \arctan x}{x^4+x^2+1} dx$. 这时在上半平面出现的奇点是 $z_1 = (1+i\sqrt{3})/2$ 和 $z_2 = (-1+i\sqrt{3})/2$, 留数为

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \left\{ \frac{z \ln(1-iz)}{z^4+z^2+1} \right\}_{z=z_1} &= \frac{\ln(1-iz)}{4z^2+2} \Big|_{z=z_1} = \frac{1}{2\sqrt{3}i} \ln(1-iz_1), \\ \operatorname{res} \left\{ \frac{z \ln(1-iz)}{z^4+z^2+1} \right\}_{z=z_2} &= \frac{1}{4z^2+2} \ln(1-iz) \Big|_{z=z_2} = -\frac{1}{2\sqrt{3}i} \ln(1-iz_2). \end{aligned}$$

同样能由图 7.19 中求出 $\arg(z_1+i)$ 与 $\arg(z_2+i)$, 或者直接算出它们的差, 所以

$$\int_0^\infty \frac{x \arctan x}{x^4+x^2+1} dx = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}i} \ln \frac{1-iz_1}{1-iz_2} = \frac{\pi^2}{12\sqrt{3}}. \quad (7.79)$$

类似地, 也能求得

$$\int_0^{\infty} \frac{x \arctan x}{(x^2 + p^2)^2} dx = \frac{\pi}{4p(1+p)}, \quad p > 0, \quad (7.80)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \arctan x}{(x^2 + p^2)(x^2 + q^2)} dx = \frac{\pi}{p^2 - q^2} \ln \frac{1+p}{1+q}, \quad p > 0, q > 0, p \neq q. \quad (7.81)$$

公式 (7.77) 还能推广到 $f(z)$ 在实轴上有奇点 (但仅限于一阶极点) 的情形, 也不难证明

$$\int_0^{\infty} f(x) \arctan x dx = -\pi \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} \left\{ f(z) \ln(1-iz) \right\} - \frac{\pi}{2} \sum_{\text{实轴上的奇点}} \operatorname{res} \left\{ f(z) \ln(1-iz) \right\}. \quad (7.82)$$

例如, 我们可以求得

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x(x^2 + p^2)} dx = \frac{\pi}{2p^2} \ln(1+p), \quad p > 0, \quad (7.83)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x(x^2 - p^2)} dx = -\frac{\pi}{4p^2} \ln(1+p^2), \quad p > 0, \quad (7.84)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x(x^4 + 1)} dx = \frac{\pi}{4} \ln(2 + \sqrt{2}), \quad (7.85)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x(x^4 + x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{4} \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \arctan(2 - \sqrt{3}). \quad (7.86)$$

将 (7.83) 与 (7.84) 两式相加、减, 又能得到

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{x \arctan x}{x^4 - p^4} dx = \frac{\pi}{8p^2} \ln \frac{(1+p)^2}{1+p^2}, \quad (7.87)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x(x^4 - p^4)} dx = -\frac{\pi}{8p^2} [\ln(1+p^2) + 2\ln(1+p)]. \quad (7.88)$$


作为它们的特殊情形, 取 $p = 1$, 则有

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{2} \ln 2, \quad (7.89)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x(x^2 - 1)} dx = -\frac{\pi}{4} \ln 2, \quad (7.90)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{x \arctan x}{x^4 - 1} dx = \frac{\pi}{8} \ln 2, \quad (7.91)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x(x^4 - 1)} dx = -\frac{3\pi}{8} \ln 2. \quad (7.92)$$

 **讨论** 将 (7.85), (7.86) 与 (7.89) 诸式右端分拆为由 0 到 1 及由 1 到 ∞ 的两段积分, 而后再对第二段段积分作变换 $t = 1/x$, 即可导出下列积分:

$$\int_0^1 \frac{1-x^4}{1+x^4} \frac{\arctan x}{x} dx = \frac{\pi}{4} \ln(\sqrt{2}+1), \quad (7.93)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1-x^4}{1+x^2+x^4} \frac{\arctan x}{x} dx \\ = \frac{\pi^2}{48} + \frac{\pi}{4} \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\pi}{8} \ln 3 - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \arctan(2-\sqrt{3}), \end{aligned} \quad (7.94)$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{\arctan x}{x} dx = \frac{\pi}{4} \ln 2. \quad (7.95)$$

由于一般的幂函数 $z^\mu \equiv e^{\mu \ln z}$, $(\alpha + \beta z)^\mu \equiv e^{\mu \ln(\alpha + \beta z)}$ 等也涉及对数函数, 因此由这类函数的围道积分所导出的定积分中就可能出现反三角函数. 见下面的几个例子.

例 7.28 考察围道积分 $\oint_C \frac{dz}{(z^2+a^2)(z+i)^\mu}$, 其中 $a > 0$, $\mu > -1$, 积分围道 C 就是最简单的半圆形围道. 因为被积函数的枝点 $z = -i$ 及 $z = \infty$ 均在围道之外, 故不妨沿负虚轴作割线 (见图 7.20), 并规定在割线右岸 $\arg(z+i) = -\pi/2$. 我们看到, 在这样的规定下, 对于实轴上的点 x , 就有 $0 < \arg(x+i) < \pi$. 因此

$$\ln(x+i) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + i \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right), \quad (7.96a)$$

$$(x+i)^{-\mu} = e^{-\mu \ln(x+i)} = (x^2+1)^{-\mu/2} e^{i\mu(\arctan x - \pi/2)}. \quad (7.96b)$$

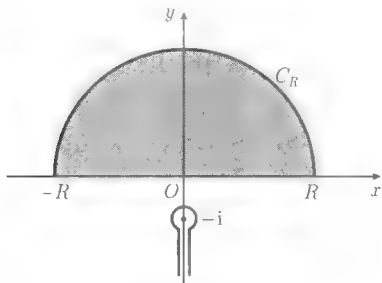


图 7.20 例 7.28 用到的积分围道

这样, 按照留数定理, 我们有

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \frac{e^{i\mu(\arctan x - \pi/2)}}{(x^2+1)^{\mu/2}} \frac{dx}{x^2+a^2} + \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2+a^2)(z+i)^\mu} \\ = 2\pi i \times \operatorname{res} \left\{ \frac{1}{(z^2+a^2)(z+i)^\mu} \right\}_{z=ia} = \frac{\pi}{a} (1+a)^{-\mu} e^{-i\pi\mu/2}. \end{aligned}$$

因为当 $z \rightarrow \infty$ 时, $|(z^2 + a^2)(z + i)^\mu| \sim |z|^{2+\mu}$, 所以

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot \frac{1}{(z^2 + a^2)(z + i)^\mu} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{dz}{(z^2 + a^2)(z + i)^\mu} = 0,$$

因而有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu \arctan x}}{(x^2 + a^2)(x^2 + 1)^{\mu/2}} dx = \frac{\pi}{a} (1 + a)^{-\mu}.$$

分别比较实部与虚部, 就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\mu \arctan x)}{(x^2 + 1)^{\mu/2}} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} (1 + a)^{-\mu}, \quad (7.97a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\mu \arctan x)}{(x^2 + 1)^{\mu/2}} \frac{dx}{x^2 + a^2} = 0. \quad (7.97b)$$

特别地, 当 $a = 1$ 时, 作变换 $t = \arctan x$, 则 (7.97a) 式变为

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \mu t \cos^\mu t dt = \frac{\pi}{2^\mu}. \quad (7.98)$$

例 7.28 的计算过程原则上也适用于 μ 为纯虚数的情形.

例 7.29 采用与例 7.28 相同的单值分枝规定, 计算围道积分

$$\oint_C \frac{1}{(z + i)^{i\nu}} \frac{dz}{z^2 + a^2} = \oint_C \frac{e^{-i\nu \ln(z+i)}}{z^2 + a^2} dz, \quad a > 0, \nu > 0,$$

其中 C 仍为半圆形围道. 重复例 7.28 的计算步骤, 我们就能得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu \ln(x+i)} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} e^{-i\nu \ln(1+a)} e^{\pi\nu/2}.$$

根据 (7.96a) 式, 上式可化为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\nu \arctan x}}{x^2 + a^2} e^{-i[\nu \ln(x^2+1)]/2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-i\nu \ln(1+a)}.$$

分别比较实部和虚部, 就能导出

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\nu \arctan x}}{x^2 + a^2} \cos \left[\frac{\nu}{2} \ln(x^2 + 1) \right] dx = \frac{\pi}{a} \cos[\nu \ln(1 + a)], \quad (7.99a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\nu \arctan x}}{x^2 + a^2} \sin \left[\frac{\nu}{2} \ln(x^2 + 1) \right] dx = \frac{\pi}{a} \sin[\nu \ln(1 + a)]. \quad (7.99b)$$

直接作变换 $x \rightarrow -x$, 又可得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\nu \arctan x}}{x^2 + a^2} \cos \left[\frac{\nu}{2} \ln(x^2 + 1) \right] dx = \frac{\pi}{a} \cos[\nu \ln(1 + a)], \quad (7.100a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\nu \arctan x}}{x^2 + a^2} \sin \left[\frac{\nu}{2} \ln(x^2 + 1) \right] dx = \frac{\pi}{a} \sin[\nu \ln(1 + a)]. \quad (7.100b)$$

将 (7.100a), (7.100b) 两式与 (7.99a), (7.99b) 两式对应相加, 还有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cosh(\nu \arctan x) \cos \left[\frac{\nu}{2} \ln(x^2 + 1) \right] \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \cos[\nu \ln(1 + a)], \quad (7.101a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cosh(\nu \arctan x) \sin \left[\frac{\nu}{2} \ln(x^2 + 1) \right] \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \sin[\nu \ln(1 + a)]. \quad (7.101b)$$

在 (7.99) — (7.101) 诸式中取 $a = 1$, 再作变换 $x = \tan t$, 又有

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\pm \nu t} \cos[\nu \ln(\cos t)] dt = \pi \cos(\nu \ln 2), \quad (7.102)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\pm \nu t} \sin[\nu \ln(\cos t)] dt = -\pi \sin(\nu \ln 2), \quad (7.103)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cosh \nu t \cos[\nu \ln(\cos t)] dt = \pi \cos(\nu \ln 2), \quad (7.104)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cosh \nu t \sin[\nu \ln(\cos t)] dt = -\pi \sin(\nu \ln 2). \quad (7.105)$$

第八章 应用留数定理计算定积分：进一步的例子

本章是前两章的继续，收录了一些（从应用留数定理计算定积分的角度来说）形式比较特异的积分；在应用留数定理时，包括复变积分（围道和被积函数）的选取，也常常表现出一些“变异”，计算过程中也往往涉及更多的技巧。

§8.1 有限远处出现本性奇点的情形

我们在处理含三角函数的无穷积分时遇到过本性奇点，多数位于无穷远处，而为了处理绕该点的积分（例如沿半圆弧的积分），通常要用到 Jordan 引理或者第六章 §6.6 中建立的补充引理。如果本性奇点出现在有限远处，倘若在积分围道内，只需求出被积函数在该点的留数，计入对积分的贡献即可。我们关心另一种情形，即本性奇点位于实轴上，积分围道需绕过该点，这时就遇到沿半径趋于 0 的半圆弧的积分。原则上我们可以将 Jordan 引理或第六章补充引理作适当的变换，以适应此种情形的需要。

引理 8.1 设除了有限个奇点外， $f(z)$ 在全平面解析，并且当 $0 \leq \arg z \leq \pi$ ， $|z| \rightarrow 0$ 时， $z^2 Q(z)$ 一致地趋近于 0，则

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} e^{-ip/z} Q(z) dz = 0, \quad p > 0, \quad (8.1)$$

其中 C_δ 是位于上半平面的半圆弧： $|z| = \delta$ ， $0 \leq \arg z \leq \pi$ 。



图 8.1 变换 $z = -1/\zeta$ ：将 z 平面上的 C_δ 变为 ζ 平面上的 C_R

证 这只不过是 Jordan 引理的变形。如图 8.1 所示，在变换 $z = -1/\zeta$ 下， z 平面上的半圆弧 C_δ 将变为 ζ 平面上的半圆弧 C_R ，其中 $R = 1/\delta$ 。若 z 沿 C_δ 顺时针（相对于 $z = 0$ 点）运动（ $\arg z$ 由 π 减小到 0），相应地， ζ 点则将沿 C_R 逆时针（相对于 $\zeta = 0$ 点）运动（ $\arg \zeta$ 由 0 增大到 π ），即

$$\int_{C_\delta} e^{-ip/z} Q(z) dz = \int_{C_R} e^{ip\zeta} Q\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta^2}.$$

应用 Jordan 引理于上式右端即可证得所需结论.

讨论 注意, 此引理成立条件不同于 Jordan 引理.

将留数定理与上述引理 8.1 结合起来, 就有下列推论:

推论 8.1 设 C'_δ 为位于下半平面的半圆弧: $|z| = \delta$, $-\pi \leq \arg z \leq 0$, 则在引理 8.1 的条件下, 有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C'_\delta} e^{-ip/z} Q(z) dz = 2\pi i \times \operatorname{res} \left\{ e^{-ip/z} Q(z) \right\}_{z=0}. \quad (8.2)$$

规定积分路径的走向为逆时针方向 (相对于 $z=0$ 点).

还可以将引理 8.1 变换到下半平面:

引理 8.2 设除了有限个奇点外, $f(z)$ 在全平面解析, 并且当 $-\pi \leq \arg z \leq 0$, $|z| \rightarrow 0$ 时, $z^2 Q(z)$ 一致地趋近于 0, 则

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C'_\delta} e^{ip/z} Q(z) dz = 0, \quad p > 0, \quad (8.3)$$

其中 C'_δ 是位于下半平面的半圆弧: $|z| = \delta$, $-\pi \leq \arg z \leq 0$.

在此基础上, 又可以有推论:

推论 8.2 设 C_δ 为位于上半平面的半圆弧: $|z| = \delta$, $0 \leq \arg z \leq \pi$, 则在引理 8.2 的条件下, 有 (积分路径的走向仍为逆时针方向)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} e^{ip/z} Q(z) dz = 2\pi i \times \operatorname{res} \left\{ e^{-ip/z} Q(z) \right\}_{z=0}. \quad (8.4)$$

运用这两个引理及其推论, 就可以方便地处理本性奇点出现在实轴上的情形.

例 8.1 计算积分 $\int_0^\infty \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2}$, 其中 $a > 0$, $b > 0$.

解 考虑复变积分 $\oint_C e^{i(az - b/z)} \frac{dz}{1+z^2}$, 其中积分围道 C 如图 8.2 所示. 因为在积分围道内只有一个奇点 $z = i$ (一阶极点), 留数为 $\frac{1}{2i} e^{-(a+b)}$, 所以, 根据留数定理, 有

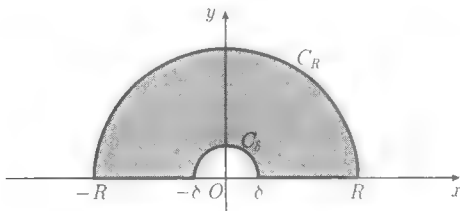


图 8.2 应用于例 8.1 的积分围道

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^{-\delta} e^{i(ax-b/x)} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{C_\delta} e^{i(az-b/z)} \frac{dz}{1+z^2} \\ & + \int_{\delta}^R e^{i(ax-b/x)} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{C_R} e^{i(az-b/z)} \frac{dz}{1+z^2} = \pi e^{-(a+b)}. \end{aligned}$$

对于沿 C_R 的积分, 按照 Jordan 引理, 有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i(az-b/z)} \frac{dz}{1+z^2} = 0.$$

而对于沿 C_δ 的积分, 根据引理 8.1 就能推出

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} e^{i(az-b/z)} \frac{dz}{1+z^2} = 0.$$

因此, 取极限 $R \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, 就有

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(ax-b/x)} \frac{dx}{1+x^2} = \pi e^{-(a+b)}.$$

比较实部, 即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2} = \pi e^{-(a+b)}, \quad a > 0, b > 0, \quad (8.5a)$$

$$\int_0^{\infty} \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-(a+b)}, \quad a > 0, b > 0. \quad (8.5b)$$

讨论

1. 类似的结果有

$$\int_0^{\infty} \sin\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-(a+b)}, \quad a > 0, b > 0, \quad (8.6)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \sin(a-b), \quad a > 0, b > 0, \quad (8.7)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \sin\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{x dx}{1-x^2} = -\frac{\pi}{2} \cos(a-b), \quad a > 0, b > 0. \quad (8.8)$$

2. 重复引用 (8.5b) 式的结果, 有

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left[\cos\left(2\alpha x - \frac{2\beta}{x}\right) \pm \cos\left(2\gamma x - \frac{2\delta}{x}\right) \right] \frac{dx}{1+x^2} &= \frac{\pi}{2} \left[e^{-2(\alpha+\beta)} \pm e^{-2(\gamma+\delta)} \right], \\ \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0. \end{aligned}$$

利用三角函数中的和差化积公式, 并定义新的常数 $a = \alpha + \gamma$, $b = \beta + \delta$, $c = \alpha - \gamma$, $d = \beta - \delta$, 于是就能得到

$$\int_0^{\infty} \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \cos\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-(a+b)} \cosh(c+d), \quad (8.9)$$

$$\int_0^\infty \sin\left(ax - \frac{b}{x}\right) \sin\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-(a+b)} \sinh(c+d), \quad (8.10)$$

成立条件均为 $a \geq c > 0, b \geq d > 0$.

类似地, 由 (8.6) — (8.8) 诸式也能导出

$$\int_0^\infty \sin\left(ax - \frac{b}{x}\right) \cos\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-(a+b)} \cosh(c+d), \quad (8.11)$$

$$\int_0^\infty \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \sin\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{x dx}{1+x^2} = -\frac{\pi}{2} e^{-(a+b)} \sinh(c+d) \quad (8.12)$$

以及

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \cos\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \sin(a-b) \cos(c-d), \quad (8.13)$$

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \sin\left(ax - \frac{b}{x}\right) \sin\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{\pi}{2} \cos(a-b) \sin(c-d); \quad (8.14)$$

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \sin\left(ax - \frac{b}{x}\right) \cos\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{x dx}{1-x^2} = -\frac{\pi}{2} \cos(a-b) \cos(c-d), \quad (8.15)$$

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \sin\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{x dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \sin(a-b) \sin(c-d). \quad (8.16)$$

成立条件则是 $a > c > 0, b > d > 0$.

例 8.2 计算积分 $\int_0^\infty \sin\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{dx}{x}$ 和 $\int_0^\infty \sin\left(ax + \frac{b}{x}\right) \frac{dx}{x}$, $a > 0, b > 0$.

解 本题和例 8.1 相似, 积分围道仍如图 8.2 所示. 根据留数定理, 可以得到

$$\int_{-R}^{-\delta} \frac{e^{i(ax-b/x)}}{x} dx + \int_{C_\delta} \frac{e^{i(az-b/z)}}{z} dz + \int_\delta^R \frac{e^{i(ax-b/x)}}{x} dx + \int_{C_R} \frac{e^{i(az-b/z)}}{z} dz = 0,$$

$$\int_{-R}^{-\delta} \frac{e^{i(ax+b/x)}}{x} dx + \int_{C_\delta} \frac{e^{i(az+b/z)}}{z} dz + \int_\delta^R \frac{e^{i(ax+b/x)}}{x} dx + \int_{C_R} \frac{e^{i(az+b/z)}}{z} dz = 0.$$

取极限 $R \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$, 就有

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i(ax-b/x)}}{x} dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{e^{i(az-b/z)}}{z} dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i(az-b/z)}}{z} dz = 0, \quad (8.17a)$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i(ax+b/x)}}{x} dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{e^{i(az+b/z)}}{z} dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i(az+b/z)}}{z} dz = 0. \quad (8.17b)$$

对于沿 C_R 积分的极限值, 可以根据 Jordan 引理判断:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i(az-b/z)}}{z} dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i(az+b/z)}}{z} dz = 0.$$

而对于沿 C_δ 积分的极限值, 则可分别应用上述引理 8.1 与推论 8.2, 从而有

$$\begin{aligned}\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{e^{i(az-b/z)}}{z} dz &= 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{e^{i(az+b/z)}}{z} dz &= -2\pi i \times \operatorname{res} \left\{ \frac{e^{i(az+b/z)}}{z} \right\}_{z=0}.\end{aligned}$$

这里第二式右端的负号源于积分路径为顺时针方向. 为了求出 $e^{i(az+b/z)}/z$ 在 $z=0$ 点的留数, 不妨将 $e^{i(az+b/z)}/z$ 与 Bessel 函数的生成函数作比较, 从而写出 $e^{i(az+b/z)}$ 的幂级数展开式:

$$e^{i(az+b/z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(2\sqrt{ab}) \left(\sqrt{\frac{a}{b}} z \right)^k. \quad (8.18)$$

于是就能得到

$$\operatorname{res} \left\{ \frac{e^{i(az+b/z)}}{z} \right\}_{z=0} = J_0(2\sqrt{ab}),$$

亦即

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{e^{i(az+b/z)}}{z} dz = -2\pi i J_0(2\sqrt{ab}).$$

将这些结果代入 (8.17) 式, 我们就有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(ax-b/x)}}{x} dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(ax+b/x)}}{x} dx = 2\pi i J_0(2\sqrt{ab}).$$

再比较虚部, 即可求得最后的结果:

$$\int_0^{\infty} \sin \left(ax - \frac{b}{x} \right) \frac{dx}{x} = 0, \quad a > 0, b > 0, \quad (8.19)$$

$$\int_0^{\infty} \sin \left(ax + \frac{b}{x} \right) \frac{dx}{x} = \pi J_0(2\sqrt{ab}), \quad a > 0, b > 0. \quad (8.20)$$

讨论

1. 将 (8.19) 与 (8.20) 二式相加、减, 还可以得到

$$\int_0^{\infty} \sin ax \cos \frac{b}{x} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} J_0(2\sqrt{ab}), \quad a > 0, b > 0, \quad (8.21)$$

$$\int_0^{\infty} \cos ax \sin \frac{b}{x} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} J_0(2\sqrt{ab}), \quad a > 0, b > 0. \quad (8.22)$$

2. 模仿例 8.1 中的讨论, 也能由 (8.19) 与 (8.20) 两式导出

$$\int_0^{\infty} \sin \left(ax - \frac{b}{x} \right) \cos \left(cx - \frac{d}{x} \right) \frac{dx}{x} = 0, \quad (8.23)$$

$$\int_0^{\infty} \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \sin\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{dx}{x} = 0, \quad (8.24)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \sin\left(ax + \frac{b}{x}\right) \cos\left(cx + \frac{d}{x}\right) \frac{dx}{x} \\ &= \frac{\pi}{2} \left[J_0(2\sqrt{(a+c)(b+d)}) + J_0(2\sqrt{(a-c)(b-d)}) \right], \end{aligned} \quad (8.25)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \cos\left(ax + \frac{b}{x}\right) \sin\left(cx + \frac{d}{x}\right) \frac{dx}{x} \\ &= \frac{\pi}{2} \left[J_0(2\sqrt{(a+c)(b+d)}) - J_0(2\sqrt{(a-c)(b-d)}) \right]. \end{aligned} \quad (8.26)$$

它们的成立条件也都是 $a > c > 0, b > d > 0$.

例 8.3 计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(px - \frac{q}{x} - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{x-a_k}\right) \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(px - \frac{q}{x} - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{x-a_k}\right) \frac{dx}{1+x^2},$$

其中 $p > 0, q > 0, a_k$ 均为实数, $b_k > 0$.

解 显然应当考虑复变积分 $\oint_C \exp\left\{i\left(pz - \frac{q}{z} - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{z-a_k}\right)\right\} \frac{dz}{1+z^2}$, 其中积分围道 C 如图 8.3 所示, 除绕过奇点 $z=0$ (本性奇点) 外, 还需要绕过实轴上的奇点 a_1, a_2, \dots, a_n (也都是本性奇点). 根据留数定理, 应当有

$$\begin{aligned} & \oint_C \exp\left\{i\left[pz - \frac{q}{z} - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{z-a_k}\right]\right\} \frac{dz}{1+z^2} \\ &= 2\pi i \times \text{res} \left\{ \exp\left[i\left(pz - \frac{q}{z} - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{z-a_k}\right)\right] \frac{1}{1+z^2} \right\}_{z=i} \\ &\quad - \pi \exp\left\{-p-q - \sum_{k=1}^n \frac{ib_k}{i-a_k}\right\} \\ &= \pi \exp\left\{-p-q - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{1+a_k^2}\right\} \cdot \exp\left\{i \sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{1+a_k^2}\right\}. \end{aligned}$$

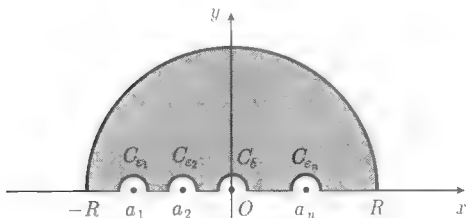


图 8.3 应用于例 8.4 的积分围道

对于沿半圆弧 C_R 的积分, 根据 Jordan 引理, 有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \exp \left\{ i \left(pz - \frac{q}{z} - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{z - a_k} \right) \right\} \frac{dz}{1+z^2} = 0.$$

对于沿 C_δ 的积分, 则根据引理 8.1, 也可以证得

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \exp \left\{ i \left(pz - \frac{q}{z} - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{z - a_k} \right) \right\} \frac{dz}{1+z^2} = 0.$$

类似地, 还能够证明, 对于绕奇点 $z = a_i$ 的积分, 有

$$\lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0} \int_{C_{\varepsilon_i}} \exp \left\{ i \left(pz - \frac{q}{z} - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{z - a_k} \right) \right\} \frac{dz}{1+z^2} = 0.$$

这样, 取极限 $R \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, $\varepsilon_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, 就有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \left(px - \frac{q}{x} - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{x - a_k} \right) \right\} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \pi \exp \left\{ -p - q - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{1+a_k^2} \right\} \cdot \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{1+a_k^2} \right\}. \end{aligned}$$

分别比较实部和虚部, 就得到所求的积分

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left(px - \frac{q}{x} - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{x - a_k} \right) \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \pi \exp \left\{ -p - q - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{1+a_k^2} \right\} \cos \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{1+a_k^2} \right), \end{aligned} \quad (8.27)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \sin \left(px - \frac{q}{x} - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{x - a_k} \right) \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \pi \exp \left\{ -p - q - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{1+a_k^2} \right\} \sin \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{1+a_k^2} \right). \end{aligned} \quad (8.28)$$

 **讨论** 采用类似的积分围道, 也能计算得

$$\begin{aligned} & \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left(px - \frac{q}{x} - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{x - a_k} \right) \frac{dx}{1-x^2} \\ &= \pi \sin \left(p - q - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{1-a_k^2} \right) \cos \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{1-a_k^2} \right), \end{aligned} \quad (8.29)$$

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \left(px - \frac{q}{x} - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{x-a_k} \right) \frac{dx}{1-x^2} \\ = -\pi \sin \left(p-q - \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{1-a_k^2} \right) \sin \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{1-a_k^2} \right). \end{aligned} \quad (8.30)$$

例 8.4 计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{1}{1-2p \cos(ax-b/x)+p^2} \frac{dx}{1+x^2}$, 其中 $a > 0, b > 0, 0 < p < 1$.

解 取积分围道 C 如图 8.2, 由实轴上的线段 $\delta \leq |\operatorname{Re} z| \leq R$ 以及两个半圆弧 $|z|=R, 0 \leq \arg z \leq \pi$ 与 $|z|=\delta, 0 \leq \arg z \leq \pi$ 组成, 计算围道积分

$$\oint_C \frac{1}{1-p e^{i(az-b/z)}} \frac{dz}{1+z^2}.$$

不难判断, 在积分围道之内, 只有一个奇点^① $z=i$, 留数为

$$\operatorname{res} \left\{ \frac{1}{1-p e^{i(az-b/z)}} \frac{1}{1+z^2} \right\}_{z=i} = \frac{1}{2i} \frac{1}{1-p e^{-(a+b)}}.$$

因此, 根据留数定理, 有

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{-\delta} \frac{1}{1-p e^{i(az-b/z)}} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{C_\delta} \frac{1}{1-p e^{i(az-b/z)}} \frac{dz}{1+z^2} \\ + \int_{\delta}^R \frac{1}{1-p e^{i(az-b/z)}} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{C_R} \frac{1}{1-p e^{i(az-b/z)}} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{1-p e^{-(a+b)}}. \end{aligned}$$

当 $|z|=R \rightarrow \infty, 0 \leq \arg z \leq \pi$ 时, 因为

$$\left| e^{i(az-b/z)} \right| = e^{-(aR+b/R) \sin \theta} \leq 1, \quad \theta = \arg z,$$

所以

$$\left| \frac{1}{1-p e^{i(az-b/z)}} \right| \leq \frac{1}{1-p}, \quad \lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ 0 \leq \arg z \leq \pi}} z \cdot \frac{1}{1-p e^{i(az-b/z)}} \frac{1}{1+z^2} = 0,$$

^① 被积函数还有两个奇点: $z=z_1$ 和 $z=z_2$, 它们都是 $1-p e^{i(az-b/z)}$ 的零点, 因而满足

$$i \left(az - \frac{b}{z} \right) = -\ln p + 2k\pi, \quad \text{即} \quad az^2 - (i \ln p + 2k\pi)z - b = 0.$$

于是, 根据 Viète 定理, 有

$$z_1 + z_2 = \frac{2k\pi + i \ln p}{a}, \quad z_1 z_2 = -\frac{b}{a}.$$

根据题设, $a > 0, b > 0$, 因此可令

$$z_1 = r_1 e^{i\theta} = r_1 (\cos \theta + i \sin \theta), \quad z_2 = -r_2 e^{-i\theta} = r_2 (-\cos \theta + i \sin \theta), \quad r_1 > 0, r_2 > 0.$$

而

$$(\tau_1 - r_2) \cos \theta = \frac{2k\pi}{a}, \quad (r_1 + r_2) \sin \theta = \frac{\ln p}{a},$$

因为 $0 < p < 1, \ln p < 0$, 所以 z_1 和 z_2 的虚部均为负, 即位于下半平面。

因而有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{1 - p e^{i(az-b/z)}} \frac{dz}{1+z^2} = 0.$$

同样, 因为当 $|z| = \delta \rightarrow 0$, $0 \leq \arg z \leq \pi$ 时, 有

$$|e^{i(az-b/z)}| = e^{-(a\delta+b/\delta)\sin\theta} \leq 1,$$

因而也能推出

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{1}{1 - p e^{i(az-b/z)}} \frac{dz}{1+z^2} = 0.$$

这样, 取极限 $R \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, 就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - p e^{i(ax-b/x)}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{1 - p e^{-(a+b)}},$$

亦即

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{1}{1 - p e^{i(ax-b/x)}} + \frac{1}{1 - p e^{-i(ax-b/x)}} \right] \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{1 - p e^{-(a+b)}},$$

化简即得

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - p \cos(ax - b/x)}{1 - 2p \cos(ax - b/x) + p^2} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 - p e^{-(a+b)}}. \quad (8.31)$$

再和积分

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

相组合, 就能得到最后的结果:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 - 2p \cos(ax - b/x) + p^2} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 - p^2} \frac{1 + p e^{-(a+b)}}{1 - p e^{-(a+b)}}, \quad (8.32)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax - b/x)}{1 - 2p \cos(ax - b/x) + p^2} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 - p^2} \frac{p + e^{-(a+b)}}{1 - p e^{-(a+b)}}. \quad (8.33)$$

 **讨论** 用类似的方法, 也能计算得

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 - 2p \cos(ax - b/x) + p^2} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{1-p^2} \frac{p \sin(a-b)}{1 - 2p \cos(a+b) + p^2}. \quad (8.34)$$

例 8.5 采用适当的围道, 应用留数定理计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax - b/x)}{\sin(cx - d/x)} \frac{dx}{x^2 + 1}$,

其中 a, b, c, d 均为实数, 且 $|c| > |a|$, $|d| > |b|$, $ab > 0$, $cd > 0$.

解 不妨假设 a, b, c, d 均为正数, 且 $c > a$, $d > b$.

取复变积分为 $\oint_C \frac{e^{i(az-b/z)}}{\sin(cz-d/z)} \frac{dz}{z^2+1}$. 围道 C' 原则上是由正实轴上的两线段 $[-R, -\delta]$ 与 $[\delta, R]$ 以及两个半圆弧 $|z|=R, 0 \leq \arg z \leq \pi$ 与 $|z|=R, 0 \leq \arg z \leq \pi$ 组成, 但为了适应留数定理的要求, 还需作适当的调整. 为此先要分析一下被积函数的奇点.

被积函数的奇点来自两部分: 第一部分是 z^2+1 的奇点, $z = \pm i$, 分别处于上、下半平面; 第二部分是 $\sin(cz-d/z)$ 的零点 (有无穷多个), 即

$$cz - d/z = \pm k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

对应于 $k=0$ 有两个奇点, 分别记为

$$z_{0+} = \sqrt{\frac{d}{c}}, \quad z_{0-} = -\sqrt{\frac{d}{c}}.$$

当 $k \neq 0$ 时, 对应于每一个 k 值, 有四个奇点, 分别是

$$\begin{aligned} z_{k++} &= \frac{k\pi + \sqrt{(k\pi)^2 + 4cd}}{2c}, & z_{k+-} &= \frac{k\pi - \sqrt{(k\pi)^2 + 4cd}}{2c}, \\ z_{k-+} &= \frac{-k\pi + \sqrt{(k\pi)^2 + 4cd}}{2c}, & z_{k--} &= \frac{-k\pi - \sqrt{(k\pi)^2 + 4cd}}{2c}. \end{aligned}$$

这无穷多个奇点都分布在实轴上, 且以 $z = \infty$ 及 $z = 0$ 为聚点. 这样就决定了两个半圆弧的半径只能取离散值 δ_n 与 R_n (其数值大小后面再确定), 而且积分围道还要 (以半径为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ 的半圆弧从上方) 绕过位于 $(-R_n, -\delta_n)$ 以及 (δ_n, R_n) 间的各个奇点. 在令 $\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0, \dots$ 后, 就有

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^{-\delta} \frac{e^{i(ax-b/x)}}{\sin(cx-d/x)} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{C_{\delta_n}} \frac{e^{i(az-b/z)}}{\sin(cz-d/z)} \frac{dz}{z^2+1} \\ & + \int_{\delta}^R \frac{e^{i(ax-b/x)}}{\sin(cx-d/x)} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{C_{R_n}} \frac{e^{i(az-b/z)}}{\sin(cz-d/z)} \frac{dz}{z^2+1} \\ & = 2\pi i \times \operatorname{res} f(i) + \pi i [\operatorname{res} f(z_{0+}) + \operatorname{res} f(z_{0-})] \\ & + \pi i \sum_k [\operatorname{res} f(z_{k++}) + \operatorname{res} f(z_{k+-}) + \operatorname{res} f(z_{k-+}) + \operatorname{res} f(z_{k--})]. \end{aligned}$$

下面的任务有二:

- (1) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_{R_n}} \frac{e^{i(az-b/z)}}{\sin(cz-d/z)} \frac{dz}{z^2+1} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_{\delta_n}} \frac{e^{i(az-b/z)}}{\sin(cz-d/z)} \frac{dz}{z^2+1} = 0;$
- (2) 计算各奇点处的留数, 并求和.

首先证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_{R_n}} \frac{e^{i(az-b/z)}}{\sin(cz-d/z)} \frac{dz}{z^2+1} = 0$. 按照 Jordan 引理的要求, 这只要证明在 $0 \leq \arg z \leq \pi$ 的范围内, 当 $|z| - R_n \rightarrow 0$ 时, $\frac{e^{-ib/z}}{\sin(cz-d/z)} \frac{1}{z^2+1}$ 一致地趋于 0 即可. 不难计算, 当 $z = R_n e^{i\theta}$ 时, 有

$$\sin\left(cz - \frac{d}{z}\right) = \sin\left[\left(cR_n - \frac{d}{R_n}\right) \cos \theta + i\left(cR_n + \frac{d}{R_n}\right) \sin \theta\right],$$

因此

$$\left|\sin\left(cz - \frac{d}{z}\right)\right|^2 = \sin^2\left[\left(cR_n - \frac{d}{R_n}\right) \cos \theta\right] + \sinh^2\left[\left(cR_n + \frac{d}{R_n}\right) \sin \theta\right].$$

从而可以证明

$$\left|\sin\left(cR_n - \frac{d}{R_n}\right)\right| \leq \left|\sin\left(cz - \frac{d}{z}\right)\right| \leq \sinh\left(cR_n + \frac{d}{R_n}\right).$$

这样, 只要取 R_n 为

$$cR_n - \frac{d}{R_n} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

就有

$$\left|\frac{e^{-ib/z}}{\sin(cz-d/z)} \frac{1}{z^2+1}\right| \leq \frac{1}{R_n^2} e^{-b/R_n},$$

因而就证明了

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_{R_n}} \frac{e^{i(az-b/z)}}{\sin(cz-d/z)} \frac{dz}{z^2+1} = 0.$$

为了证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_{\delta_n}} \frac{e^{i(az-b/z)}}{\sin(cz-d/z)} \frac{dz}{z^2+1} = 0$, 不妨作变换 $\zeta = -1/z$, 亦即

$$z = \delta_n e^{i\theta} \mapsto \zeta = \frac{1}{\delta_n} e^{i(\pi-\theta)}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

则

$$\int_{C_{\delta_n}} \frac{e^{i(az-b/z)}}{\sin(cz-d/z)} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{C'_n} \frac{e^{i(b\zeta-a/\zeta)}}{\sin(d\zeta-c/\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta^2+1}.$$

于是, 我们只要取 $\delta_n = 1/R_n$, 就能直接引用上面有关沿 C_{R_n} 的结论, 从而证得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_{\delta_n}} \frac{e^{i(az-b/z)}}{\sin(cz-d/z)} \frac{dz}{z^2+1} = 0.$$

现在再来计算被积函数在围道内各奇点处的留数. 对于奇点 i , 有

$$\operatorname{res} f(i) = \frac{e^{i(ia+ib)}}{\sin(ic+id)} \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2 \sinh(c+d)} e^{-(a+b)}.$$

对于奇点 $z_{0+} = \sqrt{d/c}$ 与 $z_{0-} = -\sqrt{d/c}$, 有

$$\begin{aligned}\operatorname{res} f(z_{0+}) &= \frac{e^{i(az-b/z)}}{c+d/z^2} \frac{1}{1+z^2} \Big|_{z_{0+}} = \frac{1}{2(c+d)} e^{i(a\sqrt{d/c}-b\sqrt{c/d})}, \\ \operatorname{res} f(z_{0-}) &= \frac{e^{i(az-b/z)}}{c+d/z^2} \frac{1}{1+z^2} \Big|_{z_{0-}} = \frac{1}{2(c+d)} e^{-i(a\sqrt{d/c}-b\sqrt{c/d})},\end{aligned}$$

它们的和为

$$\operatorname{res} f(z_{0+}) + \operatorname{res} f(z_{0-}) = \frac{1}{c+d} \cos \left(a\sqrt{\frac{d}{c}} - b\sqrt{\frac{c}{d}} \right).$$

对于满足 $cz - d/z = \pm k\pi$ 的四个奇点 $z_{k++}, z_{k+-}, z_{k-+}, z_{k--}$, 有

$$\operatorname{res} f(z) = (-1)^k \frac{e^{i(az-b/z)}}{c+d/z^2} \frac{1}{1+z^2} = (-1)^k \frac{e^{i(az-b/z)}}{c+d+cz^2+d/z^2}.$$

代入 $z = z_{k++}$, 因为

$$z_{k++} = \frac{k\pi + \sqrt{(k\pi)^2 + 4cd}}{2c}, \quad \frac{1}{z_{k++}} = \frac{-k\pi + \sqrt{(k\pi)^2 + 4cd}}{2d},$$

经过并不复杂的代数运算, 能够得到, 当 $z = z_{k++}$ 时, 有

$$\begin{aligned}az - \frac{b}{z} &= \left(\frac{a}{2c} + \frac{b}{2d} \right) k\pi + \left(\frac{a}{2c} - \frac{b}{2d} \right) \sqrt{(k\pi)^2 + 4cd}, \\ \frac{1}{c+d+cz^2+d/z^2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(k\pi)^2 + 4cd}} \frac{(c+d)\sqrt{(k\pi)^2 + 4cd} + (c-d)k\pi}{(k\pi)^2 + (c+d)^2}.\end{aligned}$$

因此

$$\operatorname{res} f(z_{k++}) = \frac{(-1)^k}{2} \frac{(c+d)\sqrt{(k\pi)^2 + 4cd} + (c-d)k\pi}{[(k\pi)^2 + (c+d)^2]\sqrt{(k\pi)^2 + 4cd}} e^{ik\pi\alpha + i\beta\sqrt{(k\pi)^2 + 4cd}}.$$

其中

$$\alpha = \frac{a}{2c} + \frac{b}{2d}, \quad \beta = \frac{a}{2c} - \frac{b}{2d}.$$

同理, 可以求得

$$\begin{aligned}\operatorname{res} f(z_{k+-}) &= \frac{(-1)^k}{2} \frac{(c+d)\sqrt{(k\pi)^2 + 4cd} - (c-d)k\pi}{[(k\pi)^2 + (c+d)^2]\sqrt{(k\pi)^2 + 4cd}} e^{ik\pi\alpha - i\beta\sqrt{(k\pi)^2 + 4cd}}, \\ \operatorname{res} f(z_{k-+}) &= \frac{(-1)^k}{2} \frac{(c+d)\sqrt{(k\pi)^2 + 4cd} - (c-d)k\pi}{[(k\pi)^2 + (c+d)^2]\sqrt{(k\pi)^2 + 4cd}} e^{-ik\pi\alpha + i\beta\sqrt{(k\pi)^2 + 4cd}}, \\ \operatorname{res} f(z_{k--}) &= \frac{(-1)^k}{2} \frac{(c+d)\sqrt{(k\pi)^2 + 4cd} + (c-d)k\pi}{[(k\pi)^2 + (c+d)^2]\sqrt{(k\pi)^2 + 4cd}} e^{-ik\pi\alpha - i\beta\sqrt{(k\pi)^2 + 4cd}}.\end{aligned}$$

这四个奇点处的留数之和为

$$\begin{aligned}
& \operatorname{res} f(z_{k++}) + \operatorname{res} f(z_{k+-}) + \operatorname{res} f(z_{k-+}) + \operatorname{res} f(z_{k--}) \\
&= \frac{(-1)^k}{(k\pi)^2 + (c+d)^2} \left[2(c+d) \cos k\pi\alpha \cos \beta \sqrt{(k\pi)^2 + 4cd} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2(c-d)k\pi}{\sqrt{(k\pi)^2 + 4cd}} \sin k\pi\alpha \sin \beta \sqrt{(k\pi)^2 + 4cd} \right].
\end{aligned}$$

综合以上结果, 并取极限 $R_n \rightarrow \infty$, $\delta_n \rightarrow 0$, 就有

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(ax-b/x)}}{\sin(cx-d/x)} \frac{dx}{1+x^2} \\
&= -\pi i \frac{e^{-(a+b)}}{\sinh(c+d)} + \frac{\pi i}{c+d} \cos \left(a\sqrt{\frac{d}{c}} - b\sqrt{\frac{c}{d}} \right) \\
&\quad + 2\pi i \left[(c+d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k\pi)^2 + (c+d)^2} \cos k\pi\alpha \cos \beta \sqrt{(k\pi)^2 + 4cd} \right. \\
&\quad \left. - (c-d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k\pi}{(k\pi)^2 + (c+d)^2} \frac{\sin k\pi\alpha}{\sqrt{(k\pi)^2 + 4cd}} \sin \beta \sqrt{(k\pi)^2 + 4cd} \right].
\end{aligned}$$

再比较虚部, 就得到所求的积分

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax-b/x)}{\sin(cx-d/x)} \frac{dx}{1+x^2} \\
&= -\pi \frac{e^{-(a+b)}}{\sinh(c+d)} + \frac{\pi}{c+d} \cos \left(a\sqrt{\frac{d}{c}} - b\sqrt{\frac{c}{d}} \right) \\
&\quad + 2\pi \left[(c+d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k\pi)^2 + (c+d)^2} \cos k\pi\alpha \cos \beta \sqrt{(k\pi)^2 + 4cd} \right. \\
&\quad \left. - (c-d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k\pi}{(k\pi)^2 + (c+d)^2} \frac{\sin k\pi\alpha}{\sqrt{(k\pi)^2 + 4cd}} \sin \beta \sqrt{(k\pi)^2 + 4cd} \right].
\end{aligned}$$

为了求出上面两个无穷级数的和函数, 需要用到半纯函数的有理分式展开 (Mittag-Leffler定理) ^①:

$$\begin{aligned}
& \frac{\cosh \alpha z}{\sinh z} \cosh \beta \sqrt{z^2 - \gamma^2} - \frac{\cos \beta \gamma}{z} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos n\pi\alpha \cos \beta \sqrt{(n\pi)^2 + \gamma^2} \left(\frac{1}{z - n\pi i} + \frac{1}{n\pi i} \right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos n\pi\alpha \cos \beta \sqrt{(n\pi)^2 + \gamma^2} \left(\frac{1}{z + n\pi i} - \frac{1}{n\pi i} \right) \\
&= 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 + (n\pi)^2} \cos n\pi\alpha \cos \beta \sqrt{(n\pi)^2 + \gamma^2}, \tag{8.35a}
\end{aligned}$$

① 参见文献: 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论. 北京: 北京大学出版社, 2000: 16 - 19.

$$\begin{aligned}
& \frac{z \sinh \alpha z}{\sinh z} \frac{\sinh \beta \sqrt{z^2 - \gamma^2}}{\sqrt{z^2 - \gamma^2}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n\pi \sin n\pi\alpha \frac{\sin \beta \sqrt{(n\pi)^2 + \gamma^2}}{\sqrt{(n\pi)^2 + \gamma^2}} \left(\frac{1}{z - n\pi i} + \frac{1}{n\pi i} \right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n\pi \sin n\pi\alpha \frac{\sin \beta \sqrt{(n\pi)^2 + \gamma^2}}{\sqrt{(n\pi)^2 + \gamma^2}} \left(\frac{1}{z + n\pi i} - \frac{1}{n\pi i} \right) \\
&= 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n\pi \sin n\pi\alpha \sin \beta \sqrt{(n\pi)^2 + \gamma^2}}{z^2 + (n\pi)^2 \sqrt{(n\pi)^2 + \gamma^2}}. \quad (8.35b)
\end{aligned}$$

令 $z = c + d$, $\gamma^2 = 4cd$, 因而 $\sqrt{z^2 - \gamma^2} = c - d$, 就有

$$\begin{aligned}
& \frac{\cosh \alpha(c+d)}{\sinh(c+d)} \cosh \beta(c-d) \\
&= \frac{\cos \beta\gamma}{c+d} + 2(c+d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n\pi)^2 + (c+d)^2} \cos n\pi\alpha \cos \beta \sqrt{(n\pi)^2 + 4cd}. \quad (8.35c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sinh \alpha(c+d)}{\sinh(c+d)} \sinh \beta(c-d) \\
&= 2(c-d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n\pi \sin n\pi\alpha \sin \beta \sqrt{(n\pi)^2 + 4cd}}{(n\pi)^2 + (c+d)^2 \sqrt{(n\pi)^2 + 4cd}}. \quad (8.35d)
\end{aligned}$$

注意到前面引入的 β , 有 $\beta\gamma = a\sqrt{d/c} + b\sqrt{c/d}$, 因而就得到最后的简单结果:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax - b/x)}{\sin(cx - d/x)} \frac{dx}{1+x^2} \\
&= -\frac{\pi e^{-(a+b)}}{\sinh(c+d)} + \frac{\pi}{\sinh(c+d)} \cosh \alpha(c+d) \cosh \beta(c-d) \\
&\quad + \frac{\pi}{\sinh(c+d)} \sinh \alpha(c+d) \sinh \beta(c-d) \\
&\quad - \frac{\pi}{\sinh(c+d)} \{ -e^{-(a+b)} + \cosh[\alpha(c+d) + \beta(c-d)] \} \\
&= \frac{\pi}{\sinh(c+d)} [-e^{-(a+b)} + \cosh(a+b)] \\
&= \frac{\pi \sinh(a+b)}{\sinh(c+d)}. \quad (8.36)
\end{aligned}$$

 讨论 重复引用 (8.36) 式, 可以得到

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\alpha x - 2\beta/x) \pm \sin(2\gamma x - 2\delta/x)}{\sin(ax - b/x)} \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sinh(a+b)} [\sinh 2(\alpha + \beta) \pm \sinh 2(\gamma + \delta)],
\end{aligned}$$

成立条件不妨取为 $a > 2c > 0, b > 2d > 0, a > 2e > 0, b > 2f > 0$. 利用三角函数中的和差化积公式, 就能化成

$$\int_0^\infty \frac{\sin(cx-d/x) \cos(ex-f/x)}{\sin(ax-b/x)} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi \sinh(c+d)}{2 \sinh(a+b)} \cosh(e+f), \quad (8.37)$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos(cx-d/x) \sin(ex-f/x)}{\sin(ax-b/x)} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi \sinh(e+f)}{2 \sinh(a+b)} \cosh(c+d). \quad (8.38)$$

成立条件是 $a > c \pm e > 0, b > d \pm f > 0$.

§8.2 含多值函数的积分

例 8.6 计算积分 $\int_0^{\pi/2} \cos^\alpha \theta \cos \alpha \theta d\theta$, 其中 $\alpha > -1$.

解 本题中的积分兼有有理三角函数积分与多值函数积分的两个特点, 故可考虑复变积分 $\oint_C (z^2+1)^\alpha \frac{dz}{z}$, 其中积分围道 C 如图 8.4 所示, 其基本结构是半圆形的围道, 但绕开了 $z = \pm i$ (被积函数的枝点) 以及 $z=0$ (被积函数的极点). 作为多值函数, 规定 $\arg(z^2+1)|_{z=0} = 0$. 因此, 对于圆周上的点 $z = e^{i\theta}$, 有 $z^2+1 = 2e^{i\theta} \cos \theta$, $\arg \cos \theta = 0$; 而对于虚轴上的点 $z = iy, -1 < y < 1$, 则有 $\arg(z^2+1) = 0$.

在 $\alpha > -1$ 的条件下, 容易证明

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} (z^2+1)^\alpha \frac{dz}{z} = 0, \quad \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{C_{\varepsilon'}} (z^2+1)^\alpha \frac{dz}{z} = 0,$$

于是, 按照留数定理, 并取极限 $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon' \rightarrow 0$ 后, 就有

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2e^{i\theta} \cos \theta)^\alpha i d\theta + \int_1^\delta (1-y^2)^\alpha \frac{dy}{y} + \int_{C_\delta} (z^2+1)^\alpha \frac{dz}{z} + \int_\delta^1 (1-y^2)^\alpha \frac{dy}{y} = 0.$$

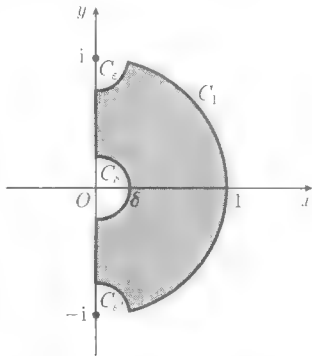


图 8.4 应用于例 8.6 的积分围道

沿虚轴的两段积分正好彼此相消, 而对于沿 C_δ 的积分, 有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} (z^2 + 1)^\alpha \frac{dz}{z} = -i\pi,$$

所以, 取极限 $\delta \rightarrow 0$, 就得到

$$2^\alpha \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\alpha\theta} \cos^\alpha \theta d\theta = \pi.$$

比较实部, 得

$$2^\alpha \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha \theta \cos^\alpha \theta d\theta = \pi.$$

所以最后有

$$\int_0^{\pi/2} \cos \alpha \theta \cos^\alpha \theta d\theta = \frac{\pi}{2^{\alpha+1}}. \quad (8.39)$$

讨论

1. 本题中被积函数为多值函数, 不仅 $z=0$ 与 $z=\infty$ 间要作割线, 而且当 $\pi/2 < |\theta| < \pi$ 时, 也不能简单地使用等式 $z^2 + 1 = 2e^{i\theta} \cos \theta$, 必须进一步明确 $\arg \cos \theta$ 的取值.

2. 本题也可看成例 7.5 的特殊情形: $a=1, b=\alpha+1$.

例 8.7 类似地, 我们可以采用图 8.5 中的积分围道, 计算复变积分

$$\int_C \frac{z^2 - 1}{z^4 - 2z^2 \cosh 2p + 1} \frac{z dz}{(z^2 + 1)^\alpha}, \quad p > 0, \alpha < 1.$$

这时, 在围道内只有一个奇点 $z = e^{-p}$, 留数为

$$\frac{e^{-2p} - 1}{4e^{-3p} - 4e^{-p} \cosh 2p} \frac{e^{-p}}{(e^{-2p} + 1)^\alpha} = 2^{-\alpha-2} \frac{e^{-p(1-\alpha)}}{\cosh^{\alpha+1} p},$$

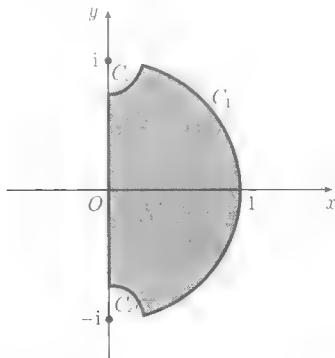


图 8.5 应用于例 8.7 中的积分围道

因此

$$\oint_C \frac{z^2 - 1}{z^4 - 2z^2 \cosh 2p + 1} \frac{z dz}{(z^2 + 1)^\alpha} = \frac{i\pi}{2^{\alpha+1}} \frac{e^{-p(1-\alpha)}}{\cosh^{\alpha+1} p},$$

亦即

$$\begin{aligned} & \int_{C_1} \frac{z^2 - 1}{z^4 - 2z^2 \cosh 2p + 1} \frac{z dz}{(z^2 + 1)^\alpha} + \int_{C_\varepsilon} \frac{z^2 - 1}{z^4 - 2z^2 \cosh 2p + 1} \frac{z dz}{(z^2 + 1)^\alpha} \\ & + \int_{1-\varepsilon}^{-1+\varepsilon'} \frac{y^2 + 1}{y^4 + 2y^2 \cosh 2p + 1} \frac{y dy}{(1 - y^2)^\alpha} \\ & + \int_{C_{\varepsilon'}} \frac{z^2 - 1}{z^4 - 2z^2 \cosh 2p + 1} \frac{z dz}{(z^2 + 1)^\alpha} = \frac{i\pi}{2^{\alpha+1}} \frac{e^{-p(1-\alpha)}}{\cosh^{\alpha+1} p}. \end{aligned}$$

考虑到在 $\alpha < 1$ 的条件下, 根据小圆弧引理, 有

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{z^2 - 1}{z^4 - 2z^2 \cosh 2p + 1} \frac{z dz}{(z^2 + 1)^\alpha} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{C_{\varepsilon'}} \frac{z^2 - 1}{z^4 - 2z^2 \cosh 2p + 1} \frac{z dz}{(z^2 + 1)^\alpha} &= 0, \end{aligned}$$

同时考虑到被积函数的奇偶性, 有

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon' \rightarrow 0}} \int_{1-\varepsilon}^{-1+\varepsilon'} \frac{y^2 + 1}{y^4 + 2y^2 \cosh 2p + 1} \frac{y dy}{(1 - y^2)^\alpha} = 0.$$

所以

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon' \rightarrow 0}} \int_{C_1} \frac{z^2 - 1}{z^4 - 2z^2 \cosh 2p + 1} \frac{z dz}{(z^2 + 1)^\alpha} = \frac{i\pi}{2^{\alpha+1}} \frac{e^{-p(1-\alpha)}}{\cosh^{\alpha+1} p}.$$

因为在 C_1 上, $z = e^{i\theta}$, $dz = e^{i\theta} i d\theta$, 且

$$\begin{aligned} z^2 + 1 &= 2e^{i\theta} \cos \theta, & z^2 - 1 &= 2e^{i\theta} i \sin \theta, \\ z^4 - 2z^2 \cosh 2p + 1 &= 2e^{i2\theta} (\cos 2\theta - \cosh 2p), \end{aligned}$$

所以可将上面的积分化为

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{i\theta(1-\alpha)}}{\cos 2\theta - \cosh 2p} \frac{\sin \theta}{\cos^\alpha \theta} d\theta = \frac{i\pi}{2} \frac{e^{-p(1-\alpha)}}{\cosh^{\alpha+1} p}.$$

比较虚部, 即得

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(1-\alpha)\theta \sin \theta}{\cosh 2p - \cos 2\theta} \frac{d\theta}{\cos^\alpha \theta} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-p(1-\alpha)}}{\cosh^{\alpha+1} p}. \quad (8.40a)$$

因为被积函数为偶函数, 所以还可进一步化为

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(1-\alpha)\theta \sin \theta}{\cosh 2p - \cos 2\theta} \frac{d\theta}{\cos^\alpha \theta} = \frac{\pi}{4} \frac{e^{-p(1-\alpha)}}{\cosh^{\alpha+1} p}. \quad (8.40b)$$

若采用相同围道计算复变积分 $\int_C \frac{z^2 - 1}{z^4 - 2z^2 \cosh 2p + 1} \frac{z dz}{(z^2 + 1)^\alpha}$, 则可导出

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(1-\alpha)\theta}{\cosh 2p - \cos 2\theta} \frac{d\theta}{\cos^{\alpha-1} \theta} = \frac{\pi}{4} \frac{e^{-p(1-\alpha)}}{\sinh p \cosh^\alpha p}, \quad p > 0, \alpha < 2. \quad (8.41)$$

例 8.8 指定积分围道如图 8.6 所示, 选择适当的被积函数, 计算积分

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(\alpha+1)\theta}{\sin \theta} \cos^\alpha \theta d\theta, \quad \operatorname{Re} \alpha > -1.$$

解 本题与例 8.6 相似, 故可考虑复变积分

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C \frac{(z^2 + 1)^\alpha}{z^2 - 1} z dz.$$

并且规定 $\arg(z^2 + 1)|_{z=0} = 0$. 于是, 对于单位圆周 C_1 与 C'_1 上的点 $z = e^{i\theta}$, 有

$$z^2 + 1 = 2e^{i\theta} \cos \theta,$$

即

$$\arg(z^2 + 1)|_{z=e^{i\theta}, -\pi/2 < \theta < \pi/2} = \theta,$$

同时, 对于虚轴上的点 $z = iy, -1 < y < 1$, 有

$$\arg(z^2 + 1)|_{z=iy, -1 < y < 1} = 0.$$

另一方面, 根据留数定理, 可以写出

$$\begin{aligned} & \int_{1-\varepsilon}^{-1+\varepsilon'} \frac{(1-y^2)^\alpha}{1+y^2} y dy + \int_{C_{\varepsilon'}} \frac{(z^2+1)^\alpha}{z^2-1} z dz + \int_{C'_1} \frac{(z^2+1)^\alpha}{z^2-1} z dz \\ & + \int_{C_\delta} \frac{(z^2+1)^\alpha}{z^2-1} z dz + \int_{C_1} \frac{(z^2+1)^\alpha}{z^2-1} z dz + \int_{C_\varepsilon} \frac{(z^2+1)^\alpha}{z^2-1} z dz = 0. \end{aligned}$$

因为

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{(z^2+1)^\alpha}{z^2-1} z dz = 0, \quad \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \int_{C_{\varepsilon'}} \frac{(z^2+1)^\alpha}{z^2-1} z dz = 0,$$

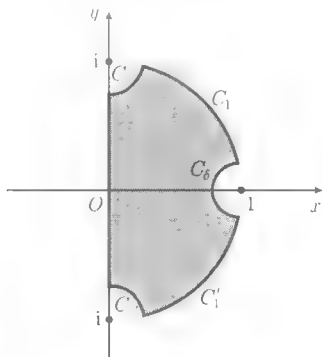


图 8.6 例 8.8 中的积分围道

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{(z^2+1)^\alpha}{z^2-1} z dz &= -i\pi \cdot 2^{\alpha-1}, \\ \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon' \rightarrow 0}} \int_{1-\varepsilon}^{-1+\varepsilon'} \frac{(1-y^2)^\alpha}{1+y^2} y dy &= 0, \\ \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow 0}} \int_{C_1} \frac{(z^2+1)^\alpha}{z^2-1} z dz &= 2^{\alpha-1} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^\alpha \theta}{\sin \theta} e^{i(\alpha+1)\theta} d\theta, \\ \lim_{\substack{\varepsilon' \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow 0}} \int_{C'_1} \frac{(z^2+1)^\alpha}{z^2-1} z dz &= 2^{\alpha-1} \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos^\alpha \theta}{\sin \theta} e^{i(\alpha+1)\theta} d\theta, \end{aligned}$$

所以有

$$2^{\alpha-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^\alpha \theta}{\sin \theta} e^{i(\alpha+1)\theta} d\theta = i\pi \cdot 2^{\alpha-1}.$$

比较虚部, 即得

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(\alpha+1)\theta}{\sin \theta} \cos^\alpha \theta d\theta = \pi. \quad (8.42)$$

例 8.9 采用类似于图 8.5 的围道, 还可以计算积分

$$\oint_C \frac{z^2-1}{z^4-2z^2 \cos 2\gamma+1} \frac{z dz}{(z^2+1)^\alpha}, \quad \operatorname{Re} \alpha < 1, 0 < \gamma < \pi/2.$$

这时的围道见图 8.7, 围道的局部调整是由于要绕开圆周上的两个奇点 $z = e^{\pm i\gamma}$ (一阶极点). 因为被积函数在这两个奇点处的留数为

$$\operatorname{res} \left\{ \frac{z^2-1}{z^4-2z^2 \cos 2\gamma+1} \frac{z}{(z^2+1)^\alpha} \right\}_{z=e^{\pm i\gamma}} = \frac{1}{2^{\alpha+2}} \frac{e^{\pm i(1-\alpha)\gamma}}{\cos^{\alpha+1} \gamma},$$

重复上题的计算, 就得到

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2ie^{i\theta} \sin \theta}{e^{4i\theta} - 2e^{2i\theta} \cos 2\gamma + 1} \frac{e^{2i\theta} i d\theta}{(2e^{i\theta} \cos \theta)^\alpha} \\ &= -2^{-\alpha} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{\cos 2\theta - \cos 2\gamma} \frac{\sin \theta}{\cos^\alpha \theta} d\theta \\ &= \pi i \times \frac{1}{2^{\alpha+2}} \frac{1}{\cos^{\alpha+1} \gamma} \left[e^{i(1-\alpha)\gamma} + e^{-i(1-\alpha)\gamma} \right] \\ &= \frac{\pi i}{2^{\alpha+1}} \frac{\cos(1-\alpha)\gamma}{\cos^{\alpha+1} \gamma}. \end{aligned}$$

因此

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{\cos 2\theta - \cos 2\gamma} \frac{\sin \theta}{\cos^\alpha \theta} d\theta = -\frac{\pi i}{2} \frac{\cos(1-\alpha)\gamma}{\cos^{\alpha+1} \gamma}.$$

再由于

$$\int_{-\pi/2}^0 \frac{e^{i(1-\alpha)\theta} \sin \theta}{\cos 2\theta - \cos 2\gamma} \cos^\alpha \theta d\theta - \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-i(1-\alpha)\theta} \sin \theta}{\cos 2\theta - \cos 2\gamma} d\theta,$$

所以就求得

$$\text{v.p.} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(1-\alpha)\theta}{\cos 2\theta - \cos 2\gamma} \frac{\sin \theta}{\cos^\alpha \theta} d\theta = -\frac{\pi}{4} \frac{\cos(1-\alpha)\gamma}{\cos^{\alpha+1} \gamma}. \quad (8.43)$$

类似地, 采用同样的积分围道计算 $\oint_C \frac{1}{z^4 - 2z^2 \cos 2\gamma + 1} \frac{z dz}{(z^2 + 1)^\alpha}$, 就能导出

$$\text{v.p.} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \alpha \theta}{\cos 2\theta} \frac{d\theta}{\cos^\alpha \theta} = -\frac{\pi}{4} \frac{\sin \alpha \gamma}{\sin \gamma \cos^{\alpha-1} \gamma}, \quad \text{Re } \alpha < 1, 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}. \quad (8.44)$$

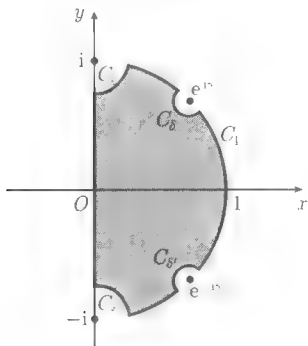


图 8.7 例 8.9 中的积分围道

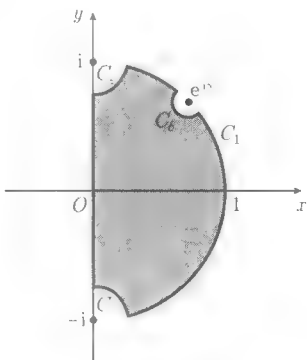


图 8.8 例 8.10 中的积分围道

例 8.10 计算积分 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \alpha(\theta - \gamma)}{\cos^{1-\alpha} \theta \sin(\theta - \gamma)} d\theta$, 其中 $\alpha > 0, -\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$.

解 选取积分围道如图 8.8 所示, 计算围道积分 $\oint_C \frac{1}{(z^2 + 1)^{1-\alpha}} \frac{z dz}{z^2 - e^{i2\gamma}}$, 仿照前几题的讨论, 即可得到

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{(2e^{i\theta} \cos \theta)^{1-\alpha}} \frac{e^{i2\theta} i d\theta}{e^{i2\theta} - e^{i2\gamma}} = \frac{\pi i}{2} \frac{1}{(z^2 + 1)^{\alpha-1}} \Big|_{z=e^{i\gamma}} = \frac{\pi i}{2} \frac{1}{(2e^{i\gamma} \cos \gamma)^{1-\alpha}},$$

亦即

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{i\alpha(\theta-\gamma)}}{\cos^{1-\alpha} \theta \sin(\theta - \gamma)} d\theta = \frac{\pi i}{\cos^{1-\alpha} \gamma}. \quad (8.45)$$

比较实部, 就求得积分

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin \alpha(\theta - \gamma)}{\cos^{1-\alpha} \theta \sin(\theta - \gamma)} d\theta = \frac{\pi}{\cos^{1-\alpha} \gamma}. \quad (8.46)$$

与此同时, 比较虚部, 还能得到

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \alpha(\theta - \gamma)}{\cos^{1-\alpha} \theta \sin(\theta - \gamma)} d\theta = 0. \quad (8.47)$$

或者将 (8.45) 式改写成

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{i\alpha\theta}}{\cos^{1-\alpha} \theta \sin(\theta - \gamma)} d\theta = \frac{\pi i e^{i\alpha\gamma}}{\cos^{1-\alpha} \gamma}, \quad (8.45')$$

分别比较实部和虚部, 又能得到

$$\text{v.p.} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \alpha\theta}{\cos^{1-\alpha} \theta \sin(\theta - \gamma)} d\theta = -\frac{\pi \sin \alpha\gamma}{\cos^{1-\alpha} \gamma}, \quad (8.48)$$

$$\text{v.p.} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin \alpha\theta}{\cos^{1-\alpha} \theta \sin(\theta - \gamma)} d\theta = \frac{\pi \cos \alpha\gamma}{\cos^{1-\alpha} \gamma}. \quad (8.49)$$

例 8.11 应用留数定理计算积分 $\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha \theta \cos \alpha \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) d\theta$, $\text{Re } \alpha > -1$.

解 本题类似于例 8.6, 事实上, 可以由该处的结果通过简单的变换而导出; 也可以采用图 8.9 中的围道计算复变积分 $\oint_C (z^2 - 1)^\alpha \frac{dz}{z}$ 而得到. 如果我们规定

$\arg(z^2 - 1)|_{z=0} = \pi$, 则对于圆周上的变点 $z = e^{i\theta}$, 有

$$(z^2 - 1)|_{z=e^{i\theta}} = 2e^{i\pi/2} e^{i\theta} \sin \theta,$$

其中 $\arg \sin \theta = 0$. 容易证明, 在本题所设条件 $\text{Re } \alpha > -1$ 下,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} (z^2 - 1)^\alpha \frac{dz}{z} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon'} (z^2 - 1)^\alpha \frac{dz}{z} = 0.$$

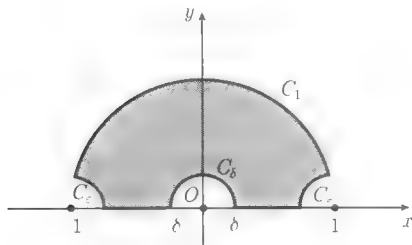


图 8.9 应用于例 8.11 的积分围道

同时, 因为

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} (z^2 - 1)^\alpha \frac{dz}{z} = -i\pi e^{i\pi\alpha},$$

就能得到

$$\int_0^\pi e^{i\alpha(\theta - \pi/2)} \sin^\alpha \theta d\theta = \frac{\pi}{2^\alpha}. \quad (8.50)$$

因为

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^{i\alpha(\theta-\pi/2)} \sin^\alpha \theta d\theta &= \int_0^{\pi/2} e^{i\alpha(\theta-\pi/2)} \sin^\alpha \theta d\theta + \int_{\pi/2}^\pi e^{i\alpha(\theta-\pi/2)} \sin^\alpha \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[e^{i\alpha(\theta-\pi/2)} - e^{-i\alpha(\theta-\pi/2)} \right] \sin^\alpha \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \cos \alpha \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sin^\alpha \theta d\theta,\end{aligned}$$

最后就有

$$\int_0^{\pi/2} \cos \alpha \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sin^\alpha \theta d\theta = \frac{\pi}{2^{\alpha+1}}. \quad (8.51)$$

若将 (8.50) 式改写为

$$\int_0^\pi e^{i\alpha\theta} \sin^\alpha \theta d\theta = \frac{\pi}{2^\alpha} e^{i\pi\alpha/2}, \quad (8.50')$$

当 α 为实数, $\alpha > -1$ 时, 则可直接比较等式两端的实部与虚部, 从而得到

$$\int_0^\pi \sin^\alpha \theta \cos \alpha \theta d\theta = \frac{\pi}{2^\alpha} \cos \frac{\pi\alpha}{2}, \quad \int_0^\pi \sin^\alpha \theta \sin \alpha \theta d\theta = \frac{\pi}{2^\alpha} \sin \frac{\pi\alpha}{2}. \quad (8.52)$$

例 8.12 类似于例 8.7, 采用图 8.10 中的积分围道, 计算复变积分

$$\oint_C \frac{z^2 + 1}{z^4 - 2z^2 \cosh 2p + 1} \frac{z dz}{(z^2 - 1)^\alpha}, \quad p > 0, \alpha < 1,$$

可以导出 (计算过程从略)

$$\int_0^\pi \frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{\cosh 2p - \cos 2\theta} \frac{\cos \theta}{\sin^\alpha \theta} d\theta = \frac{\pi}{2} e^{-p(1-\alpha)} \frac{e^{i\pi\alpha/2}}{\sinh^{\alpha+1} p}.$$

分别比较实部与虚部, 即得

$$\int_0^\pi \frac{\cos(1-\alpha)\theta}{\cosh 2p - \cos 2\theta} \frac{\cos \theta}{\sin^\alpha \theta} d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-p(1-\alpha)}}{\sinh^{\alpha+1} p} \cos \frac{\pi\alpha}{2}, \quad (8.53)$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin(1-\alpha)\theta}{\cosh 2p - \cos 2\theta} \frac{\cos \theta}{\sin^\alpha \theta} d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-p(1-\alpha)}}{\sinh^{\alpha+1} p} \sin \frac{\pi\alpha}{2}. \quad (8.54)$$

类似地, 计算复变积分

$$\oint_C \frac{z^2 - 1}{z^4 - 2z^2 \cosh 2p + 1} \frac{z dz}{(z^2 - 1)^\alpha}, \quad p > 0, \alpha < 2,$$

也能得到

$$\int_0^\pi \frac{\cos(1-\alpha)\theta}{\cosh 2p - \cos 2\theta} \frac{1}{\sin^{\alpha-1} \theta} d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-p(1-\alpha)}}{\sinh^\alpha p \cosh p} \sin \frac{\pi\alpha}{2}. \quad (8.55)$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin(1-\alpha)\theta}{\cosh 2p - \cos 2\theta} \frac{1}{\sin^{\alpha-1} \theta} d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-p(1-\alpha)}}{\sinh^\alpha p \cosh p} \cos \frac{\pi\alpha}{2}. \quad (8.56)$$

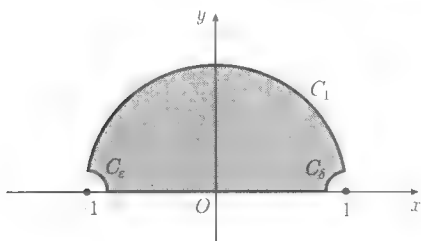


图 8.10 应用于例 8.12 的积分围道

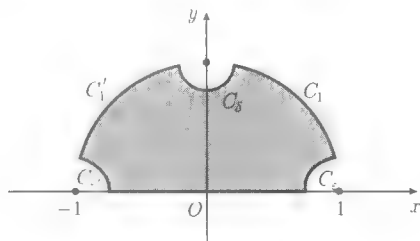


图 8.11 应用于例 8.13 的积分围道

例 8.13 仿照例 8.8, 采用图 8.11 中的积分围道, 计算 $\oint_C (z^2 - 1)^\alpha \frac{z dz}{z^2 + 1}$. 在 $\operatorname{Re} \alpha > -1$ 的条件下, 可以得到

$$\int_0^\pi \sin^\alpha \theta \frac{e^{i(\alpha+1)\theta}}{\cos \theta} d\theta = \pi e^{i\pi\alpha/2}.$$

比较实部与虚部, 即得

$$\int_0^\pi \sin^\alpha \theta \frac{\cos(\alpha+1)\theta}{\cos \theta} d\theta = \pi \cos \frac{\pi\alpha}{2}, \quad \int_0^\pi \sin^\alpha \theta \frac{\sin(\alpha+1)\theta}{\cos \theta} d\theta = \pi \sin \frac{\pi\alpha}{2}. \quad (8.57)$$

例 8.14 类似于例 8.9, 取积分围道如图 8.12 所示, 我们再来计算复变积分

$$\oint_C \frac{z^2 + 1}{(z^2 - 1)^\alpha} \frac{z dz}{z^4 - 2z^2 \cos 2\gamma + 1}, \quad \alpha < 1, 0 < \gamma < \pi/2.$$

注意到在圆周上有两个奇点: $z = e^{i\gamma}$ 及 $z = e^{i(\pi-\gamma)}$, 留数分别为

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \left\{ \frac{z^2 + 1}{(z^2 - 1)^\alpha} \frac{z}{z^4 - 2z^2 \cos 2\gamma + 1} \right\}_{z=e^{i\gamma}} &= \frac{1}{i} \frac{e^{-i\pi\alpha/2}}{2^{\alpha+2}} \frac{e^{i(1-\alpha)\gamma}}{\sin^{\alpha+1} \gamma}, \\ \operatorname{res} \left\{ \frac{z^2 + 1}{(z^2 - 1)^\alpha} \frac{z}{z^4 - 2z^2 \cos 2\gamma + 1} \right\}_{z=e^{i(\pi-\gamma)}} &= \frac{1}{i} \frac{e^{-i\pi\alpha/2}}{2^{\alpha+2}} \frac{e^{i(1-\alpha)(\pi-\gamma)}}{\sin^{\alpha+1} \gamma}, \end{aligned}$$

所以根据留数定理, 并取极限 $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon' \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, 即得

$$\int_0^\pi \frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{\sin^\alpha \theta} \frac{\cos \theta}{\cos 2\theta - \cos 2\gamma} d\theta = \frac{\pi}{4i} \frac{1}{\sin^{\alpha+1} \gamma} \left[e^{i(1-\alpha)\gamma} + e^{i(1-\alpha)(\pi-\gamma)} \right]. \quad (8.58)$$

比较实部和虚部, 就有

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \frac{\cos(1-\alpha)\theta}{\sin^\alpha \theta} \frac{\cos \theta}{\cos 2\theta - \cos 2\gamma} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sin^{\alpha+1} \gamma} \left[\sin(1-\alpha)\gamma + \sin(1-\alpha)(\pi-\gamma) \right], \end{aligned} \quad (8.59)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \frac{\sin(1-\alpha)\theta}{\sin^\alpha \theta} \frac{\cos \theta}{\cos 2\theta - \cos 2\gamma} d\theta \\ &= -\frac{\pi}{4} \frac{1}{\sin^{\alpha+1} \gamma} \left[\cos(1-\alpha)\gamma + \cos(1-\alpha)(\pi-\gamma) \right]. \end{aligned} \quad (8.60)$$

或者将 (8.58) 式改写为

$$\int_0^\pi \frac{e^{i(1-\alpha)(\theta-\pi/2)}}{\sin^\alpha \theta} \frac{\cos \theta}{\cos 2\theta - \cos 2\gamma} d\theta = \frac{\pi}{2i} \frac{1}{\sin^{\alpha+1} \gamma} \cos(1-\alpha) \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right), \quad (8.58')$$

比较实部和虚部, 又能得到

$$\int_0^\pi \cos(1-\alpha) \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \frac{\cos \theta}{\sin^\alpha \theta} \frac{d\theta}{\cos 2\theta - \cos 2\gamma} = 0, \quad (8.61)$$

$$\int_0^\pi \sin(1-\alpha) \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \frac{\cos \theta}{\sin^\alpha \theta} \frac{d\theta}{\cos 2\theta - \cos 2\gamma} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin^{\alpha+1} \gamma} \cos(1-\alpha) \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right). \quad (8.62)$$

用同样的方法计算

$$\oint_C \frac{1}{(z^2 - 1)^\alpha} \frac{z dz}{z^4 - 2z^2 \cos 2\gamma + 1}, \quad \alpha < 1, 0 < \gamma < \pi/2,$$

就可以得到下列积分:

$$\int_0^\pi \frac{\cos \alpha \theta}{\sin^\alpha \theta} \frac{d\theta}{\cos 2\theta - \cos 2\gamma} = -\frac{\pi}{4} \frac{1}{\sin^{\alpha+1} \gamma \cos \gamma} \left[\sin \alpha \gamma - \sin \alpha(\pi - \gamma) \right], \quad (8.63)$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin \alpha \theta}{\sin^\alpha \theta} \frac{d\theta}{\cos 2\theta - \cos 2\gamma} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sin^{\alpha+1} \gamma \cos \gamma} \left[\cos \alpha \gamma - \cos \alpha(\pi - \gamma) \right], \quad (8.64)$$

$$\int_0^\pi \frac{1}{\sin^\alpha \theta} \cos \alpha \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \frac{d\theta}{\cos 2\theta - \cos 2\gamma} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin^{\alpha+1} \gamma \cos \gamma} \sin \alpha \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right), \quad (8.65)$$

$$\int_0^\pi \frac{1}{\sin^\alpha \theta} \sin \alpha \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \frac{d\theta}{\cos 2\theta - \cos 2\gamma} = 0. \quad (8.66)$$

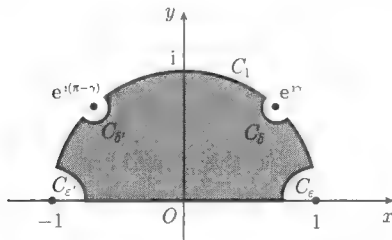


图 8.12 应用于例 8.14 的积分围道

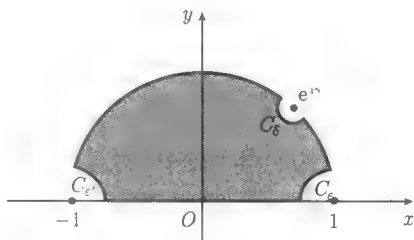


图 8.13 应用于例 8.15 的积分围道

例 8.15 现在再采用图 8.13 中的积分围道, 计算复变积分

$$\oint_C \frac{1}{(z^2 - 1)^\alpha} \frac{z dz}{z^2 - e^{i2\gamma}}, \quad a < 1, 0 < \gamma < \pi.$$

注意到对于位于上半圆周上的点 $z = e^{i\theta}$ 及 $z = e^{i\gamma}$, 有

$$\begin{aligned} (z^2 - 1)|_{z=e^{i\theta}} &= 2e^{i\pi/2} e^{i\theta} \sin \theta, & \arg \sin \theta &= 0, \\ (z^2 - 1)|_{z=e^{i\gamma}} &= 2e^{i\pi/2} e^{i\gamma} \sin \gamma, & \arg \sin \gamma &= 0, \\ (z^2 - e^{i2\gamma})|_{z=e^{i\theta}} &= e^{2i2\gamma} \cdot 2e^{i\pi/2} e^{i(\theta - \gamma)} \sin(\theta - \gamma), \end{aligned}$$

根据留数定理, 并取极限 $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon' \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, 就得到

$$\int_0^\pi \frac{e^{i(1-\alpha)(\theta-\gamma)}}{\sin^\alpha \theta \sin(\theta-\gamma)} d\theta = \frac{\pi i}{\sin^\alpha \gamma}, \quad \text{亦即} \quad \int_0^\pi \frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{\sin^\alpha \theta \sin(\theta-\gamma)} d\theta = \frac{\pi i e^{i(1-\alpha)\gamma}}{\sin^\alpha \gamma}.$$

分别比较实部与虚部即得

$$\text{v.p.} \int_0^\pi \frac{\cos(1-a)(\gamma-\theta)}{\sin^a \theta \sin(\gamma-\theta)} d\theta = 0, \quad (8.67)$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin(1-a)(\gamma-\theta)}{\sin^a \theta \sin(\gamma-\theta)} d\theta = \frac{\pi}{\sin^a \gamma}, \quad (8.68)$$

$$\text{v.p.} \int_0^\pi \frac{\cos(1-a)\theta}{\sin^a \theta \sin(\gamma-\theta)} d\theta = \frac{\pi \sin(1-a)\gamma}{\sin^a \gamma}, \quad (8.69)$$

$$\text{v.p.} \int_0^\pi \frac{\sin(1-a)\theta}{\sin^a \theta \sin(\gamma-\theta)} d\theta = -\frac{\pi \cos(1-a)\gamma}{\sin^a \gamma}. \quad (8.70)$$

§8.3 应用留数定理的非常规方式

在应用留数定理计算定积分时, 经常用到半圆形的围道. 在多数情况下, 当圆弧的半径趋于 ∞ 时, 沿半圆弧的积分趋于确定的极限, 0 或者非零极限值. 然而, 也不排除会出现沿半圆弧的积分极限不存在的情形, 见下面的例子.

例 8.16 计算积分 $\int_0^\infty \frac{x}{x^2 + a^2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| dx$, 其中 $a > 0$.

解 作为无穷积分, 这个定积分的存在性毋庸置疑. 我们可以选择图 8.14 中的积分围道 C 来计算复变积分 $\oint_C \frac{z}{z^2 + a^2} \ln \frac{z+1}{z-1} dz$. 由于 $z = \pm 1$ 是被积函数的枝点, 故可由 $z = -1$ 点直接与 $z = 1$ 点相连而沿实轴作割线, 并且规定在割线上岸

$$\arg(z-1) = \pi, \quad \arg(z+1) = 0.$$

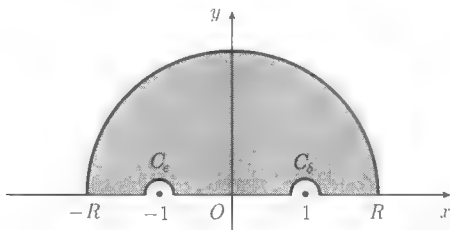


图 8.14 应用于例 8.16 的积分围道

于是, 按照留数定理, 我们就有

$$\oint_C \frac{z}{z^2 + a^2} \ln \frac{z+1}{z-1} dz = 2\pi i \times \operatorname{res} \left\{ \frac{z}{z^2 + a^2} \ln \frac{z+1}{z-1} \right\}_{z=ia}.$$

因为

$$\lim_{z \rightarrow \mp 1} (z \pm 1) \cdot \frac{z}{z^2 + a^2} \ln \frac{z+1}{z-1} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot \frac{z}{z^2 + a^2} \ln \frac{z+1}{z-1} = 0,$$

所以, 在取极限 $\epsilon \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ 后, 就有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{-1} \frac{-x}{x^2 + a^2} \ln \frac{x-1}{x+1} (-dx) + \int_1^0 \frac{-x}{x^2 + a^2} \left(\ln \frac{1-x}{x+1} - i\pi \right) (-dx) \\ & + \int_0^1 \frac{x}{x^2 + a^2} \left(\ln \frac{1+x}{1-x} - i\pi \right) dx + \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} \ln \frac{x+1}{x-1} dx \\ & = -\pi (2 \arctan a - \pi), \end{aligned}$$

整理即得

$$2 \int_0^1 \frac{x}{x^2 + a^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx + 2 \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} \ln \frac{x+1}{x-1} dx = \pi^2 - 2\pi \arctan a,$$

亦即

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| dx = \frac{1}{2} \pi^2 - \pi \arctan a = \pi \arctan \frac{1}{a}. \quad (8.71)$$

讨论

1. 作变换 $x = 1/t$, 就能证明

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + a^2 t^2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| \frac{dx}{t},$$

所以, 由 (8.71) 式还可导出

$$\int_0^1 \frac{a^2 + 2x^2 + a^2 x^4}{(a^2 + x^2)(1 + a^2 x^2)} \ln \frac{1+x}{1-x} \frac{dx}{x} = \pi \arctan \frac{1}{a}. \quad (8.72)$$

2. 在 (8.71) 式中取 $a = 1$, 则有

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| dx = \frac{\pi^2}{4}, \quad (8.73)$$

从而也能进一步推出

$$\int_0^1 \ln \frac{1+x}{1-x} \frac{dx}{x} = \int_1^{\infty} \ln \frac{x+1}{x-1} \frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{4}. \quad (8.74)$$

下面对 $\int_0^{\infty} f(x) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| dx$ 型积分再作一点普遍讨论. 考虑复变积分

$$\oint_C f(z) \ln \frac{z+1}{z-1} dz.$$

只要 $f(z)$ 满足

$$\lim_{z \rightarrow \pm 1} \left\{ (z \pm 1) \cdot f(z) \ln \frac{z+1}{z-1} \right\} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \left\{ z \cdot f(z) \ln \frac{z+1}{z-1} \right\} = 0,$$

并且 $f(z)$ 在上半平面只有有限个奇点, 则重复上面的计算过程, 即可得到

$$\begin{aligned} & \int_1^{\infty} [f(x) - f(-x)] \ln \frac{x-1}{x+1} dx + \int_0^1 [f(x) - f(-x)] \ln \frac{1-x}{x+1} dx \\ & - i\pi \int_0^1 [f(x) + f(-x)] dx = 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} \left\{ f(z) \ln \frac{z+1}{z-1} \right\}. \end{aligned}$$

因此, 如果 $f(x)$ 是奇函数, 即 $f(-x) = -f(x)$, 则可以计算出

$$\int_0^{\infty} f(x) \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx = \pi i \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} \left\{ f(z) \ln \frac{z+1}{z-1} \right\}. \quad (8.75)$$

而如果 $f(x)$ 是偶函数, 即 $f(-x) = f(x)$, 就只能算出

$$\int_0^1 f(x) dx = - \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} \left\{ f(z) \ln \frac{z+1}{z-1} \right\}. \quad (8.76)$$

对于 $\int_0^{\infty} f(x) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| dx$ 型的定积分, 还可以有另一种计算方法. 仍以积分

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+a^2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| dx$$

为例, 还可以考虑复变积分 $\oint_C \frac{z \ln(z-1)}{z^2+a^2} dz$. 这时可以预见到的困难有:

(1) 如何选择积分围道. 因为现在被积函数的枝点为 $z=1$ 与 $z=\infty$, 故应连接此二点作割线. 不妨由 $z=1$ 点向下作割线, 连接到 $z=\infty$ 点. 相应地, 规定在 $z=1$ 点右方的实轴上, $\arg(z-1)=0$. 这时的积分围道见图 8.15.

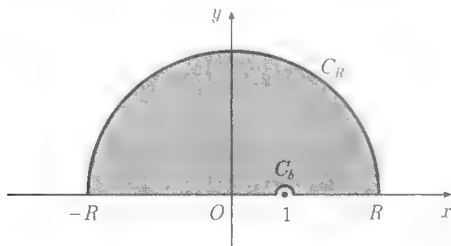


图 8.15 例 8.16 用到的另一种积分围道

(2) 容易证明, 这时对于沿半圆弧 C_δ 的积分, 仍然有

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{z \ln(z-1)}{z^2+a^2} dz = 0,$$

但是由于当 $z \rightarrow \infty$ 时,

$$z \cdot \frac{z \ln(z-1)}{z^2+a^2} \rightarrow \ln(z-1) \rightarrow \infty,$$

我们并不能得到所希望有的

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z \ln(z-1)}{z^2+a^2} dz = 0.$$

因此, 如何克服这一困难, 正是这一计算方案成败的关键所在.

不妨先取定足够大的正数 R , 这时, 在取极限 $\delta \rightarrow 0$ 后, 围道积分中沿实轴的部分就是

$$\begin{aligned} & \int_R^0 \frac{-x}{x^2+a^2} [\ln(x+1) + i\pi] (-dx) \\ & + \int_0^1 \frac{x}{x^2+a^2} [\ln(1-x) + i\pi] dx + \int_1^R \frac{x \ln(x-1)}{x^2+a^2} dx \\ & = \int_0^1 \frac{x}{x^2+a^2} \ln \frac{1-x}{1+x} dx + \int_1^R \frac{x}{x^2+a^2} \ln \frac{x-1}{x+1} dx - i\pi \int_1^R \frac{x}{x^2+a^2} dx \\ & = \int_0^R \frac{x}{x^2+a^2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| dx - i\pi \int_1^R \frac{x}{x^2+a^2} dx \\ & = \int_0^R \frac{x}{x^2+a^2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| dx - \frac{i\pi}{2} [\ln(R^2+a^2) - \ln(1+a^2)]. \end{aligned}$$

在这个结果中, 我们已经分离了实部与虚部, 其中实部的极限值 ($R \rightarrow \infty$) 正是所要求的积分; 而虚部则是“潜在的”发散项 (当 $R \rightarrow \infty$ 时发散). 现在, 对于固定

的 R 值, 继续计算围道积分, 则根据留数定理, 就有

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{x}{x^2+a^2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| dx - \frac{i\pi}{2} \left[\ln(R^2+a^2) - \ln(1+a^2) \right] + \int_{C_R} \frac{z \ln(z-1)}{z^2+a^2} dz \\ = 2\pi i \times \operatorname{res} \left\{ \frac{z \ln(z-1)}{z^2+a^2} \right\}_{z=ia} = \pi \left[-(\pi - \arctan a) + \frac{i}{2} \ln(1+a^2) \right], \end{aligned}$$

即

$$\int_0^R \frac{x}{x^2+a^2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| dx - \frac{i\pi}{2} \ln(R^2+a^2) + \int_{C_R} \frac{z \ln(z-1)}{z^2+a^2} dz = -\pi^2 + \pi \arctan a.$$

将上式两端比较实部, 有

$$\int_0^R \frac{x}{x^2+a^2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| dx + \operatorname{Re} \left\{ \int_{C_R} \frac{z \ln(z-1)}{z^2+a^2} dz \right\} = -\pi^2 + \pi \arctan a.$$

取极限 $R \rightarrow \infty$, 得

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+a^2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| dx = -\pi^2 + \pi \arctan a - \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \operatorname{Re} \int_{C_R} \frac{z \ln(z-1)}{z^2+a^2} dz \right\}.$$

现在就看到了希望所在: 尽管沿 C_R 的积分值在 $R \rightarrow \infty$ 时发散, 但只要它的实部当 $R \rightarrow \infty$ 时极限存在, 并且能够求出这个极限值, 那么我们也就算出了所要求的积分. 事实上, 当 $|z| > \max(1, a)$ 时, 有

$$\begin{aligned} \frac{z}{z^2+a^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{2n} z^{-2n-1} = \frac{1}{z} \left\{ 1 - \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^4}{z^4} - + \cdots \right\}, \\ \ln(z-1) &= \ln z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{-n} = \ln z - \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} - \cdots. \end{aligned}$$

所以

$$\frac{z \ln(z-1)}{z^2+a^2} = \frac{1}{z} \left\{ \ln z + O(z^{-1}) \right\}, \quad |z| > \max(1, a).$$

这样就能得到

$$\begin{aligned} \int_{C_R} \frac{z \ln(z-1)}{z^2+a^2} dz &= \int_{C_R} \left\{ \ln z + O(z^{-1}) \right\} \frac{dz}{z} = \int_{C_R} \frac{\ln z}{z} dz + O(R^{-1}) \\ &= \int_0^\pi (\ln R + i\theta) i d\theta + O(R^{-1}) = i\pi \ln R - \frac{\pi^2}{2} + O(R^{-1}), \end{aligned}$$

亦即

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \operatorname{Re} \int_{C_R} \frac{z \ln(z-1)}{z^2+a^2} dz \right\} = -\frac{\pi^2}{2},$$

最后就求得

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+a^2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| dx = -\frac{\pi^2}{2} + \pi \arctan a = -\pi \arctan \frac{1}{a}.$$

上面这个做法的异常之处在于, 在应用留数定理计算围道积分时, 一部分路径上积分的极限值并不存在 (反常积分并不收敛). 克服这一困难的办法是不要过早地取极限. 在计算过程中, 即使一部分路径的积分值会随 $R \rightarrow \infty$ 而发散, 但只要 R 取固定值, 其计算结果的正确性是毋庸置疑的, 而涉及发散的因子也会彼此相消, 或者说只要先比较实部 (或虚部) 而后再取极限就不会出现任何困难.

 **讨论** 总结上面的计算过程, 我们甚至可以得出更普遍的结论:

1. 只要

(1) 实函数 $f(x)$ 连续;

(2) $f(x)$ 为奇函数, 即 $f(-x) = -f(x)$;

(3) 将 $f(x)$ 解析延拓为 $f(z)$ 后, 在上半平面只有有限个奇点;

(4) 在 $0 \leq \arg z \leq \pi$ 的范围内, 当 $|z| \rightarrow \infty$ 时, 存在实数 c 及正数 λ , 使得

$$f(z) = \frac{c}{z} + O\left(\frac{1}{z^{1+\lambda}}\right) \quad \text{或} \quad f(z) = \frac{c}{z} + o\left(\frac{1}{z \ln z}\right),$$

重复例 8.16 中的计算步骤, 我们就能得到

$$\int_0^{\infty} f(x) \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx = \frac{c}{2} \pi^2 - 2\pi \times \operatorname{Im} \left\{ \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} [f(z) \ln(z-1)] \right\}. \quad (8.77a)$$

2. 在同样的条件下, 当然也可以从围道积分 $\oint_C f(z) \ln(z+1) dz$ 出发 (因此需要对围道 C 作相应调整), 从而得到类似的公式:

$$\int_0^{\infty} f(x) \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| dx = \frac{c}{2} \pi^2 - 2\pi \times \operatorname{Im} \left\{ \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} [f(z) \ln(z+1)] \right\}. \quad (8.77b)$$

3. 重复上面的步骤, 读者可以计算得下列积分:

$$\int_0^{\infty} \frac{x(1-x^2)}{(x^2+a^2)^2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| dx = -\frac{\pi^2}{2} + \pi \arctan a + \frac{\pi}{2a} = \frac{\pi}{2a} - \pi \arctan \frac{1}{a}. \quad (8.78)$$

例 8.17 计算积分 $\int_0^{\infty} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \frac{dx}{x}$.

解 本题和上题不同之处在于 $z=0$ 为奇点, 故当考虑复变积分 $\oint_C \frac{\ln(z-1)}{z} dz$ 时, 积分围道 C (见图 8.16) 需绕过 $z=0$ 点. 仍规定在实轴上

$$\arg(z-1) = \begin{cases} 0, & \operatorname{Re} z > 1, \operatorname{Im} z = 0; \\ \pi, & \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z = 0, \end{cases}$$

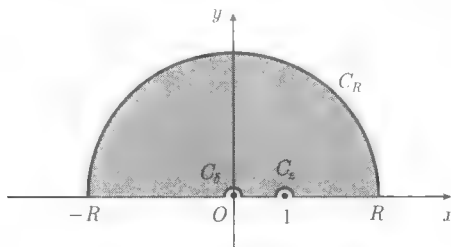


图 8.16 例 8.17 用到的积分围道

于是, 由留数定理, 有

$$\begin{aligned} & \int_R^\delta \frac{\ln(1+x) + i\pi}{x} dx + \int_{C_\delta} \frac{\ln(z-1)}{z} dz + \int_\delta^{1-\varepsilon} \frac{\ln(1-x) + i\pi}{x} dx \\ & + \int_{C_\varepsilon} \frac{\ln(z-1)}{z} dz + \int_{1+\varepsilon}^R \frac{\ln(x-1)}{x} dx + \int_{C_R} \frac{\ln(z-1)}{z} dz = 0. \end{aligned}$$

因为

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} \frac{\ln(z-1)}{z} dz = \pi^2, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{\ln(z-1)}{z} dz = 0,$$

所以, 取极限 $\delta \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, 即得

$$\int_0^R \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \frac{dx}{x} = \pi^2 - i\pi \ln R + \int_{C_R} \frac{\ln(z-1)}{z} dz.$$

直接计算沿圆弧 C_R 的积分:

$$\begin{aligned} \int_{C_R} \frac{\ln(z-1)}{z} dz &= \int_{C_R} \frac{\ln z}{z} dz + \int_{C_R} \ln \frac{z-1}{z} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2} \ln^2 z \Big|_R^{Re^{i\pi}} - \int_{C_R} \left[\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{4} \frac{1}{z^5} + \cdots \right] dz \\ &= i\pi \ln R - \frac{\pi^2}{2} + O\left(\frac{1}{R}\right). \end{aligned}$$

我们看到, 发散项 $i\pi \ln R$ 正好彼此抵消, 于是, 取极限 $R \rightarrow \infty$, 就得到

$$\int_0^\infty \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{2}. \quad (8.79a)$$

讨论 仍然可以将 (8.79a) 式右端的积分分拆为二, 经过简单的计算, 就能证明

$$\int_0^1 \ln \frac{1+x}{1-x} \frac{dx}{x} = \int_1^\infty \ln \frac{x+1}{x-1} \frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{4}. \quad (8.79b)$$

例 8.16 中也曾得到过这个结果.

例 8.18 计算积分 $\int_0^\infty \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \sin px \, dx$, 其中 $p > 0$.

解 考虑复变积分 $\oint_C e^{ipz} \ln(z-1) \, dz$, 其中积分围道 C 仍如图 8.14 所示. 由留数定理, 有

$$\begin{aligned} & \int_R^0 e^{-ipx} [\ln(x+1) + i\pi] (-dx) + \int_0^{1-\delta} e^{ipx} [\ln(1-x) + i\pi] dx \\ & + \int_{C_\delta} e^{ipz} \ln(z-1) \, dz + \int_{1+\delta}^R e^{ipx} \ln(x-1) \, dx + \int_{C_R} e^{ipz} \ln(z-1) \, dz = 0. \end{aligned}$$

可先取极限 $\delta \rightarrow 0$, 从而有

$$\begin{aligned} & \int_0^R e^{-ipx} \ln(x+1) \, dx + \int_0^R e^{ipx} \ln|x-1| \, dx \\ & + i\pi \int_0^R e^{-ipx} \, dx + i\pi \int_0^1 e^{ipx} \, dx + \int_{C_R} e^{ipz} \ln(z-1) \, dz = 0. \end{aligned} \quad (8.80)$$

直接计算可得

$$\begin{aligned} \int_0^R e^{-ipx} \, dx &= \frac{1 - e^{-ipR}}{ip}, & \int_0^1 e^{ipx} \, dx &= -\frac{1 - e^{ip}}{ip}, \\ \int_{C_R} e^{ipz} \ln(z-1) \, dz &= \frac{1}{ip} e^{ipz} \ln(z-1) \Big|_R^{Re^{i\pi}} - \frac{1}{ip} \int_{C_R} \frac{e^{ipz}}{z-1} \, dz \\ &= \frac{1}{ip} \left\{ e^{-ipR} [\ln(R+1) + i\pi] - e^{ipR} \ln(R-1) \right\} - \frac{1}{ip} \int_{C_R} \frac{e^{ipz}}{z-1} \, dz, \end{aligned}$$

因此即可将 (8.80) 式化为

$$\begin{aligned} & \int_0^R e^{-ipx} \ln(x+1) \, dx + \int_0^R e^{ipx} \ln|x-1| \, dx \\ &= -\frac{\pi}{p} e^{ip} - \frac{1}{ip} [e^{-ipR} \ln(R+1) - e^{ipR} \ln(R-1)] + \frac{1}{ip} \int_{C_R} \frac{e^{ipz}}{z-1} \, dz \\ &= -\frac{\pi}{p} e^{ip} - \frac{1}{p} \left[\sin pR \cdot \ln(R^2-1) + i \cos pr \cdot \ln \frac{R+1}{R-1} \right] + \frac{1}{ip} \int_{C_R} \frac{e^{ipz}}{z-1} \, dz. \end{aligned}$$

注意, 根据 Jordan 引理, 有

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{C_R} \frac{e^{ipz}}{z-1} \, dz = 0.$$

所以, 比较虚部, 而后令 $R \rightarrow \infty$, 即得

$$\int_0^\infty \sin px \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| dx = \frac{\pi}{p} \sin p. \quad (8.81)$$

讨论 也可以采用图 8.14 中的积分围道计算复变积分 $\oint_C e^{ipz} \ln \frac{z+1}{z-1} dz$, 而且可能更简单一些. 但是, 因为 $\ln \frac{z+1}{z-1}$ 是多值函数, 所以不能采用第六章 §6.6 中提出的办法, 直接计算复变积分 $\oint_C \sin pz \ln \frac{z+1}{z-1} dz$.

再讨论当 $f(z)$ 为多值函数时, 由围道积分 $\oint_C f(z) \ln(z-1) dz$ 导出的定积分.

例 8.19 考虑复变积分 $\oint_C \frac{\ln(z-1)}{\sqrt[3]{z(z^2-1)}} dz$. 因为 $z=0$ 及 $z=\pm 1$ 都是枝点, 故应取积分围道 C 如图 8.17 所示. 依惯例, 规定当 z 处于实轴上 $z=1$ 点之右, 例如 $z=2$ 时, 有

$$\arg z|_{z=2} = 0, \quad \arg(z-1)|_{z=2} = 0, \quad \arg(z+1)|_{z=2} = 0.$$

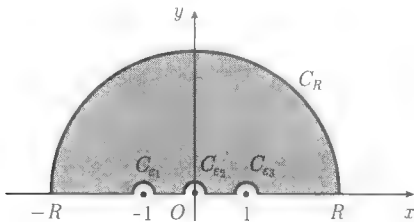


图 8.17 例 8.19 用到的积分围道

相应地, 当 z 处于实轴上不同位置时, 有关宗量应取的辐角值如下:

$$-\infty < \operatorname{Re} z < -1, \operatorname{Im} z = 0: \quad \arg(z+1) = \pi, \quad \arg z = \pi, \quad \arg(z-1) = \pi;$$

$$-1 < \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z = 0: \quad \arg(z+1) = 0, \quad \arg z = \pi, \quad \arg(z-1) = \pi;$$

$$0 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z = 0: \quad \arg(z+1) = 0, \quad \arg z = 0, \quad \arg(z-1) = \pi;$$

$$1 < \operatorname{Re} z < \infty, \operatorname{Im} z = 0: \quad \arg(z+1) = 0, \quad \arg z = 0, \quad \arg(z-1) = 0.$$

由留数定理, 有

$$\int_R^{1+\epsilon_1} \frac{\ln(x+1) + i\pi}{e^{i\pi} \sqrt[3]{x(x^2-1)}} (-dx) + \int_{C_{\epsilon_1}} \frac{\ln(z-1)}{\sqrt[3]{z(z^2-1)}} dz$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{1-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{\ln(1+x)}{e^{i2\pi/3} \sqrt[3]{x(1-x^2)}} (-dx) + \int_{C_{\varepsilon_2}} \frac{\ln(z-1)}{\sqrt[3]{z(z^2-1)}} dz \\
& + \int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_3} \frac{\ln(1-x)}{e^{i\pi/3} \sqrt[3]{x(1-x^2)}} dx + \int_{C_{\varepsilon_3}} \frac{\ln(z-1)}{\sqrt[3]{z(z^2-1)}} dz \\
& + \int_{1+\varepsilon_3}^R \frac{\ln(x-1)}{\sqrt[3]{x(x^2-1)}} dx + \int_{C_R} \frac{\ln(z-1)}{\sqrt[3]{z(z^2-1)}} dz = 0.
\end{aligned}$$

容易证明

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{C_{\varepsilon_1}} \frac{\ln(z-1)}{\sqrt[3]{z(z^2-1)}} dz &= 0, \\
\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{C_{\varepsilon_2}} \frac{\ln(z-1)}{\sqrt[3]{z(z^2-1)}} dz &= 0, \\
\lim_{\varepsilon_3 \rightarrow 0} \int_{C_{\varepsilon_3}} \frac{\ln(z-1)}{\sqrt[3]{z(z^2-1)}} dz &= 0,
\end{aligned}$$

因此, 取极限 $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, $\varepsilon_3 \rightarrow 0$, 并略加化简, 即得

$$\begin{aligned}
& \int_1^R \frac{1}{\sqrt[3]{x(x^2-1)}} \ln \frac{x+1}{x-1} dx + e^{i\pi/3} \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}} dx \\
& + e^{-i\pi/3} \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}} dx + i\pi \int_1^R \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}} \\
& - 2\pi \sin \frac{\pi}{3} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}} - \int_{C_R} \frac{\ln(z-1)}{\sqrt[3]{z(z^2-1)}} dz = 0.
\end{aligned}$$

作变换 $t = x^2$, 就能直接计算得

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}} = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-2/3} (1-t)^{-1/3} dt = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin(\pi/3)}.$$

所以又能将上面的结果写成

$$\begin{aligned}
& \int_1^R \frac{1}{\sqrt[3]{x(x^2-1)}} \ln \frac{x+1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x(x^2-1)}} \ln \frac{1+x}{1-x} dx \\
& + \frac{i\sqrt{3}}{2} \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt[3]{x(x^2-1)}} dx + i\pi \int_1^R \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}} \\
& - \int_{C_R} \frac{\ln(z-1)}{\sqrt[3]{z(z^2-1)}} dz = \pi^2.
\end{aligned}$$

上式左端最后的两个积分在 $R \rightarrow \infty$ 时都是发散的, 所以在取极限 $R \rightarrow \infty$ 之前, 先要准确计算出它们随 R 变化的形式. 对于沿 C_R 的积分, 我们有

$$\int_{C_R} \frac{\ln(z-1)}{\sqrt[3]{z(z^2-1)}} dz = \int_{C_R} \frac{\ln z}{\sqrt[3]{z(z^2-1)}} dz + \int_{C_R} \frac{1}{\sqrt[3]{z(z^2-1)}} \ln \left(1 - \frac{1}{z}\right) dz,$$

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} \frac{\ln z}{\sqrt[3]{z(z^2-1)}} dz &= \int_{C_R} \frac{\ln z}{z} dz + \int_{C_R} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{z(z^2-1)}} - \frac{1}{z} \right] \ln z dz \\
&= \frac{1}{2} \ln^2 z \Big|_R^{Re^{i\pi}} + \int_{C_R} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{z(z^2-1)}} - \frac{1}{z} \right] \ln z dz \\
&= i\pi \ln R - \frac{1}{2} \pi^2 + \int_{C_R} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{z(z^2-1)}} - \frac{1}{z} \right] \ln z dz;
\end{aligned}$$

同时, 对于实轴上 $[1, R]$ 段的发散积分, 可以化成

$$\begin{aligned}
\int_1^R \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}} &= \int_1^R \frac{dx}{x} + \int_1^R \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}} - \frac{1}{x} \right] dx \\
&= \ln R + \int_1^R \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}} - \frac{1}{x} \right] dx \\
&= \ln R + \int_1^R \left[\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-1/3} - 1 \right] \frac{dx}{x} \\
&= \ln R + \frac{1}{2} \int_{1/R^2}^1 \left[(1-t)^{-1/3} - 1 \right] \frac{dt}{t},
\end{aligned}$$

而根据大圆弧引理, 又能判断

$$\begin{aligned}
\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{\sqrt[3]{z(z^2-1)}} \ln \left(1 - \frac{1}{z}\right) dz &= 0, \\
\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{z(z^2-1)}} - \frac{1}{z} \right] \ln z dz &= 0.
\end{aligned}$$

因此, 取极限 $R \rightarrow \infty$, 我们就有

$$\begin{aligned}
&\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x(x^2-1)}} \ln \frac{x+1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x(x^2-1)}} \ln \frac{1+x}{1-x} dx \\
&\quad + \frac{i\sqrt{3}}{2} \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt[3]{x(x^2-1)}} dx + \frac{i\pi}{2} \int_0^1 \left[(1-t)^{-1/3} - 1 \right] \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \pi^2.
\end{aligned}$$

比较实部, 即得

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x(x^2-1)}} \ln \frac{x+1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x(x^2-1)}} \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{1}{2} \pi^2; \quad (8.82)$$

而比较虚部, 则有

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt[3]{x(x^2-1)}} dx = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} \int_0^1 \left[(1-t)^{-1/3} - 1 \right] \frac{dt}{t}.$$

为了要算出后一个积分, 可以作变换 $(1-t)^{1/3} = x$, 于是

$$\int_0^1 \left[(1-t)^{-1/3} - 1 \right] \frac{dt}{t} = 3 \int_0^1 \frac{x}{1+x+x^2} dx = \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

因此

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt[3]{x(x^2-1)}} dx = \frac{1}{6} \pi^2 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \ln 3. \quad (8.83)$$

在这个例子中, 我们通过一个复变函数的围道积分, 计算出两个实的定积分.

下面再介绍一个例子 (尽管并不含多值函数), 同样涉及“辅助线”上积分的极限值不存在, 但只要先不取极限, 这些可能导致发散的因子也都会互相抵消.

例 8.20 证明 Bernoulli 多项式

$$\phi_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \phi_k z^{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \phi_{n-k} z^k \quad (\phi_k \text{ 为 Bernoulli 数})$$

的积分表达式:

$$\begin{aligned} \phi_{2n}(z) &= (-1)^{n+1} (2n) \int_0^\infty \frac{\cos 2\pi z - e^{-2\pi t}}{\cosh 2\pi t - \cos 2\pi z} t^{2n-1} dt, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1, \quad n=1, 2, 3, \dots, \\ \phi_{2n+1}(z) &= (-1)^{n+1} (2n+1) \int_0^\infty \frac{\sin 2\pi z}{\cosh 2\pi t - \cos 2\pi z} t^{2n} dt, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1, \quad n=0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

证 取图 8.18 中的矩形围道, 计算复变积分 $\oint_C \frac{\zeta^m}{e^{2\pi(\zeta-iz)} - 1} d\zeta$. 被积函数在此围道内只有一个奇点 $\zeta = iz$, 留数为 $\frac{1}{2\pi} (iz)^m$. 因此, 按照留数定理, 有

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^R \frac{t^m}{e^{2\pi(t-iz)} - 1} dt + \int_0^1 \frac{(R+is)^m}{e^{2\pi(R+is-iz)} - 1} i ds + \int_R^{-R} \frac{(t+i)^m}{e^{2\pi(t-iz)} - 1} dt \\ & + \int_1^0 \frac{(-R+is)^m}{e^{2\pi(-R+is-iz)} - 1} i ds = 2\pi i \cdot \frac{1}{2\pi} (iz)^m = i^{m+1} z^m. \end{aligned}$$

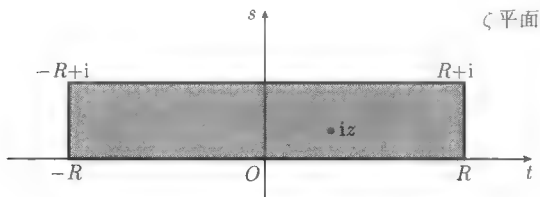


图 8.18 例 8.20 用到的矩形围道

现在计算上式左端的各段积分. 首先, 对于第一段, 实轴上 $(-R, R)$ 段的积分, 有

$$\begin{aligned}
 \int_{-R}^R \frac{t^m}{e^{2\pi(t-iz)} - 1} dt &= \int_0^R \left[\frac{t^m}{e^{2\pi(t-iz)} - 1} + \frac{(-t)^m}{e^{-2\pi(t+iz)} - 1} \right] dt \\
 &= \int_0^R \left[\frac{t^m}{e^{2\pi(t-iz)} - 1} - \frac{(-t)^m e^{2\pi(t+iz)}}{e^{2\pi(t+iz)} - 1} \right] dt \\
 &= \int_0^R \left[\frac{t^m}{e^{2\pi(t-iz)} - 1} - \frac{(-t)^m}{e^{2\pi(t+iz)} - 1} - (-t)^m \right] dt \\
 &= \int_0^R \left[\frac{t^m}{e^{2\pi(t-iz)} - 1} - \frac{(-t)^m}{e^{2\pi(t+iz)} - 1} \right] dt + \frac{(-R)^{m+1}}{m+1}.
 \end{aligned}$$

对于第二段, 正实轴一侧平行于虚轴的线段上的积分, 显然有

$$\int_0^1 \frac{(R+is)^m}{e^{2\pi(R+is-iz)} - 1} i ds \rightarrow 0.$$

同样, 对于第三段, 平行于实轴的线段上的积分, 也有

$$\begin{aligned}
 \int_R^{-R} \frac{(t+i)^m}{e^{2\pi(t-iz)} - 1} dt &= - \int_0^R \left[\frac{(t+i)^m}{e^{2\pi(t-iz)} - 1} + \frac{(-t+i)^m}{e^{-2\pi(t+iz)} - 1} \right] dt \\
 &= - \int_0^R \left[\frac{(t+i)^m}{e^{2\pi(t-iz)} - 1} - \frac{(-t+i)^m}{e^{2\pi(t+iz)} - 1} - (-t+i)^m \right] dt \\
 &= - \int_0^R \left[\frac{(t+i)^m}{e^{2\pi(t-iz)} - 1} - \frac{(-t+i)^m}{e^{2\pi(t+iz)} - 1} \right] dt - \frac{(-R+i)^{m+1} - i^{m+1}}{m+1}.
 \end{aligned}$$

而对于第四段, 负实轴一侧平行于虚轴的线段上的积分, 则可以拆为两项:

$$\begin{aligned}
 &\int_1^0 \frac{(-R+is)^m}{e^{2\pi(-R+is-iz)} - 1} i ds \\
 &\quad - \int_0^1 \frac{(-R+is)^m e^{2\pi(-R+is-iz)}}{e^{2\pi(-R+is-iz)} - 1} i ds + \int_0^1 (-R+is)^m i ds \\
 &= - \int_0^1 \frac{(-R+is)^m e^{2\pi(-R+is-iz)}}{e^{2\pi(-R+is-iz)} - 1} i ds + \frac{(-R+i)^{m+1} - (-R)^{m+1}}{m+1}.
 \end{aligned}$$

综合以上结果, 我们发现, 可能导致发散的几项都正好抵消, 因而就有

$$\begin{aligned}
 &\int_0^R \left[\frac{t^m - (t+i)^m}{e^{2\pi(t-iz)} - 1} - \frac{(-t)^m - (-t+i)^m}{e^{2\pi(t+iz)} - 1} \right] dt + \int_0^1 \frac{(R+is)^m}{e^{2\pi(R+is-iz)} - 1} i ds \\
 &\quad - \int_0^1 \frac{(-R+is)^m e^{2\pi(-R+is-iz)}}{e^{2\pi(-R+is-iz)} - 1} i ds + \frac{i^{m+1}}{m+1} = i^{m+1} z^m.
 \end{aligned}$$

现在因为

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (R+i) \cdot \frac{(R+is)^m}{e^{2\pi(R+is-iz)} - 1} = 0,$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} (-R+i) \cdot \frac{(-R+is)^m e^{2\pi(-R+is-iz)}}{e^{2\pi(-R+is-iz)} - 1} = 0,$$

所以

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{(R+is)^m}{e^{2\pi(R+is-iz)} - 1} i ds = 0,$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{(-R+is)^m e^{2\pi(-R+is-iz)}}{e^{2\pi(-R+is-iz)} - 1} i ds = 0.$$

因此, 取极限 $R \rightarrow \infty$, 就得到

$$\int_0^\infty \left[\frac{t^m - (t+i)^m}{e^{2\pi(t-iz)} - 1} - \frac{(-t)^m - (-t+i)^m}{e^{2\pi(t+iz)} - 1} \right] dt + \frac{i^{m+1}}{m+1} = i^{m+1} z^m,$$

或者消去因子 i^{m+1} , 得

$$i \int_0^\infty \left[\frac{(1-it)^m - (-it)^m}{e^{2\pi(t-iz)} - 1} - \frac{(1+it)^m - (it)^m}{e^{2\pi(t+iz)} - 1} \right] dt + \frac{1}{m+1} = z^m.$$

等式两端同乘以 $\frac{k!}{m!(k-m)!} \phi_{k-m}$, 并对 m 求和, 利用题中给出的 Bernoulli 多项式的展开式, 即得

$$\begin{aligned} \phi_k(z) &= i \int_0^\infty \left[\frac{\phi_k(1-it) - \phi_k(-it)}{e^{2\pi(t-iz)} - 1} - \frac{\phi_k(1+it) - \phi_k(it)}{e^{2\pi(t+iz)} - 1} \right] dt \\ &\quad + \sum_{m=0}^k \frac{k!}{m!(k-m)!} \frac{\phi_{k-m}}{m+1}. \end{aligned}$$

进一步由 Bernoulli 多项式的差分关系^①

$$\phi_k(1 \pm it) - \phi_k(\pm it) = k(\pm it)^{k-1}$$

① 根据 Bernoulli 多项式的生成函数

$$\frac{te^{zt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_n(z)}{n!} t^n,$$

能够得到

$$\frac{te^{(z+1)t}}{e^t - 1} - \frac{te^{zt}}{e^t - 1} = te^{zt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_n(z+1) - \phi_n(z)}{n!} t^n,$$

所以

$$\phi_0(1+z) = \phi_0(z), \quad \phi_k(1+z) - \phi_k(z) = kz^{k-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

以及^①

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^k \frac{k!}{m!(k-m)!} \frac{\phi_{k-m}}{m+1} &= \sum_{m=0}^k \frac{k!}{(m+1)!(k-m)!} \phi_{k-m} \\ &= \sum_{m=0}^k \frac{k!}{m!(k-m+1)!} \phi_m = 0,\end{aligned}$$

就能够导出

$$\begin{aligned}\phi_k(z) &= i \int_0^\infty \left[\frac{k(-it)^{k-1}}{e^{2\pi(t-iz)} - 1} - \frac{k(it)^{k-1}}{e^{2\pi(t+iz)} - 1} \right] dt \\ &= i^k k \int_0^\infty \left[\frac{(-1)^{k-1}}{e^{2\pi(t-iz)} - 1} - \frac{1}{e^{2\pi(t+iz)} - 1} \right] t^{k-1} dt \\ &= i^k k \int_0^\infty \frac{t^{k-1}}{\cosh 2\pi t - \cos 2\pi z} \left[-\frac{(-1)^k e^{2\pi iz} + e^{-2\pi iz}}{2} + \frac{(-1)^k + 1}{2} e^{-2\pi t} \right] dt.\end{aligned}$$

当 k 为偶数 $2n$ 时, 即可证得

$$\phi_{2n}(z) = (-1)^{n+1} (2n) \int_0^\infty \frac{\cos 2\pi z - e^{-2\pi t}}{\cosh 2\pi t - \cos 2\pi z} t^{2n-1} dt; \quad (8.84a)$$

而当 n 为奇数 $2n+1$ 时, 又有

$$\phi_{2n+1}(z) = (-1)^{n+1} (2n+1) \int_0^\infty \frac{\sin 2\pi z}{\cosh 2\pi t - \cos 2\pi z} t^{2n} dt. \quad (8.84b)$$

① 其实这就是 Bernoulli 数的递推关系

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!(n-m)!} \phi_m = 0.$$

第九章 既有积分的进一步演绎

从第六章开始, 我们应用留数定理计算了许多定积分, 其中有些结果, 经过简单的演绎后, 可以导出形式更加复杂的定积分; 而如果要想直接应用留数定理计算, 往往可能会感到相当困难. 下面从几个方面举例说明.

§9.1 既有积分的简单演绎

首先讨论关于 $\int_0^\infty Q(x) \frac{dx}{1+x^2}$ 型的积分. 根据变换 $x = \frac{1}{t}$, 可以证明

$$\int_0^\infty Q(x) \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^\infty Q\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2},$$

因而只要能应用留数定理计算出积分 $\int_0^\infty Q(x) \frac{dx}{1+x^2}$, 我们就不单能推出

$$\int_0^\infty Q\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{以及} \quad \int_0^\infty \left[Q(x) \pm Q\left(\frac{1}{x}\right) \right] \frac{dx}{1+x^2},$$

而且, 根据 $\int_0^\infty P(x) \frac{dx}{1+x^2}$ 和 $\int_0^\infty Q(x) \frac{dx}{1+x^2}$, 还能进一步导出

$$\int_0^\infty \left[P(x) \pm Q\left(\frac{1}{x}\right) \right] \frac{dx}{1+x^2} \equiv \int_0^\infty [P(x) \pm Q(x)] \frac{dx}{1+x^2}.$$

例 9.1 应用留数定理可以直接计算出 (亦见例 7.3 后的讨论)

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \pi e^{-a}, \quad a \geq 0. \quad (9.1a)$$

根据上面的讨论, 就能写出

$$\int_0^\infty \cos \frac{a}{x} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \quad a > 0, \quad (9.1b)$$

而且, 还能进一步导出

$$\int_0^\infty \left(\cos ax \pm \cos \frac{b}{x} \right) \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} (e^{-a} \pm e^{-b}), \quad a > 0, b > 0, \quad (9.2)$$

$$\int_0^\infty \cos\left(ax + \frac{b}{x}\right) \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} (e^{-2a} + e^{-2b}), \quad a > 0, b > 0, \quad (9.3)$$

$$\int_0^\infty \sin\left(ax + \frac{b}{x}\right) \sin\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{\pi}{4} (e^{-2a} - e^{-2b}), \quad a > 0, b > 0. \quad (9.4)$$

又根据例 6.8 的结果

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\cos bx} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi \cosh a}{2 \cosh b}, \quad 0 \leq a < b,$$

也能推出

$$\int_0^\infty \left[\frac{\cos ax}{\cos bx} \pm \frac{\cos(c/x)}{\cos(d/x)} \right] \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\cosh a}{\cosh b} \pm \frac{\cosh c}{\cosh d} \right), \quad 0 \leq a < b, 0 \leq c < d, \quad (9.5)$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{\sin ax}{\sin bx} \pm \frac{\sin(c/x)}{\sin(d/x)} \right] \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sinh a}{\sinh b} \pm \frac{\sinh c}{\sinh d} \right), \quad 0 \leq a < b, 0 \leq c < d \quad (9.6)$$

以及

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left[\frac{\sin(a+2n)x}{\sin x} \pm \frac{\sin(b+2n)/x}{\sin(1/x)} \right] \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{\pi}{2 \sinh 1} \left[(\cosh a \pm \cosh b) - e^{-2n} (e^{-a} \pm e^{-b}) \right], \quad 0 \leq a < 1, 0 \leq b < 1. \end{aligned} \quad (9.7)$$

同样, 由例 8.1 的结果

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2} &= \frac{\pi}{2} e^{-(a+b)}, \quad a > 0, b > 0, \\ \int_0^\infty \sin\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{x dx}{1+x^2} &= \frac{\pi}{2} e^{-(a+b)}, \quad a > 0, b > 0, \end{aligned}$$

就能够导出

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left[\cos\left(2ax - \frac{2b}{x}\right) \pm \cos\left(2cx - \frac{2d}{x}\right) \right] \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \left[e^{-2(a+b)} \pm e^{-2(c+d)} \right], \\ & \int_0^\infty \left[\sin\left(2ax - \frac{2b}{x}\right) \pm \sin\left(2cx - \frac{2d}{x}\right) \right] \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \left[e^{-2(a+b)} \pm e^{-2(c+d)} \right], \end{aligned}$$

成立条件为 $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$. 利用三角函数的和差化积公式, 并且将 $a+c, b+d, a-c, b-d$ 重新写为 a, b, c, d , 则有

$$\int_0^\infty \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \cos\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-(a+b)} \cosh(c+d), \quad (9.8)$$

$$\int_0^\infty \sin\left(ax - \frac{b}{x}\right) \sin\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-(a+b)} \sinh(c+d), \quad (9.9)$$

$$\int_0^\infty \sin\left(ax - \frac{b}{x}\right) \cos\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-(a+b)} \cosh(c+d), \quad (9.10)$$

$$\int_0^\infty \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \sin\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{x dx}{1+x^2} = -\frac{\pi}{2} e^{-(a+b)} \sinh(c+d). \quad (9.11)$$

这些结果在第八章也曾得到过, 见 (8.9) — (8.12) 式.

例 9.2 类似地, 也可以证明

$$\int_0^{\infty} Q(x) \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4} dx = \int_0^{\infty} Q\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4} dx.$$

例如, 由例 6.5 的结果

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{(1+x^2) \cos ax}{1+x^2+x^4} dx &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}a/2} \cos \frac{a}{2}, & a > 0, \\ \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2+x^4} dx &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}a/2} \sin \frac{a}{2}, & a > 0, \end{aligned}$$

在 $a > 0, b > 0$ 的条件下, 也能够推出

$$\int_0^{\infty} \cos \frac{a}{x} \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}a/2} \cos \frac{a}{2}, \quad (9.12)$$

$$\int_0^{\infty} \sin \frac{a}{x} \frac{x}{1+x^2+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}a/2} \sin \frac{a}{2} \quad (9.13)$$

以及

$$\int_0^{\infty} \cos\left(ax + \frac{b}{x}\right) \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{(1+x^2) dx}{1+x^2+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(e^{-\sqrt{3}a} \cos a + e^{-\sqrt{3}b} \cos b \right). \quad (9.14)$$

$$\int_0^{\infty} \sin\left(ax + \frac{b}{x}\right) \sin\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{(1+x^2) dx}{1+x^2+x^4} = -\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(e^{-\sqrt{3}a} \cos a - e^{-\sqrt{3}b} \cos b \right), \quad (9.15)$$

$$\int_0^{\infty} \sin\left(ax + \frac{b}{x}\right) \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{x dx}{1+x^2+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(e^{-\sqrt{3}a} \sin a + e^{-\sqrt{3}b} \sin b \right). \quad (9.16)$$

$$\int_0^{\infty} \cos\left(ax + \frac{b}{x}\right) \sin\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{x dx}{1+x^2+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \left(e^{-\sqrt{3}a} \sin a - e^{-\sqrt{3}b} \sin b \right). \quad (9.17)$$

例 9.3 仿照例 9.1 与例 9.2 的做法, 也可以证明

$$\int_0^{\infty} Q(x) \frac{dx}{1-x^2} = - \int_0^{\infty} Q\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{1-x^2},$$

因而只要能应用留数定理计算出积分 $\int_0^{\infty} Q(x) \frac{dx}{1-x^2}$, 就能导出

$$Q\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{1-x^2} \quad \text{及} \quad \int_0^{\infty} \left[P(x) \pm Q\left(\frac{1}{x}\right) \right] \frac{dx}{1-x^2}.$$

例如, 根据例 6.19 的结果

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} \sin a, \quad a > 0,$$

立即可以推出

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \cos \frac{a}{x} \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{\pi}{2} \sin a, \quad a > 0 \quad (9.18)$$

以及

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \cos\left(ax + \frac{b}{x}\right) \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{4}(\sin 2a - \sin 2b), \quad a > 0, b > 0. \quad (9.19)$$

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \sin\left(ax + \frac{b}{x}\right) \sin\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{\pi}{4}(\sin 2a + \sin 2b), \quad a > 0, b > 0. \quad (9.20)$$

类似地, 由例 8.1 的结果

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \sin(a-b), \quad a > 0, b > 0,$$

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \sin\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{x dx}{1-x^2} = -\frac{\pi}{2} \cos(a-b), \quad a > 0, b > 0,$$

也能导出

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \cos\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \sin(a-b) \cos(c-d), \quad (9.21)$$

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \sin\left(ax - \frac{b}{x}\right) \sin\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{\pi}{2} \cos(a-b) \sin(c-d), \quad (9.22)$$

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \sin\left(ax - \frac{b}{x}\right) \cos\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{x dx}{1-x^2} = -\frac{\pi}{2} \cos(a-b) \cos(c-d), \quad (9.23)$$

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \sin\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{x dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \sin(a-b) \sin(c-d). \quad (9.24)$$

它们的成立条件仍为 $a > 0, b > 0, a > c, b > d$. 这些结果同样也在第八章得到过, 见 (8.13) — (8.16) 式.

例 9.4 在变换 $x = 1/t$ 的变换之下, 同样可以证明

$$\int_0^\infty Q(x) \frac{dx}{x} = \int_0^\infty Q\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t}.$$

因此, 根据积分 $\int_0^\infty Q(x) \frac{dx}{x}$, 就能推出 $\int_0^\infty Q\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x}$ 及 $\int_0^\infty \left[P(x) \pm Q\left(\frac{1}{x}\right)\right] \frac{dx}{x}$. 例如, 根据我们熟悉的积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad a > 0,$$

就能推得

$$\int_0^\infty \sin \frac{a}{x} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad a > 0. \quad (9.25)$$

更进一步, 还能有

$$\int_0^\infty \sin\left(ax + \frac{b}{x}\right) \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad a > 0, b > 0. \quad (9.26)$$

$$\int_0^\infty \cos\left(ax + \frac{b}{x}\right) \sin\left(ax - \frac{b}{x}\right) \frac{dx}{x} = 0, \quad a > 0, b > 0. \quad (9.27)$$

又如, 根据^①

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \ln \frac{b}{a}, \quad a > 0, b > 0,$$

自然就能写出

$$\int_0^{\infty} \left(\cos \frac{a}{x} - \cos \frac{b}{x} \right) \frac{dx}{x} = \ln \frac{b}{a}, \quad a > 0, b > 0 \quad (9.28)$$

以及

$$\int_0^{\infty} \left[\cos \left(ax + \frac{c}{x} \right) \cos \left(ax - \frac{c}{x} \right) - \cos \left(bx + \frac{d}{x} \right) \cos \left(bx - \frac{d}{x} \right) \right] \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln \frac{bd}{ac}, \quad (9.29)$$

$$\int_0^{\infty} \left[\sin \left(ax + \frac{c}{x} \right) \sin \left(ax - \frac{c}{x} \right) - \sin \left(bx + \frac{d}{x} \right) \sin \left(bx - \frac{d}{x} \right) \right] \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln \frac{ad}{bc}. \quad (9.30)$$

后两式的成立条件都是 $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

§9.2 由既有积分构成无穷级数

前面几章计算的积分中, 有些结果相当简单, 特别是在某些积分中, 被积函数含有 (一个或几个) 参数, 而积分值只是参数的简单函数, 甚至 (在一定条件下) 与参数值无关. 因此, 如果限定参数按照某一序列取值, 相应的积分也就构成一个序列, 因而有可能将序列求和 (必要时还需乘上适当的系数), 从而导出新的积分. 请见下面的例子.

例 9.5 首先要提到积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin nax}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad a > 0, n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.31)$$

因此, 如果将此式乘上适当的系数 c_n , 而后求和, 只要能交换求和与积分的次序, 我们就可以导出新的积分. 最简单的例子是取 $c_n = p^n/n!$, 就能得到

$$\int_0^{\infty} e^{p \cos ax} \sin(p \sin ax) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} (e^p - 1). \quad (9.32a)$$

类似地, 还可以取

$$c_{2n} = \frac{(\pm)^n}{(2n)!} p^{2n}, \quad c_{2n+1} = 0 \quad \text{或} \quad c_{2n} = 0, \quad c_{2n+1} = \frac{(\pm)^n}{(2n+1)!} p^{2n+1}.$$

^① 参见: 吴崇试. 数学物理方法. 第 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2003: 122.

从而导出

$$\int_0^{\infty} \sinh(p \cos ax) \sin(p \sin ax) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} (\cosh p - 1), \quad (9.32b)$$

$$\int_0^{\infty} \cosh(p \cos ax) \sin(p \sin ax) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \sinh p, \quad (9.32c)$$

$$\int_0^{\infty} \sin(p \cos ax) \sinh(p \sin ax) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} (1 - \cos p), \quad (9.32d)$$

$$\int_0^{\infty} \cos(p \cos ax) \sinh(p \sin ax) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \sin p. \quad (9.32e)$$

以上 (9.32a)–(9.32e) 式均适用于 $a > 0$ 时, 但 p 不限, 甚至可以为复数. 在得到这些结果时, 用到了下列和式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n!} \sin nx = e^{p \cos x} \sin(p \sin x), \quad (9.33a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{2n}}{(2n)!} \sin 2nx = \sinh(p \cos x) \sin(p \sin x), \quad (9.33b)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(2n+1)x = \cosh(p \cos x) \sin(p \sin x), \quad (9.33c)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} p^{2n} \sin 2nx = -\sin(p \cos x) \sinh(p \sin x), \quad (9.33d)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} p^{2n+1} \sin(2n+1)x = \cos(p \cos x) \sinh(p \sin x). \quad (9.33e)$$

 **讨论** 我们还可以直接计算得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx = \begin{cases} 0, & n = 0, 2, 4, \dots, \\ \pi, & n = 1, 3, 5, \dots, \end{cases} \quad (9.34a)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\tan x} dx = \begin{cases} \pi, & n = 2, 4, 6, \dots, \\ 0, & n = 0 \text{ 或 } n = 1, 3, 5, \dots. \end{cases} \quad (9.34b)$$

重复上面的做法, 则将得到

$$\int_0^{\pi} e^{p \cos x} \sin(p \sin x) \frac{dx}{\sin x} = \pi \sinh p, \quad (9.35a)$$

$$\int_0^{\pi} \cosh(p \cos x) \sin(p \sin x) \frac{dx}{\sin x} = \pi \sinh p, \quad (9.35b)$$

$$\int_0^{\pi} \sinh(p \cos x) \sin(p \sin x) \frac{dx}{\sin x} = 0, \quad (9.35c)$$

$$\int_0^{\pi} \cos(p \cos x) \sinh(p \sin x) \frac{dx}{\sin x} = \pi \sin p, \quad (9.35d)$$

$$\int_0^{\pi} \sin(p \cos x) \sinh(p \sin x) \frac{dx}{\sin x} = 0 \quad (9.35e)$$

以及

$$\int_0^{\pi} e^{p \cos x} \sin(p \sin x) \frac{dx}{\tan x} = \pi(\cosh p - 1), \quad (9.36a)$$

$$\int_0^{\pi} \sinh(p \cos x) \sin(p \sin x) \frac{dx}{\tan x} = \pi(\cosh p - 1), \quad (9.36b)$$

$$\int_0^{\pi} \cosh(p \cos x) \sin(p \sin x) \frac{dx}{\tan x} = 0, \quad (9.36c)$$

$$\int_0^{\pi} \sin(p \cos x) \sinh(p \sin x) \frac{dx}{\tan x} = \pi(1 - \cos p), \quad (9.36d)$$

$$\int_0^{\pi} \cos(p \cos x) \sinh(p \sin x) \frac{dx}{\tan x} = 0. \quad (9.36e)$$

例 9.6 请读者计算 (可参阅例 10.12)

$$\text{v.p.} \int_0^{\pi} \frac{\cos 2nx}{\cos x} dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.37a)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx = (-1)^n \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.37b)$$

利用

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{n!} \cos nx = e^{p \cos x} \cos(p \sin x), \quad (9.38a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{2n}}{(2n)!} \cos 2nx = \cosh(p \cos x) \sin(p \cos x), \quad (9.38b)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(2n+1)x = \sinh(p \cos x) \cos(p \sin x), \quad (9.38c)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} p^{2n} \cos 2nx = \cos(p \cos x) \cosh(p \sin x), \quad (9.38d)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} p^{2n+1} \cos(2n+1)x = \sin(p \cos x) \cosh(p \sin x), \quad (9.38e)$$

于是也可以导出

$$\text{v.p.} \int_0^{\pi} e^{p \cos x} \cos(p \sin x) \frac{dx}{\cos x} = \pi \sin p, \quad (9.39a)$$

$$\int_0^{\pi} \sinh(p \cos x) \cos(p \sin x) \frac{dx}{\cos x} = \pi \sin p, \quad (9.39b)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\pi} \cosh(p \cos x) \cos(p \sin x) \frac{dx}{\cos x} = 0, \quad (9.39c)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\pi} \cos(p \cos x) \cosh(p \sin x) \frac{dx}{\cos x} = 0, \quad (9.39d)$$

$$\int_0^{\pi} \sin(p \cos x) \cosh(p \sin x) \frac{dx}{\cos x} = \pi \sinh p. \quad (9.39e)$$

例 9.7 将 (9.1a) 式改写成

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos nax}{1+x^2} dx = \pi e^{-na}, \quad a \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.40)$$

仿照例 9.5 的做法, 也能得到

$$\int_0^{\infty} e^{p \cos ax} \cos(p \sin ax) \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{p e^{-a}}, \quad (9.41a)$$

$$\int_0^{\infty} \cosh(p \cos ax) \cos(p \sin ax) \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \cosh(p e^{-a}), \quad (9.41b)$$

$$\int_0^{\infty} \sinh(p \cos ax) \cos(p \sin ax) \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \sinh(p e^{-a}), \quad (9.41c)$$

$$\int_0^{\infty} \cos(p \cos ax) \cosh(p \sin ax) \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \cos(p e^{-a}), \quad (9.41d)$$

$$\int_0^{\infty} \sin(p \cos ax) \cosh(p \sin ax) \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \sin(p e^{-a}), \quad (9.41e)$$

成立条件仍然是 $a > 0$. 类似地, 从

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx = \pi e^{-a}, \quad a > 0 \quad (9.42)$$

出发, 又能得到

$$\int_0^{\infty} e^{p \cos ax} \sin(p \sin ax) \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{p e^{-a}}, \quad (9.43a)$$

$$\int_0^{\infty} \sinh(p \cos ax) \sin(p \sin ax) \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} [\cosh(p e^{-a}) - 1], \quad (9.43b)$$

$$\int_0^{\infty} \cosh(p \cos ax) \sin(p \sin ax) \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \sinh(p e^{-a}), \quad (9.43c)$$

$$\int_0^{\infty} \sin(p \cos ax) \sinh(p \sin ax) \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} [1 - \cos(p e^{-a})], \quad (9.43d)$$

$$\int_0^{\infty} \cos(p \cos ax) \sinh(p \sin ax) \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \sin(p e^{-a}). \quad (9.43e)$$

例 9.8 因为

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{1-x^2} dx = -\pi \cos a, \quad a > 0, \quad (9.44a)$$

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-x^2} dx = 0, \quad (9.44b)$$

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1-x^2} dx = \pi \sin a, \quad a > 0, \quad (9.44c)$$

再仿照上一例题的做法, 在 $a > 0$ 的条件下, 也可以得到

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} e^{p \cos ax} \cos(p \sin ax) \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} e^{p \cos a} \sin(p \sin a), \quad (9.45a)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \cosh(p \cos ax) \cos(p \sin ax) \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \sinh(p \cos a) \sin(p \sin a). \quad (9.45b)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \sinh(p \cos ax) \cos(p \sin ax) \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \cosh(p \cos a) \sin(p \sin a). \quad (9.45c)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \cos(p \cos ax) \cosh(p \sin ax) \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{\pi}{2} \sin(p \cos a) \sinh(p \sin a). \quad (9.45d)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \sin(p \cos ax) \cosh(p \sin ax) \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \cos(p \cos a) \sinh(p \sin a); \quad (9.45e)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} e^{p \cos ax} \sin(p \sin ax) \frac{x dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} [1 - e^{p \cos a} \cos(p \sin a)], \quad (9.46a)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \sinh(p \cos ax) \sin(p \sin ax) \frac{x dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} [1 - \cosh(p \cos a) \cos(p \sin a)], \quad (9.46b)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \cosh(p \cos ax) \sin(p \sin ax) \frac{x dx}{1-x^2} = -\frac{\pi}{2} \sinh(p \cos a) \cos(p \sin a), \quad (9.46c)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \sin(p \cos ax) \sinh(p \sin ax) \frac{x dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} [1 - \cos(p \cos a) \cosh(p \sin a)], \quad (9.46d)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \cos(p \cos ax) \sinh(p \sin ax) \frac{x dx}{1-x^2} = -\frac{\pi}{2} \sin(p \cos a) \cosh(p \sin a). \quad (9.46e)$$

例 9.9 如果改变例 9.5 9.8 中的叠加系数 c_n , 而采用下列和式:

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} p^n \cos n\theta = \frac{1-p^2}{1-2p \cos \theta + p^2}, \quad |p| < 1, \quad (9.47a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^n \cos n\theta = \frac{p \cos \theta - p^2}{1-2p \cos \theta + p^2}, \quad |p| < 1, \quad (9.47b)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n} \cos n\theta = -\frac{1}{2} \ln(1-2p \cos \theta + p^2), \quad |p| < 1, \quad (9.47c)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{2n+1}}{2n+1} \cos(2n+1)\theta = \frac{1}{4} \ln \frac{1+2p \cos \theta + p^2}{1-2p \cos \theta + p^2}, \quad |p| < 1, \quad (9.47d)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} p^{2n+1} \cos(2n+1)\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2p \cos \theta}{1-p^2}, \quad |p| < 1, \quad (9.47e)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^n \sin n\theta = \frac{p \sin \theta}{1-2p \cos \theta + p^2}, \quad |p| < 1. \quad (9.48a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n} \sin n\theta = \arctan \frac{p \sin \theta}{1-p \cos \theta}, \quad |p| < 1. \quad (9.48b)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{2n+1}}{2n+1} \sin(2n+1)\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2p \sin \theta}{1-p^2}, \quad |p| < 1, \quad (9.48c)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} p^{2n+1} \sin(2n+1)\theta = \frac{1}{4} \ln \frac{1+2p \sin \theta + p^2}{1-2p \sin \theta + p^2}, \quad |p| < 1, \quad (9.48d)$$

重复例 9.5 9.8 中的计算, 则可得到一系列新的积分. 例如, 由 (9.31) 式可得

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1-2p \cos x + p^2} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1-p}, \quad (9.49a)$$

$$\int_0^{\infty} \arctan \frac{p \sin x}{1-2p \cos x + p^2} \frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2} \ln(1-p), \quad (9.49b)$$

$$\int_0^{\infty} \arctan \frac{2p \sin x}{1-p^2} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} \ln \frac{1+p}{1-p}, \quad (9.49c)$$

$$\int_0^{\infty} \ln \frac{1+2p \sin x + p^2}{1-2p \sin x + p^2} \frac{dx}{x} = 2\pi \arctan p. \quad (9.49d)$$

同样, 由 (9.37) 式则可导出

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1-2p \cos 2x + p^2} = \frac{\pi}{1-p^2}, \quad (9.50a)$$

$$\int_0^{\pi} \ln \frac{1+2p \cos x + p^2}{1-2p \cos x + p^2} \frac{dx}{\cos x} = 4\pi \arctan p, \quad (9.50b)$$

$$\int_0^{\pi} \arctan \frac{2p \cos x}{1-p^2} \frac{dx}{\cos x} = \pi \ln \frac{1+p}{1-p}. \quad (9.50c)$$

类似地, 由积分 (9.40) 与 (9.42) 也可以分别推出

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1-2p \cos ax + p^2} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1-p^2} \frac{1+pe^{-a}}{1-pe^{-a}}, \quad (9.51a)$$

$$\int_0^{\infty} \ln(1-2p \cos ax + p^2) \frac{dx}{1+x^2} = \pi \ln(1-pe^{-a}), \quad (9.51b)$$

$$\int_0^{\infty} \ln \frac{1+2p \cos ax + p^2}{1-2p \cos ax + p^2} \frac{dx}{1+x^2} = \pi \ln \frac{1+pe^{-a}}{1-pe^{-a}}, \quad (9.51c)$$

$$\int_0^{\infty} \arctan \frac{2p \cos ax}{1-p^2} \frac{dx}{1+x^2} = \pi \arctan(pe^{-a}); \quad (9.51d)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{1-2p \cos ax + p^2} \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-a}}{1-pe^{-a}}, \quad (9.52a)$$

$$\int_0^{\infty} \arctan \frac{p \sin ax}{1-p \cos ax} \frac{x dx}{1+x^2} = -\frac{\pi}{2} \ln(1-pe^{-a}), \quad (9.52b)$$

$$\int_0^{\infty} \arctan \frac{2p \sin ax}{1-p^2} \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \ln \frac{1+pe^{-a}}{1-pe^{-a}}, \quad (9.52c)$$

$$\int_0^{\infty} \ln \frac{1+2p \sin ax + p^2}{1-2p \sin ax + p^2} \frac{x dx}{1+x^2} = 2\pi \arctan(pe^{-a}). \quad (9.52d)$$

而由积分 (9.44) 则可导出

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{1}{1-2p \cos ax + p^2} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\pi p}{1-p^2} \frac{\sin a}{1-2p \cos a + p^2}, \quad (9.53a)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \ln(1-2p \cos ax + p^2) \frac{dx}{1-x^2} = -\pi \arctan \frac{p \sin a}{1-p \cos a}, \quad (9.53b)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \ln \frac{1+2p \cos ax + p^2}{1-2p \cos ax + p^2} \frac{dx}{1-x^2} = \pi \arctan \frac{2p \sin a}{1-p^2}, \quad (9.53c)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \arctan \frac{2p \cos ax}{1-p^2} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{4} \ln \frac{1+2p \sin ax + p^2}{1-2p \sin ax + p^2}; \quad (9.53d)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{1-2p \cos ax + p^2} \frac{x dx}{1-x^2} = -\frac{\pi}{2} \frac{\cos a - p}{1-2p \cos a + p^2}, \quad (9.54a)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \arctan \frac{p \sin ax}{1-p \cos ax} \frac{x dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{4} \ln(1-2p \cos a + p^2), \quad (9.54b)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \arctan \frac{2p \sin ax}{1-p^2} \frac{x dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{4} \ln \frac{1+2p \cos a + p^2}{1-2p \cos a + p^2}. \quad (9.54c)$$

$$\text{v.p.} \int_0^{\infty} \ln \frac{1+2p \sin ax + p^2}{1-2p \sin ax + p^2} \frac{x dx}{1-x^2} = \pi \arctan \frac{2p \cos a}{1-p^2}. \quad (9.54d)$$

例 9.10 应用留数定理可以计算出积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4} \cos 2ax dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}a} \cos a, \quad (9.55)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2+x^4} \cos 2ax dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}a} \sin a, \quad (9.56)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2+x^4} \sin 2ax dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}a} \sin a, \quad (9.57)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(1+2x^2)}{1+x^2+x^4} \sin 2ax dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}a} \cos a, \quad (9.58)$$

其中的 (9.55) 与 (9.57) 两式已在第六章中 (例 6.5) 讨论过. 仿照例 9.5 ~ 9.9 中的做法, 也能得到

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1-2p\cos 2ax+p^2} \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{1-p^2} \frac{1-p^2e^{-2\sqrt{3}a}}{1-2pe^{-\sqrt{3}a}\cos a+p^2e^{-2\sqrt{3}a}}, \quad (9.59a)$$

$$\int_0^{\infty} \ln(1-2p\cos 2ax+p^2) \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \ln(1-2pe^{-\sqrt{3}a}\cos a+p^2e^{-2\sqrt{3}a}), \quad (9.59b)$$

$$\int_0^{\infty} \ln \frac{1+2p\cos 2ax+p^2}{1-2p\cos 2ax+p^2} \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \ln \frac{1+2pe^{-\sqrt{3}a}\cos a+p^2e^{-2\sqrt{3}a}}{1-2pe^{-\sqrt{3}a}\cos a+p^2e^{-2\sqrt{3}a}}, \quad (9.59c)$$

$$\int_0^{\infty} \arctan \frac{2p\cos 2ax}{1-p^2} \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2pe^{-\sqrt{3}a}\cos a}{1-p^2e^{-2\sqrt{3}a}}; \quad (9.59d)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1-2p\cos 2ax+p^2} \frac{1-x^2}{1+x^2+x^4} dx = \frac{2\pi}{1-p^2} \frac{pe^{-\sqrt{3}a}\sin a}{1-2pe^{-\sqrt{3}a}\cos a+p^2e^{-2\sqrt{3}a}}, \quad (9.60a)$$

$$\int_0^{\infty} \ln(1-2p\cos 2ax+p^2) \frac{1-x^2}{1+x^2+x^4} dx = -2\pi \arctan \frac{pe^{-\sqrt{3}a}\sin a}{1-pe^{-\sqrt{3}a}\cos a}, \quad (9.60b)$$

$$\int_0^{\infty} \ln \frac{1+2p\cos 2ax+p^2}{1-2p\cos 2ax+p^2} \frac{1-x^2}{1+x^2+x^4} dx = 2\pi \arctan \frac{2pe^{-\sqrt{3}a}\sin a}{1-p^2e^{-2\sqrt{3}a}}. \quad (9.60c)$$

$$\int_0^{\infty} \arctan \frac{2p\cos 2ax}{1-p^2} \frac{1-x^2}{1+x^2+x^4} dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{1+2pe^{-\sqrt{3}a}\sin a+p^2e^{-2\sqrt{3}a}}{1-2pe^{-\sqrt{3}a}\sin a+p^2e^{-2\sqrt{3}a}}. \quad (9.60d)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin 2ax}{1-2p\cos 2ax+p^2} \frac{x dx}{1+x^2+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{e^{-\sqrt{3}a}\sin a}{1-2pe^{-\sqrt{3}a}\cos a+p^2e^{-2\sqrt{3}a}}. \quad (9.61a)$$

$$\int_0^{\infty} \arctan \frac{p\sin 2ax}{1-p\cos 2ax} \frac{x dx}{1+x^2+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \arctan \frac{pe^{-\sqrt{3}a}\sin a}{1-pe^{-\sqrt{3}a}\cos a}. \quad (9.61b)$$

$$\int_0^{\infty} \arctan \frac{2p\sin 2ax}{1-p^2} \frac{x dx}{1+x^2+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2pe^{-\sqrt{3}a}\sin a}{1-p^2e^{-2\sqrt{3}a}}. \quad (9.61c)$$

$$\int_0^{\infty} \ln \frac{1+2p\sin 2ax+p^2}{1-2p\sin 2ax+p^2} \frac{x dx}{1+x^2+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \ln \frac{1+2pe^{-\sqrt{3}a}\sin a+p^2e^{-2\sqrt{3}a}}{1-2pe^{-\sqrt{3}a}\sin a+p^2e^{-2\sqrt{3}a}}, \quad (9.61d)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin 2ax}{1-2p\cos 2ax+p^2} \frac{x(1+2x^2)}{1+x^2+x^4} dx = \pi \frac{e^{-\sqrt{3}a}\cos a-pe^{-2\sqrt{3}a}}{1-2pe^{-\sqrt{3}a}\cos a+p^2e^{-2\sqrt{3}a}}. \quad (9.62a)$$

$$\int_0^{\infty} \arctan \frac{p\sin 2ax}{1-p\cos 2ax} \frac{x(1+2x^2)}{1+x^2+x^4} dx = -\frac{\pi}{2} \ln(1-2pe^{-\sqrt{3}a}\cos a+p^2e^{-2\sqrt{3}a}), \quad (9.62b)$$

$$\int_0^\infty \arctan \frac{2p \sin 2ax}{1-p^2} \frac{x(1+2x^2)}{1+x^2+x^4} dx - \frac{\pi}{2} \ln \frac{1+2pe^{-\sqrt{3}a} \cos a + p^2 e^{-2\sqrt{3}a}}{1-2pe^{-\sqrt{3}a} \cos a + p^2 e^{-2\sqrt{3}a}}, \quad (9.62c)$$

$$\int_0^\infty \ln \frac{1+2p \sin 2ax + p^2}{1-2p \sin 2ax + p^2} \frac{x(1+2x^2)}{1+x^2+x^4} dx = 2\pi \arctan \frac{2pe^{-\sqrt{3}a} \cos a}{1-p^2 e^{-2\sqrt{3}a}}. \quad (9.62d)$$

例 9.11 同样, 由 (8.5) — (8.8) 式出发, 也能得到

$$\int_0^\infty \frac{1}{1-2p \cos(ax-b/x) + p^2} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1-p^2} \frac{1+pe^{-(a+b)}}{1-pe^{-(a-b)}}, \quad (9.63a)$$

$$\int_0^\infty \ln \left[1 - 2p \cos \left(ax - \frac{b}{x} \right) + p^2 \right] \frac{dx}{1+x^2} = \pi \ln \left[1 - pe^{-(a+b)} \right], \quad (9.63b)$$

$$\int_0^\infty \ln \frac{1+2p \cos(ax-b/x) + p^2}{1-2p \cos(ax-b/x) + p^2} \frac{dx}{1+x^2} = \pi \ln \frac{1+pe^{-(a+b)}}{1-pe^{-(a-b)}}. \quad (9.63c)$$

$$\int_0^\infty \arctan \left[\frac{2p}{1-p^2} \cos \left(ax - \frac{b}{x} \right) \right] \frac{dx}{1+x^2} = \pi \arctan \left[pe^{-(a+b)} \right]; \quad (9.63d)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax-b/x)}{1-2p \cos(ax-b/x) + p^2} \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-(a+b)}}{1-pe^{-(a+b)}}, \quad (9.64a)$$

$$\int_0^\infty \arctan \frac{p \sin(ax-b/x)}{1-p \cos(ax-b/x)} \frac{x dx}{1+x^2} = -\frac{\pi}{2} \ln \left[1 - pe^{-(a+b)} \right]. \quad (9.64b)$$

$$\int_0^\infty \arctan \left[\frac{2p}{1-p^2} \sin \left(ax - \frac{b}{x} \right) \right] \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \ln \frac{1+pe^{-(a+b)}}{1-pe^{-(a-b)}}. \quad (9.64c)$$

$$\int_0^\infty \ln \frac{1+2p \sin(ax-b/x) + p^2}{1-2p \sin(ax-b/x) + p^2} \frac{x dx}{1+x^2} = 2\pi \arctan \left[pe^{-(a+b)} \right]; \quad (9.64d)$$

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \frac{1}{1-2p \cos(ax-b/x) + p^2} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{1-p^2} \frac{p \sin(a-b)}{1-2p \cos(a-b) + p^2}, \quad (9.65a)$$

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \ln \left[1 - 2p \cos \left(ax - \frac{b}{x} \right) + p^2 \right] \frac{dx}{1-x^2} = -\pi \arctan \frac{p \sin(a-b)}{1-p \cos(a-b)}, \quad (9.65b)$$

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \ln \frac{1+2p \cos(ax-b/x) + p^2}{1-2p \cos(ax-b/x) + p^2} \frac{dx}{1-x^2} = \pi \arctan \frac{2p \sin(a-b)}{1-p^2}, \quad (9.65c)$$

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \arctan \left[\frac{2p}{1-p^2} \cos \left(ax - \frac{b}{x} \right) \right] \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{4} \ln \frac{1+2p \sin(a-b) + p^2}{1-2p \sin(a-b) + p^2}; \quad (9.65d)$$

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \frac{\sin(ax-b/x)}{1-2p \cos(ax-b/x) + p^2} \frac{x dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\cos(a-b) - p}{1-2p \cos(a-b) + p^2}, \quad (9.66a)$$

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \arctan \frac{p \sin(ax-b/x)}{1-p \cos(ax-b/x)} \frac{x dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{4} \ln(1-2p \cos(a-b) + p^2), \quad (9.66b)$$

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \arctan \left[\frac{2p}{1-p^2} \sin \left(ax - \frac{b}{x} \right) \right] \frac{x dx}{1-x^2} = -\frac{\pi}{4} \ln \frac{1+2p \cos(a-b) + p^2}{1-2p \cos(a-b) + p^2}, \quad (9.66c)$$

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \ln \frac{1+2p \sin(ax-b/x) + p^2}{1-2p \sin(ax-b/x) + p^2} \frac{x dx}{1-x^2} = \pi \arctan \frac{2p \cos(a-b)}{1-p^2}. \quad (9.66d)$$

在 (8.5) 与 (8.6) 两式的基础上, 我们还曾经组合出 (9.8) (9.11) 式. 从这四个积分出发, 又能进一步导出

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\cos(ax-b/x) - p}{1-2p\cos(ax-b/x) + p^2} \cos\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2} \\ = \frac{\pi}{2} \frac{p e^{-(a+b)}}{1-p e^{-(a+b)}} \cosh(c+d), \end{aligned} \quad (9.67a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \ln \left[1 - 2p \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) + p^2 \right] \cos\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2} \\ = \pi \ln \left[1 - p e^{-(a+b)} \right] \cosh(c+d), \end{aligned} \quad (9.67b)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \ln \frac{1 + 2p \cos(ax-b/x) + p^2}{1 - 2p \cos(ax-b/x) + p^2} \cos\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2} \\ = \pi \ln \frac{1 + p e^{-(a+b)}}{1 - p e^{-(a+b)}} \cosh(c+d), \end{aligned} \quad (9.67c)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \arctan \left[\frac{2p}{1-p^2} \cos\left(ax - \frac{b}{x}\right) \right] \cos\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2} \\ = \pi \arctan \left[p e^{-(a+b)} \right] \cosh(c+d); \end{aligned} \quad (9.67d)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin(ax-b/x)}{1-2p\cos(ax-b/x) + p^2} \sin\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2} \\ = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-(a+b)}}{1-p e^{-(a+b)}} \sinh(c+d), \end{aligned} \quad (9.68a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \arctan \frac{p \sin(ax-b/x)}{1-p \cos(ax-b/x)} \sin\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2} \\ = -\frac{\pi}{2} \ln \left[1 - p e^{-(a+b)} \right] \sinh(c+d), \end{aligned} \quad (9.68b)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \arctan \left[\frac{2p}{1-p^2} \sin\left(ax - \frac{b}{x}\right) \right] \sin\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2} \\ = \frac{\pi}{2} \ln \frac{1 + p e^{-(a+b)}}{1 - p e^{-(a+b)}} \sinh(c+d), \end{aligned} \quad (9.68c)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \ln \frac{1 + 2p \sin(ax-b/x) + p^2}{1 - 2p \sin(ax-b/x) + p^2} \sin\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2} \\ = 2\pi \arctan \left[p e^{-(a+b)} \right] \sinh(c+d); \end{aligned} \quad (9.68d)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin(ax-b/x)}{1-2p\cos(ax-b/x) + p^2} \cos\left(cx - \frac{d}{x}\right) \frac{x dx}{1+x^2} \\ = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-(a+b)}}{1-p e^{-(a+b)}} \cosh(c+d), \end{aligned} \quad (9.69a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \arctan \frac{p \sin(ax-b/x)}{1-p \cos(ax-b/x)} \cos\left(cx-\frac{d}{x}\right) \frac{x dx}{1+x^2} \\ = -\frac{\pi}{2} \ln [1-p e^{-(a+b)}] \cosh(c+d), \end{aligned} \quad (9.69b)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \arctan \left[\frac{2p}{1-p^2} \sin\left(ax-\frac{b}{x}\right) \right] \cos\left(cx-\frac{d}{x}\right) \frac{x dx}{1+x^2} \\ = \frac{\pi}{2} \ln \frac{1+p e^{-(a+b)}}{1-p e^{-(a+b)}} \cosh(c+d), \end{aligned} \quad (9.69c)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \ln \frac{1+2p \sin(ax-b/x)+p^2}{1-2p \sin(ax-b/x)+p^2} \cos\left(cx-\frac{d}{x}\right) \frac{x dx}{1+x^2} \\ = 2\pi \arctan [p e^{-(a+b)}] \cosh(c+d); \end{aligned} \quad (9.69d)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\cos(ax-b/x)-p}{1-2p \cos(ax-b/x)+p^2} \sin\left(cx-\frac{d}{x}\right) \frac{x dx}{1+x^2} \\ = -\frac{\pi}{2} \frac{e^{-(a+b)}}{1-p e^{-(a+b)}} \sinh(c+d), \end{aligned} \quad (9.70a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \ln \left[1-2p \cos\left(ax-\frac{b}{x}\right)+p^2 \right] \sin\left(cx-\frac{d}{x}\right) \frac{x dx}{1+x^2} \\ = -\frac{\pi}{2} \ln [1-p e^{-(a+b)}] \sinh(c+d), \end{aligned} \quad (9.70b)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \ln \frac{1+2p \cos(ax-b/x)+p^2}{1-2p \cos(ax-b/x)+p^2} \sin\left(cx-\frac{d}{x}\right) \frac{x dx}{1+x^2} \\ = -\pi \ln \frac{1+p e^{-(a+b)}}{1-p e^{-(a+b)}} \sinh(c+d), \end{aligned} \quad (9.70c)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \arctan \left[\frac{2p}{1-p^2} \cos\left(ax-\frac{b}{x}\right) \right] \sin\left(cx-\frac{d}{x}\right) \frac{x dx}{1+x^2} \\ = -\pi \arctan [p e^{-(a+b)}] \sinh(c+d). \end{aligned} \quad (9.70d)$$

由 (8.7) 与 (8.8) 两式也曾经组合出 (9.21) (9.24) 式, 在此基础上又可导出

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_0^\infty \frac{\cos(ax-b/x)-p}{1-2p \cos(ax-b/x)+p^2} \cos\left(cx-\frac{d}{x}\right) \frac{dx}{1-x^2} \\ = \frac{\pi}{2} \frac{\sin(a-b)}{1-2p \cos(a-b)+p^2} \cos(c-d), \end{aligned} \quad (9.71a)$$

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_0^\infty \ln \left[1-2p \cos\left(ax-\frac{b}{x}\right)+p^2 \right] \cos\left(cx-\frac{d}{x}\right) \frac{dx}{1-x^2} \\ = -\pi \arctan \frac{p \sin(a-b)}{1-p \cos(a-b)} \cos(c-d), \end{aligned} \quad (9.71b)$$

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_0^\infty \ln \frac{1+2p \cos(ax-b/x)+p^2}{1-2p \cos(ax-b/x)+p^2} \cos\left(cx-\frac{d}{x}\right) \frac{dx}{1-x^2} \\ = \pi \arctan \frac{2p \sin(a-b)}{1-p^2} \cos(c-d), \end{aligned} \quad (9.71c)$$

$$\begin{aligned}
 \text{v.p.} \int_0^\infty \arctan \left[\frac{2p}{1-p^2} \cos \left(ax - \frac{b}{x} \right) \right] \cos \left(cx - \frac{d}{x} \right) \frac{dx}{1-x^2} \\
 = \frac{\pi}{4} \ln \frac{1 + 2p \sin(a-b) + p^2}{1 - 2p \sin(a-b) + p^2} \cos(c-d);
 \end{aligned} \tag{9.71d}$$

$$\begin{aligned}
 \text{v.p.} \int_0^\infty \frac{\sin(ax-b/x)}{1-2p \cos(ax-b/x) + p^2} \sin \left(cx - \frac{d}{x} \right) \frac{dx}{1-x^2} \\
 = -\frac{\pi}{2} \frac{\cos(a-b) - p}{1 - 2p \cos(a-b) + p^2} \sin(c-d),
 \end{aligned} \tag{9.72a}$$

$$\begin{aligned}
 \text{v.p.} \int_0^\infty \arctan \frac{p \sin(ax-b/x)}{1-p \cos(ax-b/x)} \sin \left(cx - \frac{d}{x} \right) \frac{dx}{1-x^2} \\
 = \frac{\pi}{4} \ln [1 - 2p \cos(a-b) + p^2] \sin(c-d),
 \end{aligned} \tag{9.72b}$$

$$\begin{aligned}
 \text{v.p.} \int_0^\infty \arctan \left[\frac{2p}{1-p^2} \sin \left(ax - \frac{b}{x} \right) \right] \sin \left(cx - \frac{d}{x} \right) \frac{dx}{1-x^2} \\
 = -\frac{\pi}{4} \ln \frac{1 + 2p \cos(a-b) + p^2}{1 - 2p \cos(a-b) + p^2} \sin(c-d).
 \end{aligned} \tag{9.72c}$$

$$\begin{aligned}
 \text{v.p.} \int_0^\infty \ln \frac{1 + 2p \sin(ax-b/x) + p^2}{1 - 2p \sin(ax-b/x) + p^2} \sin \left(cx - \frac{d}{x} \right) \frac{dx}{1-x^2} \\
 = -\pi \arctan \frac{2p \cos(a-b)}{1-p^2} \sin(c-d);
 \end{aligned} \tag{9.72d}$$

$$\begin{aligned}
 \text{v.p.} \int_0^\infty \frac{\sin(ax-b/x)}{1-2p \cos(ax-b/x) + p^2} \cos \left(cx - \frac{d}{x} \right) \frac{x dx}{1-x^2} \\
 = -\frac{\pi}{2} \frac{\cos(a-b) - p}{1 - 2p \cos(a-b) + p^2} \cos(c-d),
 \end{aligned} \tag{9.73a}$$

$$\begin{aligned}
 \text{v.p.} \int_0^\infty \arctan \frac{p \sin(ax-b/x)}{1-p \cos(ax-b/x)} \cos \left(cx - \frac{d}{x} \right) \frac{x dx}{1-x^2} \\
 = \frac{\pi}{4} \ln(1 - 2p \cos(a-b) + p^2) \cos(c-d),
 \end{aligned} \tag{9.73b}$$

$$\begin{aligned}
 \text{v.p.} \int_0^\infty \arctan \left[\frac{2p}{1-p^2} \sin \left(ax - \frac{b}{x} \right) \right] \cos \left(cx - \frac{d}{x} \right) \frac{x dx}{1-x^2} \\
 = -\frac{\pi}{4} \ln \frac{1 + 2p \cos(a-b) + p^2}{1 - 2p \cos(a-b) + p^2} \cos(c-d),
 \end{aligned} \tag{9.73c}$$

$$\begin{aligned}
 \text{v.p.} \int_0^\infty \ln \frac{1 + 2p \cos(ax-b/x) + p^2}{1 - 2p \cos(ax-b/x) + p^2} \sin \left(cx - \frac{d}{x} \right) \frac{x dx}{1-x^2} \\
 = -\pi \arctan \frac{2p \cos(a-b)}{1-p^2} \cos(c-d);
 \end{aligned} \tag{9.73d}$$

$$\begin{aligned}
 \text{v.p.} \int_0^\infty \frac{\cos(ax-b/x) - p}{1 - 2p \cos(ax-b/x) + p^2} \sin \left(cx - \frac{d}{x} \right) \frac{x dx}{1-x^2} \\
 = \frac{\pi}{2} \frac{\sin(a-b) - p}{1 - 2p \cos(a-b) + p^2} \sin(c-d),
 \end{aligned} \tag{9.74a}$$

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_0^\infty \ln \left[1 - 2p \cos \left(ax - \frac{b}{x} \right) + p^2 \right] \sin \left(cx - \frac{d}{x} \right) \frac{x \, dx}{1-x^2} \\ = -\pi \arctan \frac{p \sin(a-b)}{1-2p \cos(a-b)} \sin(c-d), \end{aligned} \quad (9.74b)$$

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_0^\infty \ln \frac{1 + 2p \cos \left(ax - \frac{b}{x} \right) + p^2}{1 - 2p \cos \left(ax - \frac{b}{x} \right) + p^2} \sin \left(cx - \frac{d}{x} \right) \frac{x \, dx}{1-x^2} \\ = \pi \arctan \frac{2p \sin(a-b)}{1-p^2} \sin(c-d), \end{aligned} \quad (9.74c)$$

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_0^\infty \arctan \left[\frac{2p}{1-p^2} \cos \left(ax - \frac{b}{x} \right) \right] \sin \left(cx - \frac{d}{x} \right) \frac{x \, dx}{1-x^2} \\ = \frac{\pi}{4} \ln \frac{1 + 2p \sin(a-b) + p^2}{1 - 2p \sin(a-b) + p^2} \sin(c-d). \end{aligned} \quad (9.74d)$$

§9.3 再讨论含 $\ln \tan \theta$ 的积分

在第七章的例 7.17 中, 我们计算了四个积分, 它们是

$$\int_0^\pi \cos(2n+1)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} \, d\theta = -\frac{\pi}{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.75)$$

$$\int_0^\pi \sin(2n+1)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} \, d\theta = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.76)$$

$$\int_0^\pi \cos 2n\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} \, d\theta = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.77)$$

$$\int_0^\pi \sin 2n\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} \, d\theta = -\frac{1}{n} \left[\psi \left(n + \frac{1}{2} \right) - \psi \left(\frac{1}{2} \right) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.78)$$

将这些积分式两端同乘 (除) 以适当的因子, 而后求和[†], 也可以衍生出一系列新的积分.

例 9.12 将 (9.75) 式两端同除以 $2n+1$, 并求和:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} \ln \tan \frac{\theta}{2} \, d\theta = -\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

[†] 这里存在求和与积分交换次序的合法性问题, 或者直接说, 导出的积分的正确性问题. 对于前一个问题, 因为涉及的级数都是在单位圆内收敛的, 所以, 正确的做法是: 先在单位圆内交换求和与积分的次序 (这是合法的), 而后再由单位圆内逼近圆周, 其正确性可以有 Abel 第二定理保证. 对于后一个问题, 事实上, 对于下面导出的积分, 都可以直接计算而得到, 因此, 其正确性也毋庸置疑.

将上式左端的求和与积分交换次序, 同时利用^①

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \cot \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2} \ln \tan \frac{\theta}{2} \quad (9.79)$$

以及^②

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad (9.80)$$

就得到

$$\int_0^{\pi} \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi^3}{4}. \quad (9.81)$$

将 (9.75) 式两端同除以 $2n+2$, 并求和, 亦可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+2} \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta &= -\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \\ &= -\pi \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right) = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = -\pi \ln 2. \end{aligned} \quad (9.82a)$$

另一方面, 我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+2} = -\frac{1}{2} \left[\cos \theta \ln(2 \sin \theta) + \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \sin \theta \right], \quad (9.82b)$$

所以就得到

$$\int_0^{\pi} \left\{ \cos \theta \ln(2 \sin \theta) + \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \sin \theta \right\} \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = 2\pi \ln 2.$$

利用 (7.58a) 及 (7.58b) 两式的结果, 可得

$$\int_0^{\pi} \cos \theta \left[\ln^2 \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) - \ln^2 \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right) \right] d\theta - \int_0^{\pi} \cos \theta \ln(2 \sin \theta) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \pi, \quad (9.83a)$$

同时考虑到 (9.76) 式, 又有

$$\int_0^{\pi} \theta \sin \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\pi + 2\pi \ln 2. \quad (9.83b)$$

类似地, 如果将 (9.75) 式两端同除以 $2n+3$, 并求和, 利用

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+3} = -\frac{1}{2} \cos 2\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \sin 2\theta - \cos \theta, \quad (9.84a)$$

① 例 9.12 — 9.15 中用到的三角级数公式, 均可参见第十一章.

② 参见: 吴崇试. 数学物理方法. 第 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2003: 96 97, 126 — 127.

也能得到

$$\int_0^{\pi} \left(\cos 2\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \sin 2\theta + 2 \cos \theta \right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \pi.$$

再代入 (9.75) 与 (9.78) 两式的结果 (分别取 $n=0$ 与 $n=1$), 就有

$$\int_0^{\pi} \cos 2\theta \ln^2 \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) d\theta = 2\pi. \quad (9.84b)$$

更一般地, 将 (9.75) 式两端同除以 $2n+2k+2$ ($k=1, 2, 3, \dots$), 并求和, 利用

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+2k+2} &= -\frac{1}{2} \left[\cos(2k+1)\theta \ln(2 \sin \theta) + \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \sin(2k+1)\theta \right] \\ &\quad - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(2n-2k+1)}{2n+2}, \end{aligned} \quad (9.85)$$

亦可得

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi} \left[\cos(2k+1)\theta \ln(2 \sin \theta) + \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \sin(2k+1)\theta \right] \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &\quad + \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(2k-2n-1)\theta}{n+1} \right] \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2k+2)} = \frac{2\pi}{2k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2k+2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2k+1} \left[\psi(k+1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad k=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9.86)$$

注意到

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi} \left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(2k-2n-1)\theta}{n+1} \right] \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= -\pi \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{(n+1)(2k-2n-1)} = -\frac{\pi}{2k+1} \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1/2} \right) \\ &= -\frac{\pi}{2k+1} \left\{ \left[\psi(k+1) - \psi(1) \right] + \left[\psi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

并考虑到 (9.76) 式的结果, 即可求得

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi} \left[\cos(2k+1)\theta \ln(2 \sin \theta) + \theta \sin(2k+1)\theta \right] \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{\pi}{2k+1} \left[2\psi(k+1) + \psi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \psi(1) - 2\psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad k=1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

由 (7.63a) 及 (7.63b) 两式可得

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \cos(2k+1)\theta \ln(2\sin\theta) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\
&= \int_0^\pi \cos(2k+1)\theta \left[\ln^2 \left(2\sin \frac{\theta}{2} \right) - \ln^2 \left(2\cos \frac{\theta}{2} \right) \right] d\theta \\
&= \frac{2\pi}{2k+1} [\psi(2k+1) - \psi(1)] + \frac{\pi}{(2k+1)^2} \quad (9.87a)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2k+1} \left[\psi(k+1) + \psi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{\pi}{(2k+1)^2}, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (9.87b)$$

所以

$$\int_0^\pi \theta \sin(2k+1)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2k+1} \left[\psi(k+1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] - \frac{\pi}{(2k+1)^2}, \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (9.87c)$$

类似地, 因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+2k+1} = -\frac{1}{2} \cos 2k\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \sin 2k\theta - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(2k-2n-1)\theta}{2n+1}. \quad (9.88)$$

因此, 将 (9.75) 式两端同除以 $2n+2k+1$, 而后求和, 亦可得

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \left[\cos 2k\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \sin 2k\theta + 2 \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(2k-2n-1)\theta}{2n+1} \right] \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\
&= 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2k+1)} = \frac{\pi}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2k+1} \right) \\
&= \frac{\pi}{2k} \left[\psi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right]. \quad (9.89)
\end{aligned}$$

容易计算

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(2k-2n-1)\theta}{2n+1} \right] \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\
&- \pi \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{(2n+1)(2k-2n-1)} = -\frac{\pi}{2k} \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2k-2n-1} \right) \\
&= \frac{\pi}{k} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2n+1} = -\frac{\pi}{k} \left[\psi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad (9.90)
\end{aligned}$$

再代入 (9.78) 式的结果, 即得

$$\int_0^\pi \cos 2k\theta \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{k} \left[\psi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (9.91)$$

还可将 (9.75) 式两端同除以 $n+\alpha$ (α 为有理数), 又能得到一系列的结果, 不再赘述.

例 9.13 仿照例 9.12, 可以对 (9.78) 式作类似的处理. 这时需要用到下列三角级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{2n+1} = \frac{1}{2} \sin \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \cos \theta, \quad (9.92a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{2n+2} = \frac{1}{2} \sin 2\theta \ln(2 \sin \theta) - \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \cos 2\theta, \quad (9.92b)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{2n+3} = \frac{1}{2} \sin 3\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \cos 3\theta + \sin 2\theta, \quad (9.92c)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{2n+2k+1} &= \frac{1}{2} \sin(2k+1)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \cos(2k+1)\theta \\ &\quad + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\sin(2k-2n)\theta}{2n+1}, \end{aligned} \quad (9.92d)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{2n+2k+2} &= \frac{1}{2} \sin(2k+2)\theta \ln(2 \sin \theta) - \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \cos(2k+2)\theta \\ &\quad + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\sin(2k-2n)\theta}{2n+2}. \end{aligned} \quad (9.92e)$$

将 (9.78) 式两端除以 $2n+1$, 求和, 立刻得到

$$\int_0^{\pi} \left(\sin \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \theta \right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(2n+1)} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right].$$

利用第十章的 (10.60) 式, 可以求出上式右端的级数和为 $\pi^2/3$. 再将 (9.75) 式的结果 ($n=0$) 代入上式左端, 就求得

$$\int_0^{\pi} \sin \theta \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (9.93)$$

将 (9.78) 式两端除以 $2n+2$, 求和, 并利用 (10.57) 式, 又得到

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi} \left[\sin 2\theta \ln(2 \sin \theta) - \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \cos 2\theta \right] \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] = -2 \left[\psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] = -4 \ln 2. \end{aligned}$$

亦即

$$\int_0^{\pi} \left[\sin 2\theta \ln(2 \sin \theta) - \theta \cos 2\theta \right] \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -4 \ln 2.$$

直接计算可得 (需要用到 (9.78) 式的结果)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \theta \cos 2\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta &= \frac{1}{2} \sin 2\theta \cdot \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin 2\theta \left(\ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{\sin \theta} \right) d\theta \\ &= - \int_0^\pi \sin 2\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta - \int_0^\pi \theta \cdot \cos \theta d\theta = 3, \quad (9.94a)\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^\pi \sin 2\theta \ln(2 \sin \theta) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = 3 - 4 \ln 2. \quad (9.94b)$$

类似地, 将 (9.78) 式两端除以 $2n+3$, 求和, 并引用 (10.61) 式的结果, 又有

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\sin 3\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \cos 3\theta + 2 \sin 2\theta \right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(2n+3)} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] = -\frac{4}{3} - \frac{\pi^2}{9},\end{aligned}$$

代入 (9.75) 与 (9.78) 两式的结果 (均取 $n=1$), 就求得

$$\int_0^\pi \sin 3\theta \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{8}{3} + \frac{\pi^2}{18}. \quad (9.95)$$

更一般地, 将 (9.78) 式两端除以 $2n+2k+1$, 求和, 从而得到

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left[\sin(2k+1)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \cos(2k+1)\theta + 2 \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\sin(2k-2n)\theta}{2n+1} \right] \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(2n+2k+1)} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ = -\frac{2}{2k+1} \left\{ \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\},\end{aligned}$$

这里又一次引用了第十章中的结果 (见 (10.62) 式). 再代入 (9.75) 式的结果以及

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{\sin(2k-2n)\theta}{2n+1} \right] \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta &= - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{(2n+1)(k-n)} \left[\psi\left(k-n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{2k+1} \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{2}{2n+1} + \frac{1}{k-n} \right) \left[\psi\left(k-n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{2k+1} \left\{ \sum_{n=0}^{k-1} \frac{2}{2n+1} \left[\psi\left(k-n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\},\end{aligned}$$

就求得

$$\int_0^{\pi} \sin(2k+1)\theta \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2k+1} \left\{ \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2n+1} \left[\psi\left(k-n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\}. \quad (9.96a)$$

可以证明 (见第十章 (10.52) 式)

$$\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2n+1} \left[\psi\left(k-n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right].$$

因此上述结果又可改写为

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \sin(2k+1)\theta \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2k+1} \left\{ \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^k \frac{4}{n} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9.96b)$$

将 (9.78) 式两端除以 $2n+2k+2$, 求和, 又可得到

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \left\{ \sin(2k+2)\theta \ln(2 \sin \theta) - \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \cos(2k+2)\theta + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\sin(2k-2n)\theta}{n+1} \right\} \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k+n+1} \frac{1}{n} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k+n+1} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{2}{2l+1} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{2l+1} \sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{1}{k+n+1} \frac{1}{n} = - \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{2l+1} \sum_{n=l+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{k+n+1} \right) \\ &= - \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{2l+1} \left(\frac{1}{l+1} + \frac{1}{l+2} + \dots + \frac{1}{l+k+1} \right) \\ &= - \frac{2}{k+1} \sum_{n=0}^k \frac{1}{2n+1} \left[\psi(n+1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (9.97)$$

再代入

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{\sin(2k-2n)\theta}{n+1} \right] \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n+1} \frac{1}{k-n} \left[\psi\left(k-n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= - \sum_{n=1}^k \frac{1}{k-n+1} \frac{1}{n} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= - \frac{1}{k+1} \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k-n+1} \right) \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

以及 (9.77) 式的结果, 可将上述结果化成

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \left\{ \sin(2k+2)\theta \ln(2\sin\theta) - \theta \cos(2k+2)\theta \right\} \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{k-n+1} \right) \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ & \quad - \frac{2}{k+1} \sum_{n=0}^k \frac{1}{2n+1} \left[\psi(n+1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

又因为 (见第 10 章 (10.55) 式)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^k \frac{1}{k-n+1} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \sum_{n=0}^k \frac{2}{2n+1} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) + \psi(n+1) - \psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \end{aligned}$$

所以可以进一步化简为

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi [\sin(2k+2)\theta \ln(2\sin\theta) - \theta \cos(2k+2)\theta] \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{2}{k+1} \sum_{n=0}^k \frac{1}{2n+1} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi(1) \right]. \end{aligned}$$

此积分中的被积函数有两项, 自然可以将此积分分拆为二. 对于由被积函数第二项构成的积分, 可以分部积分, 得

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \theta \cos(2k+2)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{\sin(2k+2)\theta}{2k+2} \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi - \frac{1}{2k+2} \int_0^\pi \sin(2k+2)\theta \left(\ln \tan \frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{\sin\theta} \right) d\theta \\ &= -\frac{1}{2(k+1)^2} \left[\psi\left(k+\frac{3}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] - \frac{1}{2k+2} \int_0^\pi \frac{\sin(2k+2)\theta}{\sin\theta} \theta d\theta. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin(2k+2)\theta}{\sin\theta} \theta d\theta &= 2 \int_0^\pi [\cos(2k+1)\theta + \cos(2k-1)\theta + \cdots + \cos\theta] \theta d\theta \\ &= -4 \left[\frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{(2k-1)^2} + \cdots + \frac{1}{1} \right], \end{aligned}$$

所以就能计算得积分

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi \theta \cos(2k+2)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\
 &= \frac{1}{2(k+1)^2} \left[\psi\left(k+\frac{3}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{2}{k+1} \sum_{n=0}^k \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad k=0, 1, 2, \dots,
 \end{aligned} \tag{9.98a}$$

进而得到

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi \sin(2k+2)\theta \ln(2 \sin \theta) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\
 &= \frac{1}{k+1} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{2}{k+1} \sum_{n=0}^k \frac{1}{2n+1} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi(1) \right] \\
 &+ \frac{1}{2(k+1)^2} \left[\psi\left(k+\frac{3}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{2}{k+1} \sum_{n=0}^k \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad k=1, 2, 3, \dots.
 \end{aligned} \tag{9.98b}$$

除了上面列出的三角级数以外, 还应该补充上

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{2n} = -\frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right), \quad 0 < \theta < \pi. \tag{9.92f}$$

事实上, 将此级数两端同乘以 $\ln \tan(\theta/2)$, 并积分, 也可以得到

$$\int_0^\pi \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right]. \tag{9.99a}$$

但如果要想进一步将右端的级数求和, 却会遇到某些困难. 其实我们也可以直接计算上式左端的积分:

$$\int_0^\pi \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} x \ln \tan x dx.$$

因为

$$L(x) = - \int_0^x \ln \cos x dx, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

$L(x)$ 称为 Lobachevskiy 函数, 所以

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} x \ln \tan x dx &= x \left[L(x) + L\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \left[L(x) + L\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \right] dx \\
 &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \ln 2 - 2 \int_0^{\pi/2} L(x) dx.
 \end{aligned}$$

再利用

$$L(x) = x \ln 2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \sin 2kx,$$

就能计算得

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} L(x) dx &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \ln 2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \int_0^{\pi/2} \sin 2kx dx \\ &= \frac{\pi^2}{8} \ln 2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \ln \tan x dx &= \frac{\pi^2}{4} \ln 2 - 2 \left[\frac{\pi^2}{8} \ln 2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^3} = \frac{7}{8} \zeta(3). \end{aligned} \quad (9.99b)$$

亦即

$$\int_0^{\pi} \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{7}{2} \zeta(3), \quad (9.99c)$$

其中 $\zeta(n)$ 为 Riemann ζ 函数. 这里同时也就给出了和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \frac{7}{2} \zeta(3) \quad (9.99d)$$

或

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \psi\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2} \zeta(3) - (\gamma + 2 \ln 2) \frac{\pi^2}{6}. \quad (9.99e)$$

例 9.14 从 (9.77) 式出发, 也可以导出一系列新的积分. 涉及的三角级数有:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2n+1} = -\frac{1}{2} \left[\cos \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \sin \theta \right], \quad (9.100a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2n+2k+1} &= -\frac{1}{2} \left[\cos(2k+1)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \sin(2k+1)\theta \right] \\ &\quad - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(2k-2n)\theta}{2n+1}, \end{aligned} \quad (9.100b)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2n+2} = -\frac{1}{2} \left[\cos 2\theta \ln(2 \sin \theta) + \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \sin 2\theta \right], \quad (9.100c)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2n+4} = -\frac{1}{2} \left[\cos 4\theta \ln(2 \sin \theta) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \sin 4\theta + \cos 2\theta \right]. \quad (9.100d)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2n+2k+2} &= -\frac{1}{2} \left[\cos(2k+2)\theta \ln(2 \sin \theta) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \sin(2k+2)\theta \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(2k-2n)\theta}{n+1}. \end{aligned} \quad (9.100e)$$

将 (9.100a) 式乘以 $\ln \tan(\theta/2)$, 再积分, 并利用 (9.76) 式的结果, 就能立即得到

$$\int_0^{\pi} \cos \theta \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = 0. \quad (9.101)$$

同样, 由 (9.100b) 式也能得到

$$\int_0^{\pi} \cos(2k+1)\theta \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (9.102)$$

其实, (9.102) 式也可以覆盖 (9.101) 式作为它的特殊情形 ($k = 0$).

根据 (9.100c) 式, 可以导出积分

$$\int_0^{\pi} \left[\cos 2\theta \ln(2 \sin \theta) + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \sin 2\theta \right] \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = 0,$$

考虑到 (9.78) 式的结果 (取 $n = 1$), 就可以化为

$$\int_0^{\pi} [\cos 2\theta \ln(2 \sin \theta) + \theta \sin 2\theta] \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\pi.$$

但因为

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi} \cos 2\theta \ln(2 \sin \theta) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \int_{\pi}^0 \cos 2(\pi - \phi) \ln(2 \sin(\pi - \phi)) \ln \tan \frac{\pi - \phi}{2} (-d\phi) \\ &= -\int_0^{\pi} \cos 2\phi \ln(2 \sin \phi) \ln \tan \frac{\phi}{2} d\phi = 0, \end{aligned} \quad (9.103a)$$

所以

$$\int_0^{\pi} \theta \sin 2\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\pi. \quad (9.103b)$$

由 (9.100d) 式, 则可导出

$$\int_0^{\pi} [\cos 4\theta \ln(2 \sin \theta) + \theta \sin 4\theta] \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{2\pi}{3}.$$

模仿 (9.103a) 式的计算过程, 即可证明

$$\int_0^{\pi} \cos 4\theta \ln(2 \sin \theta) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = 0, \quad (9.104a)$$

所以有

$$\int_0^{\pi} \theta \sin 4\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{2\pi}{3}. \quad (9.104b)$$

更一般地, 由 (9.100e) 式能够得到

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} [\cos(2k+2)\theta \ln(2 \sin \theta) + \theta \sin(2k+2)\theta] \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin(2k+2)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2(k+1)} \left[\psi\left(k+\frac{3}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

进而根据

$$\int_0^{\pi} \cos(2k+2)\theta \ln(2 \sin \theta) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = 0 \quad (9.105a)$$

可导出

$$\int_0^{\pi} \theta \sin(2k+2)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi}{2(k+1)} \left[\psi\left(k+\frac{3}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (9.105b)$$

(9.104) 式是 (9.105) 式的特殊情形. 同样, (9.103) 式也能看成 (9.105) 式的特殊情形 ($k=0$).

还应当补充一个三角级数, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2n} = -\frac{1}{2} \ln(2 \sin \theta), \quad 0 < \theta < \pi. \quad (9.100f)$$

由此式出发, 再次利用 (9.77) 式, 又可导出

$$\int_0^{\pi} \ln(2 \sin \theta) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = 0. \quad (9.106)$$

将 (9.106) 与 (9.81) 两式结合起来, 又有

$$\int_0^{\pi} \ln\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi^3}{8}, \quad (9.107a)$$

$$\int_0^{\pi} \ln\left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi^3}{8}. \quad (9.107b)$$

例 9.15 类似地, 也可以从 (9.76) 式出发, 从而导出

$$\int_0^{\pi} \sin 2k\theta \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (9.108)$$

以及

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} [\sin \theta \ln(2 \sin \theta) - \theta \cos \theta] \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta &= -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi^2}{2}, \\ \int_0^{\pi} [\sin 3\theta \ln(2 \sin \theta) - \theta \cos 3\theta] \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos 3\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi^2}{6}, \\ \int_0^{\pi} [\sin(2k+1)\theta \ln(2 \sin \theta) - \theta \cos(2k+1)\theta] \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos(2k+1)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi^2}{2(2k+1)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

再进一步, 因为

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin(2n+1)\theta \ln(2 \sin \theta) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \int_{\pi}^0 \sin(2n+1)(\pi-\phi) \ln(2 \sin(\pi-\phi)) \ln \tan \frac{\pi-\phi}{2} (-d\phi) \\ &= -\int_0^{\pi} \sin(2n+1)\phi \ln(2 \sin \phi) \ln \tan \frac{\phi}{2} d\phi = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (9.109)$$

所以有

$$\int_0^{\pi} \theta \cos \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi^2}{2}, \quad (9.110)$$

$$\int_0^{\pi} \theta \cos 3\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi^2}{6}, \quad (9.111)$$

$$\int_0^{\pi} \theta \cos(2k+1)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi^2}{2(2k+1)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (9.112)$$

在以上的计算中, 需要用到的三角级数有:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad (9.113a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+3} = \frac{1}{2} \sin 2\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \cos 2\theta + \sin \theta, \quad (9.113b)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+2k+1} = \frac{1}{2} \sin 2k\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \cos 2k\theta + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\sin(2k-2n-1)\theta}{2n+1}. \quad (9.113c)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+2} = \frac{1}{2} \sin \theta \ln(2 \sin \theta) - \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \cos \theta, \quad (9.113d)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+4} = \frac{1}{2} \sin 3\theta \ln(2 \sin \theta) - \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \cos 3\theta + \frac{1}{2} \sin \theta. \quad (9.113e)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+2k+2} &= \frac{1}{2} \sin(2k+1)\theta \ln(2 \sin \theta) - \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \cos(2k+1)\theta \\ &\quad + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\sin(2k-2n-1)\theta}{2n+2}. \end{aligned} \quad (9.113f)$$

例 9.16 将例 9.12 - 9.15 中得到的一些结果作简单的组合, 又能衍生出一些新形式的积分式. 例如, 将 (9.83a) 式与 (9.101) 式相加、减, 利用恒等式

$$\ln \tan \frac{\theta}{2} + \ln(2 \sin \theta) = 2 \ln \sin \frac{\theta}{2}, \quad \ln \tan \frac{\theta}{2} - \ln(2 \sin \theta) = -2 \ln \cos \frac{\theta}{2},$$

则可得到

$$\int_0^{\pi} \cos \theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2}, \quad (9.114a)$$

$$\int_0^{\pi} \cos \theta \ln \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2}. \quad (9.114b)$$

将 (9.87a) 式与 (9.102) 式相加、减, 又有

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(2k+1)\theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ = \frac{\pi}{2k+1} \left[\psi(2k+1) - \psi(1) \right] + \frac{\pi}{2(2k+1)^2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (9.115a)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(2k+1)\theta \ln \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ = \frac{\pi}{2k+1} \left[\psi(2k+1) - \psi(1) \right] + \frac{\pi}{2(2k+1)^2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots. \end{aligned} \quad (9.115b)$$

将 (9.84b) 式与 (9.103a) 式相加、减, 则得

$$\int_0^{\pi} \cos 2\theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \pi, \quad (9.116a)$$

$$\int_0^{\pi} \cos 2\theta \ln \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\pi. \quad (9.116b)$$

将 (9.91) 式与 (9.105a) 式相加、减, 又有

$$\int_0^{\pi} \cos 2k\theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2k} \left[\psi \left(k + \frac{1}{2} \right) - \psi \left(\frac{1}{2} \right) \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (9.117a)$$

$$\int_0^\pi \cos 2k\theta \ln \left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi}{2k} \left[\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (9.117b)$$

同样, 将 (9.93) 式、(9.95) 式或 (9.96) 式与 (9.109) 式组合, 就能得到

$$\int_0^\pi \sin \theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi^2}{12}, \quad (9.118a)$$

$$\int_0^\pi \sin \theta \ln \left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi^2}{12}; \quad (9.118b)$$

$$\int_0^\pi \sin 3\theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi^2}{36} + \frac{4}{3}, \quad (9.119a)$$

$$\int_0^\pi \sin 3\theta \ln \left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi^2}{36} - \frac{4}{3}; \quad (9.119b)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sin(2k+1)\theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2k+1} \left\{ \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{2}{2n+1} \left[\psi\left(k-n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (9.120a)$$

$$= \frac{1}{2k+1} \left\{ \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^k \frac{2}{n} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (9.120b)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sin(2k+1)\theta \ln \left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= -\frac{1}{2k+1} \left\{ \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{2}{2n+1} \left[\psi\left(k-n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (9.120c)$$

$$= -\frac{1}{2k+1} \left\{ \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^k \frac{2}{n} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (9.120d)$$

将 (9.94b) 式或 (9.98b) 式与 (9.108) 式相加、减 (并且将公式中的 $k+1$ 改写为 k , $k = 2, 3, 4, \dots$), 则将得到

$$\int_0^\pi \sin 2\theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{3}{2} - 2 \ln 2, \quad (9.121a)$$

$$\int_0^\pi \sin 2\theta \ln \left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{3}{2} - 2 \ln 2 \quad (9.121b)$$

以及

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sin 2k\theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2n+1} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi(1) \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4k^2} \left[\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{(2n-1)^2}, \quad k = 2, 3, 4, \dots, \quad (9.122a)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sin 2k\theta \ln \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2k} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2n+1} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi(1) \right] \\ &+ \frac{1}{4k^2} \left[\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{(2n-1)^2}, \quad k = 2, 3, 4, \dots. \quad (9.122b) \end{aligned}$$

例 9.17 当 $|p| < 1$ 时, 可将 (9.75) 式与 (9.77) 式分别乘以 p^{2n+1} 与 p^{2n} , 而后求和:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\pi p^n \cos n\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{2n+1}}{2n+1}, \\ & \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi p^n \cos n\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

利用 (9.49) 式中给出的和式, 就能得到

$$\int_0^\pi \frac{1 - p \cos \theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2} \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi}{2} \ln \frac{1+p}{1-p}, \quad (9.123a)$$

$$\int_0^\pi \frac{1 - p^2}{1 - 2p \cos \theta + p^2} \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\pi \ln \frac{1+p}{1-p}. \quad (9.124a)$$

而当 $|p| > 1$ 时, 则需要将上面结果中的 p 换成 $1/p$, 因此

$$\int_0^\pi \frac{p^2 - p \cos \theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2} \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi}{2} \ln \frac{p+1}{p-1}, \quad (9.123b)$$

$$\int_0^\pi \frac{p^2 - 1}{1 - 2p \cos \theta + p^2} \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\pi \ln \frac{p+1}{p-1}. \quad (9.124b)$$

两式相减, 还有

$$\int_0^\pi \frac{1 - p \cos \theta}{1 - 2p \cos \theta + p^2} \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2} \ln \frac{p+1}{p-1}. \quad (9.125)$$

这正是例 7.15 中得到的结果.

令 (9.124a) 式中的 $p = e^{-t}$, $t > 0$, 或是令 (9.124b) 式中的 $p = e^t$, $t > 0$, 则又得到

$$\int_0^\pi \frac{\sinh t}{\cosh t - \cos \theta} \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \pi \ln \tanh \frac{t}{2}. \quad (9.126)$$

最后, 也还值得提到, 如果函数 θ 能够在区间 $[0, \pi]$ 上展开为 Fourier 级数:

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta,$$

则根据 (9.75) — (9.78) 式, 就可以得到积分

$$\int_0^{\pi} f(\theta) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{2n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{n} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right]. \quad (9.127)$$

例 9.18 从 (9.112) 式出发, 重复例 9.12 中的计算, 又能导出一系列新的积分. 下面列出部分结果, 计算过程从略:

$$\int_0^{\pi} \theta \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi^4}{8}, \quad (9.128)$$

$$\int_0^{\pi} \theta \cos 2\theta \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \pi^2, \quad (9.129)$$

$$\int_0^{\pi} \theta \cos 2k\theta \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi^2}{2k} \left[\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad k = 2, 3, 4, \dots, \quad (9.130)$$

$$\int_0^{\pi} \theta \cos \theta \ln(2 \sin \theta) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi^2}{2}, \quad (9.131)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \theta \cos(2k+1)\theta \ln(2 \sin \theta) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ = \frac{\pi^2}{2k+1} [\psi(2k+1) - \psi(1)] + \frac{\pi^2}{2(2k+1)^2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9.132)$$

在得到上面的结果时需要用到 (这些积分都可以直接计算):

$$\int_0^{\pi} \theta \ln \sin \theta d\theta = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2, \quad (9.133)$$

$$\int_0^{\pi} \theta^2 \sin \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \pi^2(2 \ln 2 - 1), \quad (9.134)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \theta^2 \sin(2k+1)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ = \frac{\pi^2}{2k+1} \left[\psi(k+1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] - \frac{\pi^2}{(2k+1)^2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9.135)$$

同样, 从 (9.91) 式出发, 重复例 9.14 中的计算, 能得到

$$\int_0^{\pi} \cos \theta \ln^3 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{3}{4} \pi^3, \quad (9.136)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(2k+1)\theta \ln^3 \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ = -\frac{3}{2k+1} \left\{ \frac{\pi^3}{4} + 2\pi \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9.137)$$

$$\int_0^{\pi} \ln(2 \sin \theta) \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{7\pi}{2} \zeta(3), \quad (9.138)$$

$$\int_0^{\pi} \cos 2\theta \ln(2 \sin \theta) \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi^3}{8} - 3\pi, \quad (9.139)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \cos 2k\theta \ln(2 \sin \theta) \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= -\frac{\pi^3}{8k} - \frac{2\pi}{k} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{\pi}{2k^2} \left[\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ & \quad - \frac{4\pi}{k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2n+1} [\psi(2n+1) - \psi(1)] \\ & \quad - \frac{\pi}{k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad k = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (9.140)$$

在得到以上结果时, 需要用到

$$\int_0^{\pi} \theta \sin 2\theta \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi^3}{8} + 3\pi - 4\pi \ln 2, \quad (9.141)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \theta \sin 2k\theta \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= -\frac{\pi^3}{8k} + \frac{\pi}{2k^2} \left[\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{2\pi}{k} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{(2n+1)^2} \\ & \quad - \frac{2\pi}{k} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2n+1} \left[\psi(n+1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9.142)$$

类似地, 根据 (9.102) 和 (9.108) 两式可以推出

$$\int_0^{\pi} \sin(2k+1)\theta \ln^3 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = 0, \quad (9.143)$$

$$\int_0^{\pi} \cos 2k\theta \ln^3 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = 0, \quad (9.144)$$

$$\int_0^{\pi} \theta \sin \theta \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi^3}{12}, \quad (9.145)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \theta \sin(2k+1)\theta \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{\pi}{2k+1} \left\{ \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^k \frac{2}{k} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9.146)$$

$$\int_0^{\pi} \theta \cos 2\theta \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \pi^2, \quad (9.147)$$

$$\int_0^{\pi} \theta \cos 2k\theta \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\pi^2}{2k} \left[\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (9.148)$$

在得到这些结果时, 用到了

$$\int_0^{\pi} \sin 2k\theta \ln(2 \sin \theta) \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = 0, \quad (9.149)$$

$$\int_0^{\pi} \cos(2k+1)\theta \ln(2 \sin \theta) \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = 0. \quad (9.150)$$

它们都可以直接由三角函数的诱导公式导出.

由 (9.105a) 式也能导出

$$\int_0^{\pi} \theta \sin 2\theta \ln(2 \sin \theta) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{3\pi}{2} - 2\pi \ln 2, \quad (9.151)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \theta \sin 2k\theta \ln(2 \sin \theta) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{\pi}{2k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{\pi}{k} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2n+1} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi(1) \right] \\ &+ \frac{\pi}{4k^2} \left[\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{\pi}{k} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{(2n-1)^2}, \quad k = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (9.152)$$

另外, 对于 (9.96) 式, 两端除以 $2k+3$, 并求和, 就可得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\sin 2\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \cos 2\theta + 2 \sin \theta \right) \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+3} \frac{1}{2k+1} \left\{ \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^k \frac{4}{n} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+3} \frac{1}{2k+1} \frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+3} \frac{1}{2k+1} \sum_{n=1}^k \frac{4}{n} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2k+3} \frac{1}{2k+1} \\ &= \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \frac{1}{2n+1} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{3} = \frac{5\pi^2}{12}, \end{aligned}$$

再代入 (9.84b) 与 (9.93) 两式的结果, 即能求得

$$\int_0^{\pi} \sin 2\theta \ln^3 \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{\pi^2}{2}. \quad (9.153)$$

如果将 (9.96b) 式两端同除以 $2k+1$ 或 $2k+2n+1$, 则计算要比预想的复杂 (见例 9.19).

值得指出, 对于本例题中得到的结果, 例如 (9.130), (9.132), (9.135) 等式, 还可以继续重复上述计算, 又可以得到一些新的结果, 不再赘述.

例 9.19 回顾一下例 9.4 9.14 以及例 9.18 (其实也包括例 9.17) 的做法, 其基本精神是从某一已知积分 (含有自然数 k 作为参数, 因而实际上是无穷多个积分) 出发, 乘 (除) 以适当因子, 而后求和, 于是变换为另一积分式, 如果作为积分值的无穷级数能够求和, 就求出了这个新积分的值. 但在实际计算中也不乏这样的例子, 就是得到的级数难以求和, 然而导出的积分却可以用其他方法计算出, 或者根本就是已知的积分, 这时我们倒可以反过来用这样的办法求出级数的和. 例如, 将 (9.96b) 式两端同除以 $2k+1$, 再对 k 求和, 就得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \int_0^{\pi} \sin(2k+1)\theta \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{\pi^2}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sum_{n=1}^k \frac{4}{n} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{\pi^4}{48} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sum_{n=1}^k \frac{4}{n} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \end{aligned}$$

而积分 $\int_0^{\pi} \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta$ 的值已在 (9.81) 式中给出, 因此, 我们就能得到

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \frac{\pi^4}{96}. \quad (9.154)$$

同样, 将 (9.87a) 式两端同除以 $2k+1$, 而后对 k 求和, 即得

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \int_0^{\pi} \cos(2k+1)\theta \ln(2 \sin \theta) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi}{(2k+1)^2} \left[\psi(2k+1) - \psi(1) \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi}{(2k+1)^3} \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi}{(2k+1)^2} \left[\psi(2k+1) - \psi(1) \right] + \frac{7\pi}{8} \zeta(3), \end{aligned}$$

另一方面, 将上式左端的积分与求和交换次序, 又能得到

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \int_0^{\pi} \cos(2k+1)\theta \ln(2 \sin \theta) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(2 \sin \theta) \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta.$$

上式右端的积分已在 (9.138) 式中给出, 所以

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi}{(2k+1)^2} \left[\psi(2k+1) - \psi(1) \right] + \frac{7\pi}{8} \zeta(3) = \frac{7\pi}{4} \zeta(3),$$

由此即得

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} [\psi(2k+1) - \psi(1)] = \frac{7}{16} \zeta(3), \quad (9.155a)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \psi(2k+1) = \frac{7}{16} \zeta(3) - \frac{\gamma}{8} \pi^2. \quad (9.155b)$$

如果将 (9.87a) 式两端同除以 $2k+3$, 并对 k 求和, 也可以得到

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+3} \int_0^{\pi} \cos(2k+1)\theta \ln(2 \sin \theta) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+3} \left\{ \frac{2\pi}{2k+1} [\psi(2k+1) - \psi(1)] + \frac{\pi}{(2k+1)^2} \right\} \\ &= 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} [\psi(2k+1) - \psi(1)] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi}{(2k+1)^2(2k+3)}. \end{aligned}$$

一方面, 将上式左端的积分与求和交换次序, 并代入 (9.139), (9.94b) 及 (9.83a) 等的结果, 可以得到

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+3} \int_0^{\pi} \cos(2k+1)\theta \ln(2 \sin \theta) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 2\theta \ln(2 \sin \theta) \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta + \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} \sin 2\theta \ln(2 \sin \theta) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &\quad - \int_0^{\pi} \cos \theta \ln(2 \sin \theta) \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{\pi^3}{8} - 3\pi \right) + \frac{\pi}{4} (3 - 4 \ln 2) - \pi = \frac{\pi^3}{16} + \frac{5}{4} \pi - \pi \ln 2; \end{aligned}$$

另一方面, 也能求得右端的第二项为

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi}{(2k+1)^2(2k+3)} = \frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2}{(2k+1)^2} - \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \right] = \frac{\pi^3}{16} - \frac{\pi}{4},$$

所以由此就可以推得和式

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} [\psi(2k+1) - \psi(1)] = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \ln 2, \quad (9.156a)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \psi(2k+1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \gamma. \quad (9.156b)$$

如果将 (9.87c) 式两端同除以 $2k+1$, 并对 k 求和, 则又得到

$$\frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi}{(2k+1)^2} \left[\psi(k+1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi}{(2k+1)^3}.$$

上式右端的积分已在 (9.99c) 式中给出, 因此

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \left[\psi(k+1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \frac{7}{4} \zeta(3). \quad (9.157)$$

或者改写成

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \left[\psi(k+1) - \psi(1) \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \left[\psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \frac{7}{4} \zeta(3),$$

因而有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \left[\psi(k+1) - \psi(1) \right] = \frac{7}{4} \zeta(3) - \frac{\pi^2}{4} \ln 2, \quad (9.158a)$$

进而可以推出

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \psi(k+1) = \frac{7}{4} \zeta(3) - \frac{\gamma + 2 \ln 2}{8} \pi^2. \quad (9.158b)$$

再代入 (9.154) 式, 又有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \left[\psi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] = -\frac{7}{8} \zeta(3) + \frac{\pi^2}{4} \ln 2, \quad (9.159a)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \psi\left(k+\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{8} \zeta(3) - \frac{\gamma}{8} \pi^2. \quad (9.159b)$$

下面的例子涉及更长的计算. 如果将 (9.96b) 式中的 k 改写为 n , 再将等式两端同除以 $2n+2k+1$, 并对 n 求和, 则得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left[\sin 2k\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \cos 2k\theta + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{2}{2n+1} \sin(2k-2n-1)\theta \right] \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+2k+1} \frac{1}{2n+1} \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2k+1} \frac{1}{2n+1} \sum_{m=1}^n \frac{4}{m} \left[\psi\left(m+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{\pi^2}{24k} \left[\psi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2k+1} \frac{1}{2n+1} \sum_{m=1}^n \frac{4}{m} \left[\psi\left(m+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{\pi^2}{24k} \left[\psi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ & \quad + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{m} \left[\psi\left(m+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2n+2k+1} \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi^2}{24k} \left[\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\
&\quad + \frac{2}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2k+1} \right) \\
&= \frac{\pi^2}{24k} \left[\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{2}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{2l+2m+1} \\
&= \frac{\pi^2}{24k} \left[\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{2}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{2m+2l+1} \left[\psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\} \\
&= \frac{\pi^2}{24k} \left[\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{\pi^2}{6k} \left[\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\
&\quad + \frac{2}{k} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{2l+1} \sum_{m=1}^l \frac{1}{m} \left[\psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\
&= \frac{5\pi^2}{24k} \left[\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{2}{k} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{2l+1} \sum_{m=1}^l \frac{1}{m} \left[\psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right].
\end{aligned}$$

其中 $k = 1, 2, 3, \dots$. 在上面的计算过程中用到了第十章的 (10.62) 式. 另一方面, 等式左端的积分可以按照被积函数分拆为三, 它们都可以直接计算得. 对于第一个积分, 分部积分即得

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin 2k\theta \ln^3 \tan \frac{\theta}{2} d\theta &= -\frac{3}{k} \int_0^{\pi} \sin^2 k\theta \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} \frac{d\theta}{\sin \theta} \\
&= -\frac{3}{k} \int_0^{\pi} \left[\sin \theta + \sin 3\theta + \dots + \sin(2k-1)\theta \right] \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\
&= \frac{3}{k} \left\{ \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2n+1} \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2n+1} \sum_{m=1}^n \frac{4}{m} \left[\psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\} \\
&\quad - \frac{\pi^2}{4k} \left[\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] - \frac{3}{k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2n+1} \sum_{m=1}^n \frac{4}{m} \left[\psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right].
\end{aligned}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, \quad (9.160)$$

约定 $k = 1$ 时略去上式右端的第二项有限和; 对于第二个积分, 可由 (9.91) 式检得; 而对于第三个积分, 则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{k-1} \frac{2}{2n+1} \int_0^{\pi} \sin(2k-2n-1)\theta \ln^2 \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{2}{2n+1} \frac{1}{2k-2n-1} \left\{ \frac{\pi^2}{6} + \sum_{m=1}^{k-n-1} \frac{4}{m} \left[\psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi^2}{6k} \left[\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\
&\quad + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{2}{2n+1} \frac{1}{2k-2n-1} \sum_{m=1}^{k-n-1} \frac{4}{m} \left[\psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right].
\end{aligned}$$

综合以上结果, 并略加化简, 就可以得到关系式

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2k-2n-1} \sum_{m=1}^{k-n-1} \frac{1}{m} \left[\psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\
&= \frac{2}{k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2n+1} \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \left[\psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (9.161a)
\end{aligned}$$

如果将左端的和式进一步化简:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{2k-2n-1} \sum_{m=1}^{k-n-1} \frac{1}{m} \left[\psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{2k} \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2k-2n-1} \right) \sum_{m=1}^{k-n-1} \frac{1}{m} \left[\psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{2k} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2n+1} \sum_{m=1}^{k-n-1} \frac{1}{m} \left[\psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2k} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{2l+1} \sum_{m=1}^l \frac{1}{m} \left[\psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right],
\end{aligned}$$

则可以将关系式 (9.160a) 改写为

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2n+1} \sum_{m=1}^{k-n-1} \frac{1}{m} \left[\psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\
&= 3 \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{2l+1} \sum_{m=1}^l \frac{1}{m} \left[\psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (9.161b)
\end{aligned}$$

或者令上式左端的 $k-n=l$, 则

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^k \frac{1}{2l-2k+1} \sum_{m=1}^{l-1} \frac{1}{m} \left[\psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\
&= 3 \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{2l+1} \sum_{m=1}^l \frac{1}{m} \left[\psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (9.161c)
\end{aligned}$$

另一种情形是导出的积分也能用其他方法 (例如直接积分) 求出, 但与级数求和得到的表达式不同, 因而我们也能得到相关级数的关系式. 例如, 如果将 (9.86) 式两端同除以 $2k+2n+1$, 而后求和, 经过化简后则能得到

$$\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2n+1} [\psi(k-n+1) - \psi(1)] = \sum_{n=1}^k \frac{2}{2n+1} [\psi(2n+1) - \psi(1)], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (9.162)$$

在计算中需要用到

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \frac{1}{2k+2n+1} &= \frac{1}{4n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2n}{(2k+1)^2} - \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2n+1} \right) \right] \\ &= \frac{\pi^2}{16n} - \frac{1}{8n^2} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (9.163)$$

用数学归纳法也能直接证明 (9.162) 式 (见第十章的 (10.56) 式).

§9.4 再讨论含 $\ln \sin \theta$ 的积分

现在采用与上一节相同的方法讨论 $\int_0^{\pi} f(\theta) \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta$ 型的积分. 如果作变换 $\theta = 2x$, 这种类型的积分又能改写成 $\int_0^{\pi/2} g(x) \ln(2 \sin x) dx$. 作为讨论的出发点, 有下列积分式:

$$\int_0^{\pi} \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta = 0, \quad (9.164)$$

$$\int_0^{\pi} \cos n\theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta = -\frac{\pi}{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (9.165)$$

$$\int_0^{\pi} \sin 2n\theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta = -\frac{1}{2n} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.166)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin(2n+1)\theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta &= -\frac{1}{2n+1} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] - \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &\quad + \frac{2}{2n+1} \ln 2. \end{aligned} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.167)$$

$$\int_0^{\pi} \ln^2 \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta = \frac{\pi^3}{12}, \quad (9.168)$$

$$\int_0^{\pi} \cos \theta \ln^2 \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta = \frac{\pi}{2}, \quad (9.169)$$

$$\int_0^{\pi} \cos n\theta \ln^2 \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta = \frac{\pi}{n} [\psi(n) - \psi(1)] + \frac{\pi}{2n^2}, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad (9.170)$$

$$\int_0^{\pi} \theta \sin \theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) d\theta = \pi(2 \ln 2 - 1), \quad (9.171)$$

$$\int_0^\pi \theta \sin 2n\theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta = \frac{\pi}{4n} \left\{ \left[\psi(n) - \psi(1) \right] - \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\},$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, \quad (9.172)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \theta \sin(2n+1)\theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2(2n+1)} \left\{ \left[\psi(n+1) - \psi(1) \right] - \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\} \\ &+ \frac{2\pi}{2n+1} \ln 2 - \frac{\pi}{(2n+1)^2}, \end{aligned}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.173)$$

第一个积分见例 7.18, 其余的积分也都可以从第七章中直接查到.

作为第一个例子, 也作为 (9.167) 式的补充, 我们首先将 (9.165) 式两端同除以 $n+1$, 并求和, 再考虑到 (9.164) 式的结果, 就得到

$$\int_0^\pi \left[\cos \theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) + \frac{\theta - \pi}{2} \sin \theta \right] \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}.$$

根据 (9.169) 式, 即得

$$\int_0^\pi (\theta - \pi) \sin \theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta = 0.$$

再利用 (9.172) 式的结果, 就求得

$$\int_0^\pi \sin \theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta = 2 \ln 2 - 1. \quad (9.174)$$

这说明 (9.167) 式也适用于 $n=0$ 的情形.

例 9.20 从上例的有关公式出发, 采用类似于推导 (9.174) 式的方法, 还可得以下结果:

$$\int_0^\pi \sin \theta \ln^2 \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta = 2 \ln^2 2 - 2 \ln 2 + 1, \quad (9.175)$$

$$\int_0^\pi \sin 2\theta \ln^2 \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta = \frac{3}{2} - 2 \ln 2, \quad (9.176)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sin 2n\theta \ln^2 \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta \\ &= \frac{\pi^2}{8n} - \frac{1}{n} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \ln 2 + \frac{1}{4n^2} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ & \quad \frac{1}{4n} \psi'\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} \left[\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ & \quad + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \left[\psi\left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \end{aligned}$$

$$n = 2, 3, 4, \dots, \quad (9.177)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \sin(2n+1)\theta \ln^2 \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \frac{2}{2n+1} \ln^2 2 + \frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{2n+1} \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2(2n+1)} \psi' \left(n + \frac{1}{2}\right) \\
&\quad \frac{2}{2n+1} \left[\psi \left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi \left(\frac{1}{2}\right) \right] \ln 2 + \frac{1}{(2n+1)^2} \left[\psi \left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi(1) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left[\psi \left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi \left(\frac{1}{2}\right) \right] \\
&\quad + \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \left[\psi \left(k + \frac{1}{2}\right) - \psi \left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (9.178)
\end{aligned}$$

$$\int_0^\pi \sin \theta \ln^3 \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta = 2 \ln^3 2 - 3 \ln^2 2 + 3 \ln 2 - \frac{3}{2}, \quad (9.179)$$

$$\int_0^\pi \sin 2\theta \ln^3 \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta = -3 \ln^2 2 + \frac{9}{2} \ln 2 - \frac{21}{8}, \quad (9.180)$$

$$\int_0^\pi \cos \theta \ln^3 \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta = -\frac{\pi^3}{8} - \frac{3}{4}\pi, \quad (9.181)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \cos n\theta \ln^3 \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta \\
&= -\frac{3\pi^3}{8n} - \frac{3\pi}{4n^3} - \frac{3\pi}{2n^2} [\psi(n) - \psi(1)] + \frac{3\pi}{2n} \psi'(n) \\
&\quad - \frac{3\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} [\psi(k) - \psi(1)], \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad (9.182)
\end{aligned}$$

$$\int_0^\pi \sin 2\theta \ln^2 \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) \ln \left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right) d\theta = \frac{\pi^2}{12} - \ln^2 2 + \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{7}{8}, \quad (9.183)$$

$$\int_0^\pi \theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta = \frac{7}{4} \zeta(3), \quad (9.184)$$

$$\int_0^\pi \theta \cos \theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta = 2 - 2 \ln 2 - \frac{\pi^2}{4}, \quad (9.185)$$

$$\int_0^\pi \theta \cos 2\theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta = \frac{3}{2} - \frac{\pi^2}{8}, \quad (9.186)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \theta \cos 2n\theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{4n^2} \left[\psi \left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi \left(\frac{1}{2}\right) \right] - \frac{1}{4n} \psi' \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (9.187)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \theta \cos(2n+1)\theta \ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \frac{2}{(2n+1)^3} - \frac{2}{(2n+1)^2} \ln 2 - \frac{1}{2(2n+1)} \psi'\left(n+\frac{1}{2}\right) \\
&+ \frac{1}{(2n+1)^2} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad n=1, 2, 3, \dots, \quad (9.188)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \theta \ln^2\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \frac{\pi^4}{24} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[\psi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{(2l+1)^2}. \quad (9.189)
\end{aligned}$$

$$\int_0^\pi \theta \cos \theta \ln^2\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta = -\frac{7}{4}\zeta(3) + \frac{\pi^2}{4} - 2\ln^2 2 + 4\ln 2 - 3, \quad (9.190)$$

$$\int_0^\pi \theta \cos 2\theta \ln^2\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta = -\frac{7}{8}\zeta(3) + \frac{5\pi^2}{16} + 3\ln 2 - \frac{7}{2}, \quad (9.191)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \theta \cos 3\theta \ln^2\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\
&= -\frac{7}{12}\zeta(3) + \frac{5\pi^2}{18} - \frac{2}{9}\ln^2 2 + \frac{52}{27}\ln 2 - \frac{86}{27}. \quad (9.192)
\end{aligned}$$

$$\int_0^\pi \theta \sin \theta \ln^2\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta = -\frac{\pi^3}{12} + \frac{3}{2}\pi + 2\pi\ln^2 2 - 2\pi\ln 2, \quad (9.193)$$

$$\int_0^\pi \theta \sin 2\theta \ln^2\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta = -\frac{\pi^3}{24} + \frac{25}{16}\pi - 2\pi\ln 2, \quad (9.194)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi (\theta - \pi) \sin n\theta \ln^2\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) d\theta \\
&= -\frac{\pi^3}{12n} + \frac{\pi}{2n^3} - \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} [\psi(k) - \psi(1)], \quad n=2, 3, 4, \dots, \quad (9.195)
\end{aligned}$$

$$\int_0^\pi \theta \ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) \ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta = -\frac{\pi^4}{48}, \quad (9.196)$$

$$\int_0^\pi \sin \theta \ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) \ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta = -\frac{\pi^2}{12} + 2\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1, \quad (9.197)$$

$$\int_0^\pi \sin 2n\theta \ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) \ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 0, \quad n=1, 2, 3, \dots. \quad (9.198)$$

上面列出的积分中, 有些纯粹是从被积函数形式的完备考虑而列入, 它们或许需要直接计算 (或者化为已有的积分) 而得.

第十章 Γ 函数

§10.1 Γ 函数的幂级数展开

作为后面几个例题的基础, 先讨论 ψ 函数的 Taylor 展开.

例 10.1 求 $\psi(1+z) \equiv \Gamma'(1+z)/\Gamma(1+z)$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 展开.

解 最直接的办法是从 Γ 函数的 Weierstrass 无穷乘积表示

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right], \quad (10.1a)$$

亦即

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right] \quad (10.1b)$$

出发, 两端取对数微商, 即得

$$\begin{aligned} -\frac{\Gamma'(1+z)}{\Gamma(1+z)} &= \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d}{dz} \ln \left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{1}{n} \right] = \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1+z/n} - 1 \right] \\ &= \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z}{n}\right)^k \right] = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \right] z^k. \end{aligned}$$

因为

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \quad \zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}, \quad k=2, 3, \dots, \quad (10.2)$$

所以

$$\psi(1+z) = -\gamma - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \zeta(k+1) z^k, \quad |z| < 1. \quad (10.3)$$

这正是 ψ 函数的 Taylor 展开式. 作为这个展开式的意外收获之一, 我们还得到了 ψ 函数与 ζ 函数之间的一个关系式

$$\zeta(k+1) = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \psi^{(k)}(1), \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (10.4)$$

将 (10.3) 式积分, 又可以得到 $\ln \Gamma(1+z)$ 的 Taylor 展开:

$$\ln \Gamma(1+z) = -\gamma z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k) z^k. \quad (10.5)$$

类似地, 可以求得 $\psi(n+z)$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 展开 (n 为正整数). 因为

$$\frac{1}{\Gamma(n+z)} = (z+n) e^{\gamma(n+z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{n+z}{k}\right) e^{-(n+z)/k} \right\},$$

取对数微商, 得

$$\begin{aligned} -\psi(n+z) &= \frac{1}{n+z} + \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+n+z} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \gamma + \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{z}{n}^l + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k+n} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{z}{k+n} \right)^l - \frac{1}{k} \right] \\ &= \gamma + \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+n} - \frac{1}{k} \right) + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \left[\frac{1}{n^{l+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+n)^{l+1}} \right] z^l \\ &= \gamma + \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+n} - \frac{1}{k} \right) + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+n)^{l+1}} \right] z^l \\ &= -\psi(n) + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \zeta(l+1, n) z^l. \end{aligned} \quad (10.6)$$

因为 $\psi(n+z)$ 的奇点为 $z = -n, -(n+1), \dots$, 所以上述级数的收敛区域应为 $|z| < n$. 在得到以上结果时, 用到了

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+n} - \frac{1}{k} \right) = \psi(1) - \psi(n+1), \quad \psi(n+1) = \frac{1}{n} + \psi(n) \quad (10.7)$$

以及广义 Riemann ζ 函数的定义

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^z} = \zeta(z, a). \quad (10.8)$$

从 (10.8) 式也能得到

$$\zeta(k+1, n) = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \psi^{(k)}(n). \quad (10.9)$$

(10.4) 式其实是它的一个特殊情形 ($n=1$).

将 (10.6) 式积分, 又得到

$$\ln \Gamma(n+z) = \ln(n-1)! + \psi(n)z + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} \zeta(l, n) z^l. \quad (10.10)$$

还能将 (10.6) 式改写成

$$\psi(n-z) = \psi(n) - \sum_{l=1}^{\infty} \zeta(l+1, n) z^l, \quad |z| < n. \quad (10.6')$$

由此又能求出 $\psi(z-n)$ 在 $z=0$ 处的 Laurent 展开. 因为 $z=0$ 是 $\psi(z-n)$ 的一阶极点, 函数在该点的留数为 -1 , 所以

$$\psi(z-n) = -\frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} c_n z^k, \quad |z| < 1. \quad (10.11)$$

事实上, 利用 $\psi(z)$ 的性质^①

$$\psi(z) - \psi(-z) = -\frac{1}{z} - \pi \cot \pi z, \quad (10.12)$$

我们有

$$\begin{aligned} \psi(z-n) &= \psi(n-z) + \frac{1}{n-z} + \pi \cot \pi(n-z) = \psi(n-z) + \frac{1}{n-z} - \pi \cot \pi z \\ &= \psi(n) - \sum_{l=1}^{\infty} \zeta(l+1, n) z^l + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{n^{l+1}} z^l + \frac{2}{z} \sum_{l=0}^{\infty} \zeta(2l) z^{2l} \\ &= -\frac{1}{z} + \psi(n+1) - \sum_{l=1}^{\infty} \zeta(l+1, n+1) z^l + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \zeta(2l) z^{2l-1}. \end{aligned} \quad (10.13)$$

这里用到了 $\pi z \cot \pi z$ 在 $z=0$ 点的 Taylor 展开:

$$\pi z \cot \pi z = -2 \sum_{l=0}^{\infty} \zeta(2l) z^{2l}. \quad (10.14)$$

当 $n=0$ 时, (10.13) 式仍然成立:

$$\psi(z) = \psi(1+z) - \frac{1}{z} = -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \zeta(l+1) z^l. \quad (10.15)$$

例 10.2 求 $\Gamma(1+z)$ 及 $1/\Gamma(1+z)$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 展开.

解 $\Gamma(1+z)$ 的奇点为 $z = -1, -2, -3, \dots$, 故在单位圆 $|z| < 1$ 内可作 Taylor 展开:

$$\Gamma(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Gamma^{(n)}(1) z^n, \quad |z| < 1. \quad (10.16)$$

直接计算可得

$$\Gamma'(z) = \psi(z) \Gamma(z), \quad (10.17a)$$

$$\Gamma''(z) = [\psi(z) \Gamma(z)]' = [\psi'(z) + \psi^2(z)] \Gamma(z), \quad (10.17b)$$

^① 参见: 吴崇试. 数学物理方法. 第 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2003: 104.

$$\Gamma'''(z) = \left\{ [\psi'(z) + \psi^2(z)]\Gamma(z) \right\}' \quad (10.17c)$$

$$= [\psi''(z) + 3\psi'(z)\psi(z) + \psi^3(z)]\Gamma(z), \quad (10.17d)$$

$$\Gamma^{(4)}(z) = \left\{ [\psi''(z) + 3\psi'(z)\psi(z) + \psi^3(z)]\Gamma(z) \right\}' \quad (10.17e)$$

$$= [\psi'''(z) + 4\psi''(z)\psi(z) + 6\psi'(z)\psi^2(z) + 3\psi'^2(z) + \psi^4(z)]\Gamma(z), \quad (10.17f)$$

因此

$$c_0 = \Gamma(1) = 1, \quad (10.18a)$$

$$c_1 = \Gamma'(1) = -\gamma, \quad (10.18b)$$

$$c_2 = \frac{1}{2!}\Gamma''(1) = \frac{1}{2!}[\psi'(1) + \psi^2(1)], \quad (10.18c)$$

$$c_3 = \frac{1}{3!}\Gamma'''(1) = \frac{1}{3!}[\psi''(1) + 3\psi'(1)\psi(1) + \psi^3(1)], \quad (10.18d)$$

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{1}{4!}\Gamma^{(4)}(1) \\ &= \frac{1}{4!}[\psi'''(1) + 4\psi''(1)\psi(1) + 6\psi'(1)\psi^2(1) + 3\psi'^2(1) + \psi^4(1)], \end{aligned} \quad (10.18e)$$

通过这种办法, 原则上可以写出展开系数的普遍公式. 这里将求 $\Gamma^{(n)}(1)$ 的问题转化成求 $\psi(z)$ 及其各阶导数在 $z=1$ 的值, 而后者可以从 (10.3) 式直接微商求得:

$$\psi(1) = -\gamma, \quad \frac{1}{n!}\psi^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}\zeta(n+1), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.19)$$

另一种做法是根据 (10.3) 式寻找系数 c_n 满足的递推关系. 为了书写的方便, 不妨引进记号 s_n ($n = 1, 2, 3, \dots$):

$$s_1 = \gamma, \quad s_{k+1} = \zeta(k+1), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (10.20)$$

于是, 将 (10.3) 式改写成

$$\frac{\Gamma'(1+z)}{\Gamma(1+z)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} s_{k+1} z^k.$$

即

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)z^n &= \sum_{l=0}^{\infty} c_l z^l \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} s_{k+1} z^k = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} s_{k+1} c_l z^{k+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} s_{k+1} c_{n-k} \right] z^n. \end{aligned}$$

比较系数, 就得到递推关系

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} s_{k+1} c_{n-k}. \quad (10.21)$$

只要知道 $c_0 = 1$, 就可以逐次求出全部展开系数. 例如, 前几个 c_n 是

$$c_1 = -s_1 c_0 = -\gamma, \quad (10.22a)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} (-s_2 c_0 + s_1 c_1) = -\frac{1}{2} [\zeta(2) + \gamma^2], \quad (10.22b)$$

$$c_3 = \frac{1}{3} (-s_3 c_0 + s_2 c_1 - s_1 c_2). \quad (10.22c)$$

同样可以求出 $1/\Gamma(1+z)$ 的 Taylor 展开式. 因为

$$\frac{d}{dz} \ln \frac{1}{\Gamma(1+z)} = -\frac{d}{dz} \ln \Gamma(1+z), \quad \text{即} \quad \left[\frac{1}{\Gamma(1+z)} \right]^{-1} \left[\frac{1}{\Gamma(1+z)} \right]' = -\frac{\Gamma'(1+z)}{\Gamma(1+z)},$$

所以, 如果设

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n, \quad d_0 = \frac{1}{\Gamma(1)} = 1, \quad (10.23)$$

则有

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_{n+1} (n+1) z^n = \sum_{l=0}^{\infty} d_l z^l \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k s_{k+1} z^k - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k s_{k+1} d_{n-k} \right] z^n.$$

所以递推关系为

$$d_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k s_{k+1} d_{n-k}. \quad (10.24)$$

例 10.3 求函数 $\Gamma(n+z)$ 在 $z=0$ 处的 Taylor 展开, 其中 n 为正整数.

解 因为

$$\Gamma(n+z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Gamma^{(k)}(n) z^k, \quad |z| < n, \quad (10.25)$$

由 (10.17) 式的结果, 可以求得

$$c_0 = \Gamma(n) = (n-1)!, \quad (10.26a)$$

$$c_1 = \Gamma'(n) = \psi(n) (n-1)!, \quad (10.26b)$$

$$c_2 = \frac{1}{2!} \Gamma''(n) = \frac{(n-1)!}{2!} [\psi'(n) + \psi^2(n)], \quad (10.26c)$$

$$c_3 = \frac{1}{3!} \Gamma'''(n) = \frac{(n-1)!}{3!} [\psi''(n) + 3\psi'(n)\psi(n) + \psi^3(n)], \quad (10.26d)$$

$$\begin{aligned}
 c_4 &= \frac{1}{4!} \Gamma^{(4)}(n) \\
 &= \frac{(n-1)!}{4!} \left[\psi'''(n) + 4\psi''(n)\psi(n) + 6\psi'(n)\psi^2(n) + 3\psi'^2(n) + \psi^4(n) \right], \quad (10.26e)
 \end{aligned}$$

.....

利用 $\psi(z)$ 的递推关系

$$\psi(z+n) = \psi(z) + \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \cdots + \frac{1}{z+n-1}, \quad (10.27)$$

就可以由 $\psi^{(k)}(1)$ 推出 $\psi^{(k)}(n)$:

$$\psi^{(k)}(n) = \psi^{(k)}(1) + (-1)^k k! \left[1 + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^{k+1}} \right]. \quad (10.28)$$

例 10.4 求函数 $\Gamma(z-n)$ 在 $z=0$ 处的 Laurent 展开, 其中 n 为正整数.

解 考虑到 $z=0$ 是 $\Gamma(z-n)$ 的一阶极点, 留数为 $(-1)^n/n!$, 故可设

$$\Gamma(z-n) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k \right), \quad |z| < 1.$$

另一方面, 将 (10.13) 式简写为

$$\psi(z-n) = -\frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k, \quad (10.13')$$

其中

$$\alpha_k = \begin{cases} \psi(n+1), & k=0, \\ -\zeta(2l+1, n+1), & k=2l, l=1, 2, 3, \cdots, \\ 2\zeta(2l) - \zeta(2l, n+1), & k=2l-1, l=1, 2, 3, \cdots. \end{cases}$$

由 (10.13') 式, 可以写出

$$\begin{aligned}
 \Gamma'(z-n) &= \frac{(-1)^n}{n!} \left[-\frac{1}{z^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{k+1} (k+1) z^k \right] \\
 &= \left(-\frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k \right) \cdot \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{z} + \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l z^l \right) \\
 &= \frac{(-1)^n}{n!} \left[-\frac{1}{z^2} - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^k \alpha_l \beta_{k-l} \right) z^k \right].
 \end{aligned}$$

所以就求出了

$$\beta_0 = \alpha_0 = \psi(n+1) \quad (10.29)$$

以及递推关系

$$\beta_k = \frac{1}{k+1} \left(\alpha_k + \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_l \beta_{k-l-1} \right), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (10.30)$$

原则上就能逐次求出所有的系数 β_k . 例如:

$$\beta_1 = \frac{1}{2} [\psi^2(n+1) - \psi'(n+1)] + \zeta(2), \quad (10.31a)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{6} [\psi''(n+1) - 3\psi'(n+1)\psi(n+1) + \psi^3(n+1)] + \psi(n+1)\zeta(2). \quad (10.31b)$$

另一种做法是利用 Γ 函数的互余宗量定理

$$\Gamma(z-n)\Gamma(n-z+1) = \frac{\pi}{\sin \pi n - z} = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

以及

$$\frac{\pi z}{\sin \pi z} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l^{2k}} \right] z^{2k} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (1 - 2^{1-2k}) \zeta(2k) z^{2k},$$

再根据例 10.3 中关于 $\Gamma(n+z)$ 的结果写出 $\Gamma(n-z+1)$ 的 Taylor 展开式

$$\Gamma(n-z+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Gamma^{(k)}(n+1) z^k,$$

所以

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k \right) \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \Gamma^{(l)}(n+1) z^l \right] \\ &= 2(-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} (1 - 2^{1-2k}) \zeta(2k) z^{2k-1}. \end{aligned}$$

进一步化成

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \Gamma^{(k+1)}(n+1) z^k - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\sum_{l=0}^k \frac{(-1)^l}{(k-l)!} \beta_l \Gamma^{(k-l)}(n+1) \right] z^k \\ &= n! \sum_{k=0}^{\infty} (2 - 2^{-2k}) \zeta(2k+2) z^{2k+1}. \end{aligned}$$

也可以得出递推关系

$$\sum_{l=0}^{2k} \frac{(-1)^l}{(2k-l)!} \beta_l \Gamma^{(2k-l)}(n+1) - \frac{1}{(2k+1)!} \Gamma^{(2k+1)}(n+1) = 0, \quad (10.32)$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{2k+1} \frac{(-1)^l}{(2k-l+1)!} \beta_l \Gamma^{(2k-l+1)}(n+1) - \frac{1}{(2k+2)!} \Gamma^{(2k+2)}(n+1) \\ = n! (2 - 2^{-2k}) \zeta(2k+2). \end{aligned} \quad (10.33)$$

§10.2 导致 Γ 函数或 B 函数的积分

例 10.5 计算积分 $\int_0^\infty \cos x^{2\alpha} dx$ 与 $\int_0^\infty \sin x^{2\alpha} dx$, 其中 $\alpha > 1/2$.

解 本题所要算的积分其实就是 $\int_0^\infty e^{ix^{2\alpha}} dx$. 而且, 进一步作变换 $\xi = x^{2\alpha}$, 则有

$$\int_0^\infty e^{ix^{2\alpha}} dx = \frac{1}{2\alpha} \int_0^\infty e^{i\xi} \xi^{1/(2\alpha)-1} d\xi.$$

因此, 如果我们在 ζ 平面上取积分围道 C 如图 10.1 所示, 则按照留数定理, 有

$$\oint_C e^{i\zeta} \zeta^{1/(2\alpha)-1} d\zeta = 0.$$

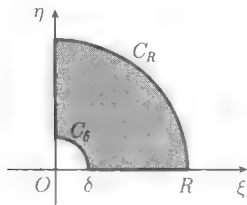


图 10.1 ζ 平面上的积分围道

显然, 因为 $\alpha > 1/2$, 所以, 根据 Jordan 引理和小圆弧引理, 分别有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\zeta} \zeta^{1/(2\alpha)-1} d\zeta = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_\delta} e^{i\zeta} \zeta^{1/(2\alpha)-1} d\zeta = 0.$$

这样, 在取极限 $R \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$ 后, 就得到

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{i\xi} \xi^{1/(2\alpha)-1} d\xi &= \int_0^\infty e^{-\eta} (\eta e^{i\pi/2})^{1/(2\alpha)-1} e^{i\pi/2} d\eta \\ &= e^{i\pi\alpha/4} \int_0^\infty e^{-\eta} \eta^{1/(2\alpha)-1} d\eta = e^{i\pi/(4\alpha)} \Gamma\left(\frac{1}{2\alpha}\right), \end{aligned}$$

亦即

$$\int_0^{\infty} e^{ix^{2\alpha}} dx = \frac{1}{2\alpha} e^{i\pi/(4\alpha)} \Gamma\left(\frac{1}{2\alpha}\right).$$

分别比较实部和虚部, 即得

$$\int_0^{\infty} \cos(x^{2\alpha}) dx = \frac{1}{2\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \cos \frac{\pi}{4\alpha}, \quad (10.34a)$$

$$\int_0^{\infty} \sin(x^{2\alpha}) dx = \frac{1}{2\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \sin \frac{\pi}{4\alpha}. \quad (10.34b)$$

讨论

1. 也可采用围道积分 $\oint_C e^{-\zeta} \zeta^{1/(2\alpha)-1} d\zeta$, 积分围道 C 仍如图 10.1 所示.

2. 如果采用围道积分 $\oint_C e^{-\zeta} \zeta^{1/(2\alpha)-1} d\zeta$, 但积分围道改为图 10.2 中的扇形围道, 其中 $0 < t \leq \pi/2$, 则有

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho(\cos t + i \sin t)} \rho^{1/(2\alpha)-1} d\rho = e^{it/2\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{2\alpha}\right).$$

再令 $\rho = x^{2\alpha}$, 就能得到

$$\int_0^{\infty} e^{-x^{2\alpha} \cos t} \cos(x^{2\alpha} \sin t) dx = \frac{1}{2\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \cos \frac{t}{2\alpha}, \quad (10.35)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^{2\alpha} \cos t} \sin(x^{2\alpha} \sin t) dx = \frac{1}{2\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \sin \frac{t}{2\alpha}. \quad (10.36)$$

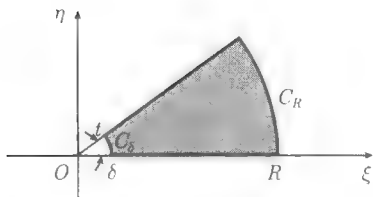


图 10.2 ζ 平面上的扇形围道

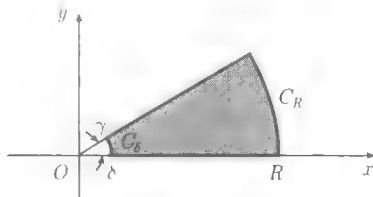


图 10.3 z 平面上的扇形围道

例 10.6 计算积分 $\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\kappa x} \cos \lambda x dx$ 与 $\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\kappa x} \sin \lambda x dx$, 其中 $0 < \alpha < 1$, $\kappa \geq 0$, λ 为实数.

解 设 $r = \sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}$, $\gamma = \arctan(\lambda/\kappa)$, 即 $\kappa + i\lambda = re^{i\gamma}$, $-\pi/2 < \gamma < \pi/2$, 考虑复变积分 $\oint_C z^{\alpha-1} e^{-rz} dz$, 其中 C 为扇形围道, 如图 10.3 所示, 其形状与图 10.2 相似, 只不过是处于 z 平面上. 于是

$$\begin{aligned}\oint_C z^{\alpha-1} e^{-rz} dz &= \int_{\delta}^R x^{\alpha-1} e^{-rx} dx + \int_{C_R} z^{\alpha-1} e^{-rz} dz \\ &\quad + \int_R^{\delta} (\rho e^{i\gamma})^{\alpha-1} e^{-r\rho e^{i\gamma}} e^{i\gamma} d\rho + \int_{C_{\delta}} z^{\alpha-1} e^{-rz} dz = 0.\end{aligned}$$

根据小圆弧引理和大圆弧引理, 可以判断

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_{\delta}} z^{\alpha-1} e^{-rz} dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow 0} \int_{C_R} z^{\alpha-1} e^{-rz} dz = 0,$$

因此

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-rx} dx = e^{i\gamma\alpha} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-rx e^{i\gamma}} dx,$$

亦即

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-rx e^{i\gamma}} dx = e^{i\gamma\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)}{r^{\alpha}}.$$

分别比较实部与虚部, 就得到

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\kappa x} \cos \lambda x dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{(\kappa^2 + \lambda^2)^{\alpha/2}} \cos\left(\alpha \arctan \frac{\lambda}{\kappa}\right), \quad (10.37)$$

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\kappa x} \sin \lambda x dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{(\kappa^2 + \lambda^2)^{\alpha/2}} \sin\left(\alpha \arctan \frac{\lambda}{\kappa}\right). \quad (10.38)$$

例 10.7 计算积分 $\int_0^{\infty} x^{\alpha} \ln(1 - e^{-x}) dx$, 其中 $\operatorname{Re} \alpha > -1$.

解 将被积函数中的 $\ln(1 - e^{-x})$ 作展开, 而后逐项积分即可:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^{\alpha} \ln(1 - e^{-x}) dx &= - \int_0^{\infty} x^{\alpha} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nx} \right) dx \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-nx} dx = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^{\alpha+1}} \\ &= -\Gamma(\alpha+1) \zeta(\alpha+2), \quad \operatorname{Re} \alpha > -1.\end{aligned} \quad (10.39)$$

 **讨论** 类似地, 还可计算

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^x - 1} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^{\alpha+1}} \\ &= \Gamma(\alpha+1) \zeta(\alpha+1), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0,\end{aligned} \quad (10.40)$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{4 \sinh^2(x/2)} dx &\equiv \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^x(1-e^{-x})^2} dx \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^{\alpha}} \\
 &= \Gamma(\alpha+1) \zeta(\alpha), \quad \operatorname{Re} \alpha > 1.
 \end{aligned} \tag{10.41}$$

例 10.8 计算积分 $\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-1/2} (t-x)^{-2\nu-1} dx$, $t > 1$, 其中 $\operatorname{Re} \nu > -1/2$.

解 解法一 将 $(t-x)^{-2\nu-1}$ 展开为幂级数:

$$(t-x)^{-2\nu-1} = t^{-2\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2\nu+1)}{n! \Gamma(2\nu+1)} \left(\frac{x}{t}\right)^n.$$

代入, 逐项积分, 即得

$$\begin{aligned}
 &\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-1/2} (t-x)^{-2\nu-1} dx \\
 &= t^{-2\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2\nu+1)}{n! \Gamma(2\nu+1)} t^{-n} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-1/2} x^n dx \\
 &= t^{-2\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2n+2\nu+1)}{(2n)! \Gamma(2\nu+1)} t^{-2n} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-1/2} x^{2n} dx \\
 &= t^{-2\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2n+2\nu+1)}{(2n)! \Gamma(2\nu+1)} t^{-2n} \int_0^1 (1-\xi)^{\nu-1/2} \xi^{n-1/2} d\xi \\
 &= t^{-2\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2n+2\nu+1)}{(2n)! \Gamma(2\nu+1)} \frac{\Gamma(\nu+1/2) \Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+\nu+1)} t^{-2n}.
 \end{aligned}$$

再利用 Γ 函数的倍乘公式加以化简, 即可将上面的级数求和:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-1/2} (t-x)^{-2\nu-1} dx &= t^{-2\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n+\nu+1/2)}{n! \Gamma(\nu+1)} t^{-2n} \\
 &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)} (t^2-1)^{-\nu-1/2},
 \end{aligned} \tag{10.42}$$

这里再一次应用了二项式展开公式.

解法二 直接作变换

$$\frac{1-x}{t-x} = \frac{1-u}{t+1}, \quad \text{即} \quad \frac{1+x}{t-x} = \frac{1+u}{t-1}.$$

因此

$$x = \frac{1+ut}{u+t}, \quad u = \frac{1-ut}{x-t}, \quad \frac{dx}{1-x^2} = \frac{du}{1-u^2}.$$

代入即得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-1/2} (t-x)^{-2\nu-1} dx &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1-x}{t-x}\right)^{\nu+1/2} \left(\frac{1+x}{t-x}\right)^{\nu+1/2} \frac{dx}{1-x^2} \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1-u}{t+1}\right)^{\nu+1/2} \left(\frac{1+u}{t-1}\right)^{\nu+1/2} \frac{du}{1-u^2} = (t^2-1)^{-\nu-1/2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-1/2} dx.\end{aligned}$$

再作变换 $1+x=2s$, $1-x=2(1-s)$, 就可算出

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\nu-1/2} (t-x)^{-2\nu-1} dx &= (t^2-1)^{-\nu-1/2} \int_0^1 2^{2\nu} s^{\nu-1/2} (1-s)^{\nu-1/2} ds \\ &= (t^2-1)^{-\nu-1/2} 2^{2\nu} \frac{\Gamma(\nu+1/2) \Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(2\nu+1)}.\end{aligned}\quad (10.42')$$

利用 Γ 函数的倍乘公式, 就能将此结果化为 (10.42) 式的形式.

例 10.9 计算积分 $\int_{-1}^1 (1-u^2)^{\nu-1/2} |x-u|^{-2\nu-1} \operatorname{sgn}(x-u) du$, $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \nu < 0$.

解 此结果显然应当是 x 的奇函数, 故只需讨论 $x \geq 0$ 的情形.

当 $x > 1$ 时, $\operatorname{sgn}(x-u) = 1$, 故

$$\int_{-1}^1 (1-u^2)^{\nu-1/2} |x-u|^{-2\nu-1} \operatorname{sgn}(x-u) du = \int_{-1}^1 (1-u^2)^{\nu-1/2} (x-u)^{-2\nu-1} du.$$

此积分已在例 10.8 中计算出, 因此

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (1-u^2)^{\nu-1/2} (x-u)^{-2\nu-1} du &= \frac{2^{2\nu}}{(x^2-1)^{\nu+1/2}} \frac{\Gamma(\nu+1/2) \Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(2\nu+1)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)} (x^2-1)^{-\nu-1/2}.\end{aligned}\quad (10.43)$$

当 $0 \leq x < 1$ 时, 有

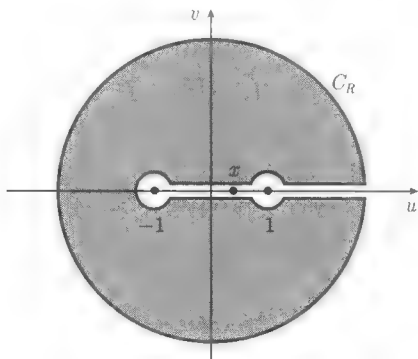
$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (1-u^2)^{\nu-1/2} |x-u|^{-2\nu-1} \operatorname{sgn}(x-u) du \\ = \int_{-1}^x (1-u^2)^{\nu-1/2} (x-u)^{-2\nu-1} du - \int_x^1 (1-u^2)^{\nu-1/2} (u-x)^{-2\nu-1} du.\end{aligned}$$

下面就应用留数定理计算后一种情形下的积分. 取积分围道 C 如图 10.4 所示. 因为在围道内无奇点, 故围道积分

$$\oint_C (1-w^2)^{\nu-1/2} (x-w)^{-2\nu-1} dw = 0.$$

被积函数 $(1-u^2)^{\nu-1/2} (x-u)^{-2\nu-1}$ 共有四个枝点: $w = \pm 1$ 和 $w = x, \infty$. 如果规定在割线上岸的 $-1 < u < x$ 段,

$$\arg(1+w) = 0, \quad \arg(1-w) = 0, \quad \arg(x-w) = 0,$$

图 10.4 积分围道 (割线连接枝点 $z=\pm 1, x$ 和 ∞)

则

在割线上岸 $x < u < 1$ 段, $\arg(1+w) = 0, \arg(1-w) = 0, \arg(x-w) = -\pi,$
 在割线上岸 $1 < u < \infty$ 段, $\arg(1+w) = 0, \arg(1-w) = -\pi, \arg(x-w) = -\pi,$
 在割线下岸 $1 < u < \infty$ 段, $\arg(1+w) = 2\pi, \arg(1-w) = \pi, \arg(x-w) = \pi,$
 在割线下岸 $x < u < 1$ 段, $\arg(1+w) = 2\pi, \arg(1-w) = 0, \arg(x-w) = \pi,$
 在割线下岸 $-1 < u < x$ 段, $\arg(1+w) = 2\pi, \arg(1-w) = 0, \arg(x-w) = 0.$

因为

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} (1-w^2)^{\nu-1/2} (x-w)^{-2\nu-1} dw = 0,$$

并且在 $-1/2 < \operatorname{Re} \nu < 0$ 的条件下, 沿 $w = \pm 1$ 及 $w = x$ 处各小圆弧的积分值亦均趋于 0, 所以围道积分即化为下列六个积分之和:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^x (1+u)^{\nu-1/2} (1-u)^{\nu-1/2} (x-u)^{-2\nu-1} du \\ &= \int_{-1}^x (1-u^2)^{\nu-1/2} (x-u)^{-2\nu-1} du, \\ & \int_x^1 (1+u)^{\nu-1/2} (1-u)^{\nu-1/2} [(u-x)e^{-i\pi}]^{-2\nu-1} du \\ &= e^{i\pi(2\nu+1)} \int_x^1 (1-u^2)^{\nu-1/2} (u-x)^{-2\nu-1} du, \\ & \int_1^\infty (1+u)^{\nu-1/2} [(u-1)e^{-i\pi}]^{\nu-1/2} [(u-x)e^{-i\pi}]^{-2\nu-1} du \\ &= e^{i\pi(\nu+3/2)} \int_1^\infty (u^2-1)^{\nu-1/2} (u-x)^{-2\nu-1} du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^1 [(1+u)e^{i2\pi}]^{\nu-1/2} [(u-1)e^{i\pi}]^{\nu-1/2} [(u-x)e^{i\pi}]^{-2\nu-1} du \\
&= e^{i\pi(\nu-1/2)} \int_{-\infty}^1 (u^2-1)^{\nu-1/2} (u-x)^{-2\nu-1} du, \\
& \int_1^x [(1+u)e^{i2\pi}]^{\nu-1/2} (1-u)^{\nu-1/2} [(u-x)e^{i\pi}]^{-2\nu-1} du \\
&= \int_1^x (1-u^2)^{\nu-1/2} (u-x)^{-2\nu-1} du, \\
& \int_x^{-1} [(1+u)e^{i2\pi}]^{\nu-1/2} (1-u)^{\nu-1/2} (x-u)^{-2\nu-1} du \\
&= e^{i\pi(2\nu+1)} \int_x^{-1} (1-u^2)^{\nu-1/2} (x-u)^{-2\nu-1} du.
\end{aligned}$$

容易看出, 第三个积分与第四个积分正好互相抵消, 剩下的四个积分即可合并成

$$(1+e^{i2\pi\nu}) \left[\int_{-1}^x (1-u^2)^{\nu-1/2} (x-u)^{-2\nu-1} du - \int_x^1 (1-u^2)^{\nu-1/2} (u-x)^{-2\nu-1} du \right] = 0,$$

于是就得到

$$\int_{-1}^x (1-u^2)^{\nu-1/2} (x-u)^{-2\nu-1} du - \int_x^1 (1-u^2)^{\nu-1/2} (u-x)^{-2\nu-1} du = 0.$$

将 $x > 1$ 及 $0 \leq x < 1$ 两种情形的结果合并, 本题的最后答案便是

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 (1-u^2)^{\nu-1/2} |x-u|^{-2\nu-1} \operatorname{sgn}(x-u) du \\
&= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)} (x^2-1)^{-\nu-1/2} \eta(x-1).
\end{aligned} \tag{10.44}$$

例 10.10 计算积分 $\int_0^1 \frac{x^{\nu-1/2}}{(a^2x+1)(1-x)^{\nu+1/2}} dx$, 其中 $a > 0$, $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}$.

解 类似于例 10.8, 作变换

$$\frac{x}{a^2x+1} = \frac{t}{a^2+1}, \quad \text{即} \quad x = \frac{t}{1+a^2-a^2t}.$$

因此

$$1-x = \frac{1+a^2}{1+a^2-a^2t}(1-t), \quad a^2x+1 = \frac{1+a^2}{1+a^2-a^2t}, \quad dx = \frac{1+a^2}{(1+a^2-a^2t)^2} dt,$$

即可将原积分化为

$$\int_0^1 \frac{x^{\nu-1/2}}{(a^2x+1)(1-x)^{\nu+1/2}} dx = \frac{1}{(1+a^2)^{\nu+1/2}} \int_0^1 t^{\nu-1/2}(1-t)^{-\nu-1/2} dt$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1/2) \Gamma(-\nu+1/2)}{(1+a^2)^{\nu+1/2}} = \frac{1}{(1+a^2)^{\nu+1/2}} \frac{\pi}{\cos \pi\nu}. \quad (10.45)$$

在 $0 < a < 1$ 的条件下, 也可以将 $1/(1+a^2x)$ 作 Taylor 展开:

$$\frac{1}{1+a^2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{2n} x^n,$$

所以

$$\int_0^1 \frac{x^{\nu-1/2}}{(a^2x+1)(1-x)^{\nu+1/2}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{2n} \int_0^1 x^{n+\nu-1/2} (1-x)^{-\nu-1/2} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^{2n} \frac{\Gamma(n+\nu+1/2) \Gamma(-\nu+1/2)}{\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{\pi}{\cos \pi\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n+\nu+1/2)}{n! \Gamma(\nu+1/2)} a^{2n} = \frac{\pi}{\cos \pi\nu} (1+a^2)^{-\nu-1/2}.$$

此结果显然在 $|a| < 1$ 的条件下也成立, 而后更可以进一步作解析延拓.

例 10.11 计算积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3} dx$.

解 此积分可用留数定理计算 (见例 7.4). 现在选择作特定的自变量变换而化为 B 函数. 为此, 令

$$t = \frac{2x}{1+x}, \quad 1-t = \frac{1-x}{1+x}, \quad dt = \frac{2dx}{(1+x)^2}.$$

于是直接计算得

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3} dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{1+x} \right)^{1/4} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{3/4} \frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$= 2^{-5/4} \int_0^1 t^{1/4} (1-t)^{3/4} dt = \frac{2^{-5/4}}{\Gamma(3)} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Gamma\left(\frac{7}{4}\right)$$

$$= 2^{-9/4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{3\sqrt[4]{2}}{64} \pi. \quad (10.46)$$

 **讨论** 类似地, 可以求得

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x(1-x)}(1+x)} dx = \frac{\pi\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}, \quad (10.47a)$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x(1-x)}}{(1+x)^3} dx = \frac{\pi\sqrt[3]{4}}{18\sqrt{3}}. \quad (10.47b)$$

再讨论一个导致 ψ 函数的积分.

例 10.12 计算积分 $\int_0^\pi \frac{\sin^2 n\theta}{\sin \theta} d\theta$.

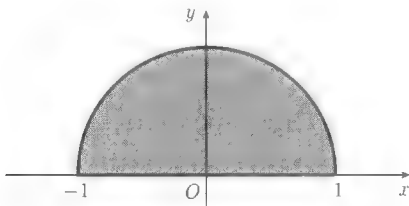


图 10.5 半径为 1 的半圆形围道

解 取半径为 1 的半圆形围道, 如图 10.5 所示, 于是, 根据留数定理, 有

$$\oint \frac{z^{2n} - 1}{z^2 - 1} dz = \int_0^\pi \frac{e^{i2n\theta} - 1}{e^{i2\theta} - 1} e^{i\theta} i d\theta + \int_{-1}^1 \frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} dx = 0.$$

因为

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{e^{i2n\theta} - 1}{e^{i2\theta} - 1} e^{i\theta} i d\theta &= \int_0^\pi \frac{\cos 2n\theta - 1 + i \sin 2n\theta}{2i \sin \theta} i d\theta \\ &= - \int_0^\pi \frac{\sin^2 n\theta}{\sin \theta} d\theta + \frac{i}{2} \int_0^\pi \frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta} d\theta \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} dx &= 2 \int_{-1}^1 \left(x^{2n-2} + x^{2n-4} + \cdots + 1 \right) dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-3} + \cdots + \frac{1}{3} + 1 \right) \\ &= \psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

所以

$$- \int_0^\pi \frac{\sin^2 n\theta}{\sin \theta} d\theta + \frac{i}{2} \int_0^\pi \frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta} d\theta + \psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

比较实部, 即得

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 n\theta}{\sin \theta} d\theta = \psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right). \quad (10.48)$$

与此同时, 比较虚部, 还能得到

$$\int_0^\pi \frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta} d\theta = 0. \quad (10.49a)$$

讨论

1. 根据本题结果, 还可以计算得

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin 2n\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} d\theta &= \frac{1}{n} \sin^2 n\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin^2 n\theta \frac{d\theta}{\sin \theta} \\ &\quad - \frac{1}{n} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (10.50)$$

在第七章中也曾得到这个结果 (见例 7.17, (7.39) 式).

2. 这里还可以计算类似于 (10.49a) 的积分

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} d\theta &= \int_0^\pi \frac{e^{i(2n+1)\theta} - e^{-i(2n+1)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[e^{i2n\theta} + e^{i(2n-2)\theta} + \cdots + e^{-i(2n-2)\theta} + e^{-i2n\theta} \right] d\theta, \end{aligned}$$

上式右端 $2n+1$ 项中只有一项对积分有贡献, 因此

$$\int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} d\theta = \int_0^\pi 1 \cdot d\theta = \pi, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (10.49b)$$

§10.3 含 ψ 函数的级数

本节介绍几个含 ψ 函数的关系式与无穷级数, 第九章中已经引用过这些结果.

例 10.13 证明:

$$\sum_{n=2}^k \frac{1}{k-n+1} [\psi(n) - \psi(1)] = \sum_{n=2}^k \frac{2}{n} [\psi(n) - \psi(1)], \quad k=2, 3, 4, \dots \quad (10.51)$$

证 用数学归纳法. 设

$$S_k = \sum_{n=2}^k \frac{1}{k-n+1} [\psi(n) - \psi(1)], \quad T_k = \sum_{n=2}^k \frac{2}{n} [\psi(n) - \psi(1)].$$

$k=2$ 时显然有 $S_2 = T_2 = 1$.

假设 $k=l$ 时亦成立, 即 $S_l = T_l$, 则对于 $k=l+1$, 有

$$\begin{aligned} S_{l+1} - S_l &= \sum_{n=2}^{l+1} \frac{1}{l-n+2} [\psi(n) - \psi(1)] - \sum_{n=2}^l \frac{1}{l-n+1} [\psi(n) - \psi(1)] \\ &= \sum_{m=1}^l \frac{1}{l-m+1} [\psi(m+1) - \psi(1)] - \sum_{n=2}^l \frac{1}{l-n+1} [\psi(n) - \psi(1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{l} + \sum_{n=2}^l \frac{1}{l-n+1} [\psi(n+1) - \psi(n)] \\
&= \frac{1}{l} + \sum_{n=2}^l \frac{1}{l-n+1} \frac{1}{n} = \frac{1}{l} + \frac{1}{l+1} \sum_{n=2}^l \left(\frac{1}{l-n+1} + \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{l} + \frac{1}{l+1} \left\{ [\psi(l+1) - \psi(2)] + [\psi(l) - \psi(1)] \right\} \\
&= \frac{1}{l} + \frac{2}{l+1} [\psi(l+1) - \psi(1)] - \frac{1}{l+1} \left(\frac{1}{l} + 1 \right) \\
&= \frac{2}{l+1} [\psi(l+1) - \psi(1)] = T_{l+1} - T_l.
\end{aligned}$$

因此命题得证. □

例 10.14 证明:

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2n+1} \left[\psi\left(k-n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right]. \quad (10.52)$$

证 仍用数学归纳法. 令

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad T_k = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2n+1} \left[\psi\left(k-n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right].$$

当 $k=1$ 时, 显然有 $S_1 = T_1$.

假设 $k=l$ 时亦成立, 即 $S_l = T_l$, 则对于 $k=l+1$, 有

$$\begin{aligned}
S_{l+1} - S_l &= \frac{1}{l+1} \left[\psi\left(l + \frac{3}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right], \\
T_{l+1} - T_l &= \sum_{n=1}^l \frac{1}{2n+1} \left[\psi\left(l-n + \frac{3}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] - \sum_{n=1}^{l-1} \frac{1}{2n+1} \left[\psi\left(l-n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{2l+1} \left[\psi\left(\frac{3}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \sum_{n=0}^{l-1} \frac{1}{2n+1} \left[\psi\left(l-n + \frac{3}{2}\right) - \psi\left(l-n + \frac{1}{2}\right) \right] \\
&= \frac{2}{2l+1} + \sum_{n=0}^{l-1} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{l-n+1/2} \\
&= \frac{2}{2l+1} + \frac{1}{2(l+1)} \sum_{n=0}^{l-1} \left(\frac{1}{n+1/2} + \frac{1}{l-n+1/2} \right) \\
&= \frac{2}{2l+1} + \frac{1}{2(l+1)} \left(\sum_{n=0}^{l-1} \frac{1}{n+1/2} + \sum_{m=1}^l \frac{1}{m+1/2} \right) \\
&= \frac{1}{l+1} \left(\frac{2l+2}{2l+1} + 1 + \sum_{n=1}^{l-1} \frac{1}{n+1/2} + \frac{1}{2l+1} \right) \\
&= \frac{1}{l+1} \left(2 + \sum_{n=1}^{l-1} \frac{1}{n+1/2} + \frac{2}{2l+1} \right) = \frac{1}{l+1} \left[\psi\left(l + \frac{3}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right].
\end{aligned}$$

所以两级数相等. 证毕. \square

例 10.15 证明:

$$\sum_{n=1}^k \frac{4}{2n+1} [\psi(2n+1) - \psi(1)] - \sum_{n=1}^k \frac{1}{k-n+1} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right]. \quad (10.53)$$

证 同上两题, 令

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{4}{2n+1} [\psi(2n+1) - \psi(1)], \quad T_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{k-n+1} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right].$$

当 $k=1$ 时, 有

$$S_1 = \frac{4}{3} [\psi(3) - \psi(1)] = 2, \quad T_1 = \psi\left(\frac{3}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) = 2.$$

所以 $S_1 = T_1$.

假设 $k=l$ 时两级数相等, 即 $S_l = T_l$, 于是, 当 $k=l+1$ 时, 有

$$\begin{aligned} S_{l+1} - S_l &= \frac{4}{2l+3} [\psi(2l+3) - \psi(1)], \\ T_{l+1} - T_l &= \sum_{n=1}^{l+1} \frac{1}{l-n+2} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] - \sum_{n=1}^l \frac{1}{k-n+1} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{2}{l+1} + \sum_{n=2}^{l+1} \frac{1}{l-n+2} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ &\quad - \sum_{n=1}^l \frac{1}{k-n+1} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{2}{l+1} + \sum_{n=1}^l \frac{1}{l-n+1} \left[\psi\left(n + \frac{3}{2}\right) - \psi\left(n + \frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{2}{l+1} + \sum_{n=1}^l \frac{1}{l-n+1} \frac{1}{n+1/2} = \frac{2}{l+1} + \frac{2}{2l+3} \sum_{n=1}^l \left(\frac{1}{l-n+1} + \frac{1}{n+1/2} \right) \\ &= \frac{2}{l+1} + \frac{2}{2l+3} \left[\psi\left(l + \frac{3}{2}\right) - \psi\left(\frac{3}{2}\right) + \psi(l+1) - \psi(1) \right] \\ &= \frac{2}{2l+3} \left[\frac{1}{l+1} + \psi\left(l + \frac{3}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \psi(l+1) - \psi(1) \right] \\ &= \frac{2}{2l+3} \left[\psi\left(l + \frac{3}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \psi(l+2) - \psi(1) \right] \\ &= \frac{4}{2l+3} [\psi(2l+3) - \psi(1)] = S_{l+1} - S_l, \end{aligned}$$

因此有 $S_k = T_k$. 证毕. □

在以上证明中用到了恒等式

$$2\psi(2z) = \psi(z) + \psi\left(z + \frac{1}{2}\right) + 2\ln 2. \quad (10.54)$$

它可以由 Γ 函数的倍乘公式求对数微商而得.

 **讨论** 还可以将 (10.51) 式改写为

$$\sum_{n=0}^k \frac{2}{2n+1} \left[\psi(n+1) + \psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \sum_{n=1}^k \frac{1}{k-n+1} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right],$$

亦即

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \frac{1}{k-n+1} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] &= \sum_{n=1}^k \frac{2}{2n+1} \left[\psi(n+1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \sum_{n=0}^k \frac{2}{2n+1} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi(1) \right]. \end{aligned} \quad (10.55)$$

第八章中也曾经用到这个结果.

例 10.16 证明:

$$\sum_{n=1}^k \frac{2}{2n+1} [\psi(2n+1) - \psi(1)] = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2n+1} [\psi(k-n+1) - \psi(1)]. \quad (10.56)$$

证 第九章中已经得到过此式 (见 (9.162) 式). 现在改用数学归纳法证明.

首先, 当 $k=1$ 时, 此式两端均为 1, 故等式成立.

其次, 假设 $k=l$ 时等式仍成立, 于是, 当 $k=l+1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \text{左端增加值} &= \sum_{n=1}^{l+1} \frac{2}{2n+1} [\psi(2n+1) - \psi(1)] - \sum_{n=1}^l \frac{2}{2n+1} [\psi(2n+1) - \psi(1)] \\ &= \frac{2}{2l+3} [\psi(2l+3) - \psi(1)] = \frac{2}{2l+3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2l+2} \right), \\ \text{右端增加值} &= \sum_{n=0}^l \frac{1}{2n+1} [\psi(l-n+2) - \psi(1)] - \sum_{n=0}^{l-1} \frac{1}{2n+1} [\psi(l-n+1) - \psi(1)] \\ &= \sum_{n=0}^{l-1} \frac{1}{2n+1} [\psi(l-n+2) - \psi(l-n+1)] + \frac{1}{2l+1} \\ &= \sum_{n=0}^{l-1} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{l-n+1} + \frac{1}{2l+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{2l+3} \sum_{n=0}^{l-1} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2l-2n+2} \right) + \frac{2l+3}{(2l+1)(2l+3)} \\
&= \frac{2}{2l+3} \sum_{n=0}^{l-1} \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2l+3} \sum_{n=1}^l \frac{1}{2n+2} + \frac{2}{(2l+1)(2l+3)} + \frac{1}{2l+3} \\
&= \frac{2}{2l+3} \sum_{n=0}^l \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2l+3} \sum_{n=0}^l \frac{1}{2n+2},
\end{aligned}$$

此二值亦相等, 故等式成立. 由此即证得 (10.56) 式为真. \square

例 10.17 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2} \frac{1}{n} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right]$ 之和.

解 由

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2} \frac{1}{n} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l+1/2}$$

交换求和次序, 即得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2} \frac{1}{n} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \frac{1}{l+1} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2l+1} - \frac{1}{l+1} \right) \\
&= \psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \ln 2.
\end{aligned} \tag{10.57}$$

 **讨论** 用同样方法可以求得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+4} \frac{1}{n} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+4} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l+1/2} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{n+2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l+1} + \frac{1}{l+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2l+1} - \frac{1}{l+1} \right) + \frac{1}{3} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2l+1} - \frac{1}{l+2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{6} \left[\psi(2) + 3\psi(1) - 4\psi\left(\frac{1}{2}\right) \right].
\end{aligned} \tag{10.58}$$

更一般地, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2k+2} \frac{1}{n} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{n+k+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \frac{1}{k+1} \sum_{n=l+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k+1} \right) \\
&= \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{1}{l+1} + \frac{1}{l+2} + \cdots + \frac{1}{l+k+1} \right) \\
&= \frac{1}{k+1} \left\{ \left[\psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{1}{3} \left[\psi(2) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \cdots \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2k+1} \left[\psi(k+1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \right\}, \quad k=1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{10.59}$$

例 10.18 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{n} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right]$ 之和.

解 仿照上题的做法, 可以将原级数改写成

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{n} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l+1} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \sum_{n=l+1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{n+1/2} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{2l+1} \sum_{n=l+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1/2} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{2l+1} \left[\psi\left(l + \frac{3}{2}\right) - \psi(l+1) \right].
\end{aligned}$$

为了计算后一形式的级数和, 可以利用 ψ 函数的积分表达式

$$\psi(z) = -\int_0^1 \left(\frac{1}{\ln t} + \frac{t^{z-1}}{1-t} \right) dt = \int_0^1 \frac{t^{z-1} - 1}{t-1} dt + \gamma,$$

因此有

$$\psi\left(l + \frac{3}{2}\right) - \psi(l+1) = \int_0^1 \frac{t^{l+1/2} - t^l}{t-1} dt.$$

作变换 $t = \tau^2$, 即得

$$\psi\left(l + \frac{3}{2}\right) - \psi(l+1) = 2 \int_0^1 \frac{\tau^{2l+1} - \tau^{2l}}{\tau^2 - 1} \tau d\tau = 2 \int_0^1 \frac{\tau^{2l+1}}{\tau + 1} d\tau.$$

这样原级数就化为

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{n} \left[\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4}{2l+1} \int_0^1 \frac{\tau^{2l+1}}{\tau + 1} d\tau \\
&= \int_0^1 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\tau^{2l+1}}{2l+1} \frac{d\tau}{1+\tau} = \int_0^1 \frac{2}{1+\tau} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau} d\tau.
\end{aligned}$$

再作变换

$$x = \ln \frac{1+\tau}{1-\tau}, \quad \text{即} \quad \tau = \frac{e^x - 1}{e^x + 1},$$

即可求得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{n} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] &= 2 \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} dx \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-(n+1)x} x dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned} \quad (10.60)$$

 **讨论** 在此基础上, 还能求得

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3} \frac{1}{n} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{2l+1} \left[\psi\left(l+\frac{5}{2}\right) - \psi(l+1) \right] \\ &= \frac{1}{3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{2l+1} \left[\frac{1}{l+3/2} + \psi\left(l+\frac{3}{2}\right) - \psi(l+1) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l+1/2} \frac{1}{l+3/2} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{2l+1} \left[\psi\left(l+\frac{3}{2}\right) - \psi(l+1) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(2 + \frac{\pi^2}{6} \right). \end{aligned} \quad (10.61)$$

更一般地, 有

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2k+1} \frac{1}{n} \left[\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2k+1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{2l+1} \left[\psi\left(l+k+\frac{3}{2}\right) - \psi(l+1) \right] \\ &= \frac{1}{2k+1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2}{2l+1} \left\{ \left(\frac{1}{l+k+1/2} + \frac{1}{l+k-1/2} + \cdots + \frac{1}{l+3/2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left[\psi\left(l+\frac{3}{2}\right) - \psi(l+1) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2k+1} \left\{ \left[\psi\left(\frac{3}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{1}{2} \left[\psi\left(\frac{5}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k} \left[\psi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{\pi^2}{6} \right\}, \quad k=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (10.62)$$

例 10.19 证明:

$$\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{n-m} \frac{\Gamma(\nu+1)}{m! \Gamma(\nu+n-m+1)} = \frac{(-1)^n}{n!} [\psi(\nu+1) - \psi(\nu+n+1)], \quad \nu > -1. \quad (10.63)$$

证 不妨从右端出发, 直接计算即可证得:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(-1)^n}{n!} [\psi(\nu+1) - \psi(\nu+n+1)] \\
 &= \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \left(\frac{1}{\nu+n} + \frac{1}{\nu+n-1} + \cdots + \frac{1}{\nu+1} \right) \\
 &= \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \int_0^1 (x^{\nu+n-1} + x^{\nu+n-2} + \cdots + x^\nu) dx \\
 &= \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \int_0^1 x^\nu \frac{1-x^n}{1-x} dx \\
 &= \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^\nu [1 - (1-t)^n] \frac{dt}{t} \\
 &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{m! (n-m)!} \int_0^1 (1-t)^\nu t^{n-m-1} dt \\
 &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{m! (n-m)!} \frac{(n-m-1)! \Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+n-m+1)} \\
 &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{n-m} \frac{1}{m!} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+n-m+1)}.
 \end{aligned}$$

讨论

1. 还可以将 (10.63) 式两端对 ν 求导, 从而进一步得到

$$\begin{aligned}
 & \frac{(-1)^n}{n!} [\psi'(\nu+1) - \psi'(n+\nu+1)] \\
 &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{n-m} \frac{1}{m!} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(n+\nu-m+1)} [\psi(\nu+1) - \psi(n+\nu-m+1)]. \quad (10.64)
 \end{aligned}$$

2. 在 $\nu > k$ 的条件下, 也可以得到

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{\nu-m} \frac{1}{m! (k-m)!} = \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{m! (k-m)!} \int_0^1 x^{\nu-m-1} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{x^{\nu-1}}{k!} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^k dx = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^{\nu-k-1} (1-x)^k dx \\
 &= \frac{(-1)^k}{k!} B(\nu-k, k+1) = (-1)^k \frac{\Gamma(\nu-k)}{\Gamma(\nu+1)}. \quad (10.65)
 \end{aligned}$$

3. 进一步将 (10.65) 式两端对 ν 求导, 又能得到

$$\sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{(\nu-m)^2} \frac{1}{m! (k-m)!} = (-1)^k \frac{\Gamma(\nu-k)}{\Gamma(\nu+1)} [\psi(\nu+1) - \psi(\nu-k)]. \quad (10.66)$$

例 10.20 计算 $\sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{\nu-m} \frac{\psi(\nu-m+1)}{m! (k-m)!}$, 其中 $\nu > k$.

解 因为

$$\psi(\nu-m+1) - \psi(1) = \int_0^1 \frac{1-x^{\nu-m}}{1-x} dx,$$

所以

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{\nu-m} \frac{\psi(\nu-m+1) - \psi(1)}{m! (k-m)!} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1-x} \left[\sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{\nu-m} \frac{1}{m! (k-m)!} - \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{m! (k-m)!} \int_0^x t^{\nu-m-1} dt \right]. \end{aligned}$$

利用 (10.65) 式的结果, 并交换积分次序, 就有

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{\nu-m} \frac{\psi(\nu-m+1) - \psi(1)}{m! (k-m)!} &= \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} \int_x^{1-\varepsilon} t^{\nu-k-1} (1-t)^k dt \\ &= \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{\nu-k-1} (1-t)^k dt \int_0^t \frac{dx}{1-x} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^1 t^{\nu-k-1} (1-t)^k \ln(1-t) dt. \end{aligned}$$

根据

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

对 q 求导, 即得

$$\int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} \ln(1-t) dt = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} [\psi(q) - \psi(p+q)], \quad (10.67)$$

所以就得到

$$\sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{\nu-m} \frac{\psi(\nu-m+1) - \psi(1)}{m! (k-m)!} = (-1)^k \frac{\Gamma(\nu-k)}{\Gamma(\nu+1)} [\psi(\nu+1) - \psi(k+1)], \quad (10.68a)$$

亦即

$$\sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{\nu-m} \frac{\psi(\nu-m+1)}{m! (k-m)!} = (-1)^k \frac{\Gamma(\nu-k)}{\Gamma(\nu+1)} [\psi(\nu+1) - \psi(k+1) + \psi(1)]. \quad (10.68b)$$

 **讨论** 结合 (10.66) 式的结果, 还可以写出

$$\sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m}{\nu-m} \frac{\psi(\nu-m)}{m! (k-m)!} = (-1)^k \frac{\Gamma(\nu-k)}{\Gamma(\nu+1)} [\psi(\nu-k) - \psi(k+1) + \psi(1)]. \quad (10.69)$$

第十一章 Fourier 级数

§11.1 Fourier 级数

级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (11.1)$$

称为三角级数. 如果它的全部系数 (可以是复数) a_m, b_m 都能表示为某个函数 $f(x)$ 的积分:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (11.2a)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (11.2b)$$

则称之为 Fourier 级数, 或者说, 它是函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi, \pi)$ 上的 Fourier 展开.

取系数 c_k 为

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad c_k = \frac{1}{2} (a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2} (a_k + ib_k) \quad (\forall k \neq 0), \quad (11.3)$$

则可导出复指数级数:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad (11.4)$$

它完全等价于级数 (11.1). 类似地, 如果级数 (11.4) 的系数 c_m 能表示为某个可积函数 f 的积分

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} \, dx, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (11.5)$$

则称级数 (11.4) 为复数形式的 Fourier 级数. 复指数级数 (11.4) 的部分和序列 $\{s_n(x)\}$ 定义为

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}. \quad (11.6)$$

采用复数形式的 Fourier 级数 (11.4), 比 (11.1) 式更方便些.

 评述

1. (11.1) 式中的三角函数都具有周期 2π , 所以级数 (如果收敛的话) 也有周期 2π . 因此只要在基本周期 $(-\pi, \pi)$ 或在单位圆上研究级数 (11.1) 即可.

2. 如果 $f(x)$ 只定义在区间 $-\pi \leq x < \pi$ 上, 我们总能按照 $f(x+2\pi) = f(x)$ 作周期延拓. 当然这种延拓可能引进额外的间断性. 例如, 从 $-\pi \leq x < \pi$ 内的函数 $f(x) = x$ 出发, 周期延拓就将在 $(2n+1)\pi$ 处形成锯齿形的间断. 取代研究 $(-\infty, \infty)$ 上的周期函数 f , 也可以把区间 $(-\pi, \pi)$ 看成是绕单位圆 S 一周 (周长就是 2π), 其端点 $-\pi, \pi$ 是单位圆上的一个点. 对于 $-\pi \leq x < \pi$ 上的函数 x , 由此构造出的 S 上的函数就只有单独的一个间断点.

§11.2 Fourier 级数的收敛性

为了讨论 Fourier 级数的收敛性, 总需要将函数类 $\{f(x)\}$ 加以某种限制. 作为第一步, 我们将许可函数 $f(x)$ 是实变量 x 的复值函数, 而且可以在区间内 (的某些点上) 无界, 但仍限于下列两种情形:

(1) 函数 $f(x) \in \mathcal{L}_1(-\pi, \pi)$, 即 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上绝对可积:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty;$$

(2) 函数 $f(x) \in \mathcal{L}_2(-\pi, \pi)$, 即 $f(x)$ 平方可积:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

显然 $\mathcal{L}_2(-\pi, \pi)$ 是 $\mathcal{L}_1(-\pi, \pi)$ 的子集.

11.2.1 Fourier 级数的部分和

为了研究 Fourier 级数的收敛性质, 首先需要分析一下它的部分和

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} \right] dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt. \end{aligned} \quad (11.7)$$

其中最后一步用到了 $f(x)$ 和 $D_n(x)$ 的周期性. 上式中的

$$D_n(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{-ikx} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)} \quad (11.8)$$

称为 Dirichlet 核. Fourier 级数的部分和就是该函数与 Dirichlet 核的卷积, 而 Fourier 级数的收敛性问题就转化为卷积积分 (11.7) 的收敛性问题. Dirichlet 核 $D_n(x)$ 的性质之一是

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1. \quad (11.9)$$

它可以由 (11.8) 式直接积分而得. Dirichlet 核 $D_n(x)$ 的另一个性质是 $\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx$ 的发散性. 事实上, 仔细地计算可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx = \frac{4}{\pi} \ln(n+1) + o(1), \quad (11.10)$$

或者说, $\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx \rightarrow \infty$ 的方式不会比 $C \ln n$ (C 为常数) 还快.

还可以引进另一个核:

$$E_n(x) = \frac{1}{\alpha_n} \cos^{2n} \frac{x}{2}, \quad \alpha_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \frac{x}{2} dx = \frac{2\pi}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{n! n!}, \quad (11.11)$$

显然

$$\int_{-\pi}^{\pi} E_n(x) dx = 1.$$

$E_n(x)$ 只不过是由 $0, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx$ 构成的多项式 (称为三角多项式). 利用二项式展开能够得到

$$E_n(x) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{n! n!}{(n-k)! (n+k)!} \cos kx \right].$$

定义

$$T_n(x) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) E_n(t) dt = \frac{1}{\alpha_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cos^{2n} \frac{t}{2} dt. \quad (11.12)$$

类似于 Fourier 级数的部分和就是该函数与 Dirichlet 核的卷积, 这里的 $T_n(x)$ 就是 $f(x)$ 与核 $E_n(x)$ 的卷积, 或者也可以看成 Fourier 级数的某种“加权”部分和. 下面证明, 只要 $f(x)$ 满足所谓 Lipschitz 条件, 即存在正数 K , 使得

$$|f(x') - f(x'')| \leq K |x' - x''|, \quad \forall x', x'' \in S,$$

则也有 $T_n(x) \rightarrow f(x)$:

$$\begin{aligned} |f(x) - T_n(x)| &= \left| \frac{1}{\alpha_n} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x-t)] \cos^{2n} \frac{t}{2} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\alpha_n} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)| \cos^{2n} \frac{t}{2} dt \\ &\leq \frac{K}{\alpha_n} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos^{2n} \frac{t}{2} dt = \frac{2K}{\alpha_n} \int_0^{\pi} t \cos^{2n} \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{8K}{\alpha_n} \int_0^{\pi/2} t \cos^{2n} t dt \leq \frac{4K\pi}{\alpha_n} \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^{2n} t dt \\ &= \frac{4K\pi}{\alpha_n} \frac{1}{2n+1} = K \frac{2^{n+1} n!}{(2n+1)!} \sim K \sqrt{\frac{\pi}{n}}, \end{aligned} \quad (11.13)$$

其中最后一步用到了 Γ 函数的渐近展开, 也可以有更宽松的估计:

$$|f(x) - T_n(x)| \leq \frac{K\pi}{\sqrt{n}}. \quad (11.13')$$

11.2.2 Fourier 级数的基本引理

我们注意, 只要 $f \in \mathcal{L}_1(\pi, \pi)$, 则可以确定其 Fourier 系数的积分 (11.5) 收敛. Fourier 级数理论的基本问题就是: f 的 Fourier 级数 (11.4) 是否收敛到 f ? 或者说, 对于什么样的函数 f , 其 Fourier 级数就代表了 f ? 并且在什么意义下代表了 f ? 由 (11.5) 式可以看出, 若 f_1 和 f_2 几乎处处相等 (即二者相差零函数, 例如, 除有限点外, $f_1 = f_2$), 它们就确定了同样的 $\{c_m\}$, 因而就有相同的 Fourier 级数. 所以我们一般不能指望有逐点收敛性. Fourier 级数的基本引理告诉我们, 对于 $\mathcal{L}_2(-\pi, \pi)$ 内的每一个 f , 由 (11.2) 式或 (11.5) 式确定的 Fourier 级数总是在 \mathcal{L}_2 的意义下收敛到 f , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \right|^2 dx = 0. \quad (11.14)$$

为了研究具体 Fourier 级数的收敛性, 首先需要介绍下列基本引理:

引理 11.1 令 $f \in \mathcal{L}_1(-\pi, \pi)$ 及 $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$, 则有

$$(1) \lim_{k \rightarrow \pm\infty} c_k = 0; \quad (11.15)$$

$$(2) \text{ Bessel 不等式: } \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx; \quad (11.16)$$

$$(3) \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \text{ 收敛.} \quad (11.17)$$

证明从略.

评述

1. 只要 f 在区间 $[a, b]$ 上分段连续, 则有 Riemann-Lebesgue 引理:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos kx dx = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin kx dx = 0, \quad (11.18a)$$

或者写成复数形式:

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(x) e^{ikx} dx = 0. \quad (11.18b)$$

(11.15) 式只是 Riemann-Lebesgue 引理的特殊形式.

2. 由此又可进一步推出, 对于 $f \in \mathcal{L}_1(a, b)$, 不论是有界区间或无界区间, 当 $k \rightarrow \infty$ 时 (k 也不限于整数),

$$\int_a^b f(x) e^{\pm ikx} dx, \quad \int_a^b f(x) \cos kx dx, \quad \int_a^b f(x) \sin kx dx$$

全都趋于 0.

3. 下面将证明 (见 (11.21) 式): 对于 $f \in \mathcal{L}_2(-\pi, \pi)$, Bessel 不等式 (11.16) 中的等号成立, 即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx. \quad (11.16')$$

此式称为 Parseval 恒等式.

4. (11.17) 式是 Bessel 不等式 (11.16) 的必然结果. 因为 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$ 是正项级数, 而 (11.16) 式表明了它有上界, 因此一定收敛.

在此引理的基础上, 就可以讨论函数的连续性 (光滑性) 与 Fourier 系数变化趋势的关系. 结果表明, 函数 f (作为单位圆 S 上的函数) 越光滑, Fourier 系数越快地趋于 0, 从而直接决定了 Fourier 级数的收敛状况.

11.2.3 函数的光滑性与 Fourier 级数的收敛性

如果函数 f 在单位圆上连续, 并且具有直至 (含) k 阶连续导数, 则称函数属于 $\mathcal{C}^k(S)$ 类. $\mathcal{C}^0(S) = \mathcal{C}(S)$ 是周期为 2π 的连续函数类.

如果函数 f 在单位圆上分段连续, 并且能将 S 划分为有限个子区间, 使得 f 在每个子区间内都有连续导数, 在每个子区间的端点有单侧导数, 则称函数 f 属于 $\mathcal{D}(S)$ 类^①.

定理 11.1 若 $f \in \mathcal{C}^p(S)$, 则它的 Fourier 系数 $\{c_m\}$ 满足

$$\lim_{m \rightarrow \infty} c_m m^p = 0.$$

证 分部积分 p 次给出

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(im)^p} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(p)}(x) e^{-imx} dx.$$

因为周期性, 分部积分出的项彼此相消. 又因为 $f^{(p)}(x)$ 连续, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 它的 Fourier 系数趋于 0. 因此, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $c_m m^p \rightarrow 0$. \square

定理 11.2 若 $f(x) \in \mathcal{C}^{p-1}(S)$, 且 $f^{(p)}(x) \in \mathcal{V}(S)$, 则对于 $\forall m$, 它的 Fourier 系数 $\{c_m\}$ 满足

$$|c_m m^{p+1}| \leq M.$$

证 先设 $p=0$, 即 $f \in \mathcal{V}$, 并且不妨假设 f 只有一个 (第一类) 间断点, 比如说 ξ , 则

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\xi} f(x) e^{-imx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\xi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx.$$

^① \mathcal{V} 与 \mathcal{V} 类函数相比, \mathcal{D} 函数可以“更好”, 也可以“更差”: 它包括某些不连续但是比较简单的函数, 然而不包括处处不可导的连续函数.

因为 f 在每个子区间中都可导, 所以许可作分部积分. 这样得到

$$2\pi i m c_m = \int_{-\pi}^{\xi} f'(x) e^{-imx} dx + \int_{\xi}^{\pi} f'(x) e^{-imx} dx + e^{-im\xi} [f(\xi+) - f(\xi-)].$$

上式右端两积分项之和, 正比于 \mathcal{L}_2 函数的第 m 个 Fourier 系数, $m \rightarrow \infty$ 时肯定趋于 0, 而右端另一项的模与 m 无关. 这样, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $m c_m$ 保持有界, 同时对于 $\varepsilon > 0$, $m^{1+\varepsilon} c_m$ 无界. \square

$p > 0$ 时可同样证明.

例 11.1 令 $-\pi \leq x < \pi$ 中 $f(x) = x$, 且 $f(x+2\pi) = f(x)$. 这是奇函数, 显然一定有 $a_m = 0$. $b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin mx dx = (-1)^{m+1} 2/m$, m 大时该函数具有 \mathcal{L} 类间断函数所预期的行为.

例 11.2 令 $-\pi \leq x < \pi$ 中 $f(x) = |x|$, 且 $f(x+2\pi) = f(x)$. 这是偶函数, 所以 $b_m = 0$, $a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos mx dx$. 我们求得 $a_0 = \pi$,

$$a_m = -\frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^m}{m^2} = \begin{cases} 0, & m \text{ 为偶数,} \\ -\frac{4}{\pi m^2}, & m \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

当 m 大时系数 $a_m = O(1/m^2)$, 与 $f' \in \mathcal{L}$ 的可微函数所预期的行为一致.

例 11.3 给定实数 α . 令 $-\pi \leq x < \pi$ 中 $f(x) = \cos \alpha x$, 且 $f(x+2\pi) = f(x)$. 若 α 不为整数, 则函数 f 连续, 但其导数在 π 的奇数倍处不连续. 直接计算给出

$$a_m = (-1)^m \frac{2\alpha}{\pi} \frac{\sin \alpha\pi}{m^2 - \alpha^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

所以, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $m^2 a_m$ 有界.

如果 α 为整数, 计算结果更简单: $a_m = \delta_{m\alpha}$. 这时 $\cos \alpha x$ 的 Fourier 级数就只有一项. 注意, 在这种情形下, $f(x)$ 无穷次可微, 所以对于 $\forall p$, $m^p a_m$ 应当随 $m \rightarrow \infty$ 而趋于 0; 这个条件肯定能够满足, 因为除了 $m = \alpha$ 的一项外, 其余系数恒为 0.

然而, 对于一般的以 2π 为周期的无穷次可微函数, 其 Fourier 系数中并不会只有某一个或有限几个不为 0. 例如, 对于无穷杆上的热传导问题, 如果杆上的初始温度就是例 11.1 中的周期函数, 则在 t 时刻的温度 $u(x, t)$ 为

$$2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} e^{-m^2 t} \sin mx, \quad -\infty < x < \infty.$$

当 $m \rightarrow \infty$ 时, 其系数指数地趋于 0, 所以定理 11.1 对于 $\forall p$ 均满足. 这意味着 $u(x, t)$ 是以 2π 为周期的无穷次可微的函数.

定理 11.3 设函数 $f(x) \in \mathcal{S}(S)$, x_0 为 S 上的固定一点, 在该点的左、右极限 $f(x_0+)$ 与 $f(x_0-)$ 均存在, 且单侧导数也存在, 则 f 的 Fourier 级数 (11.4) 在 x_0 点 (平均) 收敛到 $\frac{1}{2}[f(x_0+) + f(x_0-)]$.

证 不妨假设 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上只有一个间断点 x_0 . 我们需要证明的是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - t) D_n(t) dt = \frac{1}{2}[f(x_0+) + f(x_0-)], \quad (11.19)$$

其中 $D_n(x)$ 是 Dirichlet 核, 见 (11.8) 式. 又注意到 (11.9) 式, 有

$$f(x_0 \pm) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 \pm t) D_n(t) dt,$$

因此

$$\begin{aligned} s_n(x_0) - \frac{1}{2}[f(x_0+) + f(x_0-)] &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [2f(x_0 - t) - f(x_0+) - f(x_0-)] D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [2f(x_0 + t) - f(x_0+) - f(x_0-)] D_n(t) dt \quad (\text{因为 } D_n(-t) = D_n(t)) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0 - t) + f(x_0 + t) - f(x_0+) - f(x_0-)] D_n(t) dt \\ &= \int_0^{\pi} [f(x_0 - t) + f(x_0 + t) - f(x_0+) - f(x_0-)] D_n(t) dt \\ &\quad (\text{因为被积函数为偶函数}) \\ &= \int_0^{\pi} [f(x_0 + t) - f(x_0+)] D_n(t) dt + \int_0^{\pi} [f(x_0 - t) - f(x_0-)] D_n(t) dt. \end{aligned}$$

下面证明上式右端的两项在 $n \rightarrow \infty$ 时的极限均为 0. 先考察第一项:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi} [f(x_0 + t) - f(x_0+)] D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0+)}{t} \frac{t}{\sin(t/2)} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt. \end{aligned}$$

按照假设, f 在 x_0 点的右侧导数存在, 所以第一个因子在 $t \rightarrow 0$ 时的极限存在, 因此 $[f(x_0 + t) - f(x_0+)]/t$ 属于 $\mathcal{L}_1(0, \pi)$. 第二个因子 $t/\sin(t/2)$ 在 $(0, \pi)$ 上有界, 所以乘积

$$\frac{f(x_0 + t) - f(x_0+)}{t} \frac{t}{\sin(t/2)}$$

也属于 $\mathcal{L}_1(0, \pi)$. 由 Riemann-Lebesgue 引理 (11.18) 即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} [f(x_0 + t) - f(x_0+)] D_n(t) dt = 0.$$

对于第二项可作同样的讨论, 因而 (11.19) 式得证. \square

评述

1. 此定理表明, f 在 x_0 点的局部行为, 就决定了 Fourier 级数在 x_0 点的收敛性, 即使它的系数是由整个区间上的公式 (11.5) 给出的.

2. 如果 $f(x) \in \mathcal{C}(S)$, 则定理的条件在圆上的每一点 x_0 (或者等价地, 对于周期函数, 在实轴上的每一点) 均满足. 特别地, 如果 $f \in \mathcal{C}(S)$, 且 $f \in \mathcal{C}^1(S)$, 则 Fourier 级数在每一点都收敛到 f . 如果 $f \in \mathcal{C}(S)$, 并且是间断的, 我们可以在间断点按照规则 $f(x) = [f(x+) + f(x-)]/2$ 重新定义 f (当然, 在孤立点重新定义 f , 并不改变它的 Fourier 系数, 因为积分与被积函数在孤立点的数值无关), 使得 Fourier 级数在每一点都收敛到这个重新定义的 f .

3. 此定理也适用于端点 $\pm\pi$.

定理 11.4 若 $f(x) \in \mathcal{C}^1(S)$, 则它的 Fourier 级数一致收敛.

证 令 $\{c_m\}$ 是 f 的 Fourier 系数, $\{d_m\}$ 是 f' 的 Fourier 系数. 对于 d_m , 由 (11.5) 式出发, 分部积分即得: 当 $m \neq 0$ 时, $d_m = imc_m$ 或 $c_m = d_m/(im)$. 根据 Schwartz 不等式, 我们得到

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m| = |c_0| + \sum_{m \neq 0} \frac{|d_m|}{|m|} \leq |c_0| + \left(\sum_{m \neq 0} \frac{1}{m^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{m \neq 0} |d_m|^2 \right)^{1/2}.$$

因为 f' 连续, 它属于 \mathcal{L}_2 , 所以 $\sum |d_m|^2 < \infty$; 当然 $\sum (1/m^2) < \infty$. 因之 $\sum |c_m| < \infty$. 由 Weierstrass M -检验法知, $\sum c_m e^{imx}$ 一致收敛到某个函数, 按照定理 11.3, 它一定是 f . \square

推论 11.1 若 $f(x) \in \mathcal{C}^1(S)$, 则它的 Fourier 级数在 \mathcal{L}_2 的意义下收敛到 f .

证 我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx - 2\pi \sum_{k=-m}^m |c_k|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx} \right|^2 dx. \quad (11.20)$$

由于 Fourier 级数一致收敛到 f , 我们能够挑选足够大的 M , 使得

$$\left| f(x) - \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx} \right|^2 < \varepsilon, \quad m > M.$$

因此当 $m \rightarrow \infty$ 时, (11.20) 式右端趋于 0, Parseval 恒等式对 $f \in \mathcal{C}^1(S)$ 成立. \square

现在只要用函数 $g \in \mathcal{C}^1(S)$ 在 \mathcal{L}_2 的意义下逼近函数 f , 就能证明 Parseval 恒等式对于任意 \mathcal{L}_2 函数 f 也成立. 这样, 如果 $f \in \mathcal{L}_2(-\pi, \pi)$, 我们有

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx \quad (\text{Parseval 恒等式}), \quad (11.21)$$

其中

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx.$$

定理 11.5 若 $f(x) \in \mathcal{C}(S)$, 且满足 Lipschitz 条件 $|f(x') - f(x'')| \leq K |x' - x''|$, 则它的 Fourier 级数一致收敛到 $f(x)$.

证 任取函数 $g(x) \in \mathcal{C}(S)$, 一定存在正数 M , 使得对于 $\forall x \in S$, 有

$$|g(x)| < M.$$

令 $S_n(x)$ 为 $g(x)$ 的 Fourier 级数的部分和, 则根据 (11.10) 式, 只要 $n > 2$, 就有

$$\begin{aligned} |S_n(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t) D_n(t) dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |g(x-t)| \cdot |D_n(t)| dt \\ &\leq M \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \leq MC \ln n. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} |S_n(x) - g(x)| &\leq |S_n(x)| + |g(x)| \leq M + MC \ln n \\ &\leq M \left(\frac{\ln n}{\ln 2} + C \ln n \right) = MD \ln n, \end{aligned}$$

其中 D 为与 n 及 x 均无关的常数.

现在回到函数 $f(x)$, 它满足定理所设条件. 将 $f(x)$ 作 Fourier 展开, 令其部分和为 $s_n(x)$. 再任取三角多项式 $T_n(x)$. $T_n(x)$ 作为多项式, 其 Fourier 级数就是它本身, 而和函数 (有限项之和) 一定属于 $\mathcal{C}(S)$. 函数 $f(x) - T_n(x)$ 与 $f(x)$ 的差别表现在它们的 Fourier 级数只在于前面的有限项可能不同. 将 $f(x) - T_n(x)$ 看成上面的 $g(x)$, 其 Fourier 级数的部分和为 $S_n(x) = s_n(x) - T_n(x)$, 因此

$$|f(x) - T_n(x) - S_n(x)| \leq DM \ln n, \quad \text{即} \quad |f(x) - s_n(x)| \leq DM \ln n,$$

其中 M 是函数 $f(x) - T_n(x)$ 的上界, 即 $|f(x) - T_n(x)| \leq M$.

到目前为止, 我们只要求 $T_n(x)$ 是三角多项式而无其他限制. 现在如果取 (见 (11.12) 式)

$$T_n(x) = \frac{1}{\alpha_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cos^{2n} \frac{t}{2} dt,$$

其中的 α_n 见 (11.11) 式, 则按照 (11.13') 式, 有

$$|f(x) - T_n(x)| \leq \frac{K\pi}{\sqrt{n}}, \quad \text{即} \quad M = \frac{K\pi}{\sqrt{n}}.$$

因此

$$|f(x) - s_n(x)| \leq \frac{DK\pi \ln n}{\sqrt{n}},$$

即证得 $s_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$. □

11.2.4 Gibbs 现象

因为连续函数的一致收敛级数仍然一致收敛, 所以间断函数的 Fourier 级数在包含间断点在内的区间上不可能一致收敛. 让我们通过一个简单的例子来更仔细地检验不一致收敛性的细节. 设周期函数 $f(x+2\pi) = f(x)$ 在 $-\pi \leq x < \pi$ 内为 $f(x) = \operatorname{sgn} x - 2\eta(x) - 1$. 它的 Fourier 级数是正弦级数, $b_n = 2[1 - (-1)^n]/(n\pi)$. 这样我们能写出部分和

$$\begin{aligned} s_{2n+1}(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \int_0^x \cos(2k+1)y \, dy \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^x \left[\sum_{k=0}^n e^{i(2k+1)y} + \sum_{k=0}^n e^{-i(2k+1)y} \right] dy \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^x \left[\frac{1 - e^{i2(n+1)y}}{-2i \sin y} + \frac{1 - e^{-i2(n+1)y}}{2i \sin y} \right] dy \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2(n+1)y}{\sin y} dy = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2(n+1)y}{y} \frac{y}{\sin y} dy. \end{aligned}$$

现在来研究间断点 ($x=0$) 附近的行为. 取小正数 x , 则 $y/\sin y$ 在由 0 到 x 的整个区间内都接近于 1, 所以 $s_{2n+1}(x)$ 非常接近于

$$\frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2(n+1)y}{y} dy = \frac{2}{\pi} \int_0^{2(n+1)x} \frac{\sin u}{u} du = \frac{2}{\pi} \operatorname{Si}[2(n+1)x].$$

考虑到 $\sin u/u$ 的数值呈正、负交错的变化趋势, 可以预料 $s_{2n+1}(x)$ 或 $\operatorname{Si}[2(n+1)x]$ 会表现出衰减振荡的特征. 因为 $(2/\pi) \operatorname{Si}(\infty) = 1$, 容易看出 $(2/\pi) \operatorname{Si}(\pi)$ 的数值一定超过 1 (数值为 1.179...). 因此, 对于大的 n , 在 $x=0$ 附近一定存在一个数值 x_0 ($\approx \pi/(2n+2)$), 使部分和 s_{2n+1} 为 1.179... 这并不与 Fourier 级数在 $0 < x < \pi$ 内逐点收敛到 1 这一事实矛盾, 然而它清楚地表明此级数在含有 $x=0$ (无论是在区间内部或是作为区间的端点) 在内的区间内不一致收敛. 在第一类间断点处, 随着 n 值增大, 部分和可以超出跃度的 9%. 这就是所谓的 Gibbs 现象 (见图 11.1). \mathcal{D} 内的任何具有第一类间断点的函数都有这个现象. 这类函数总能写成为 \mathcal{D} 内的连

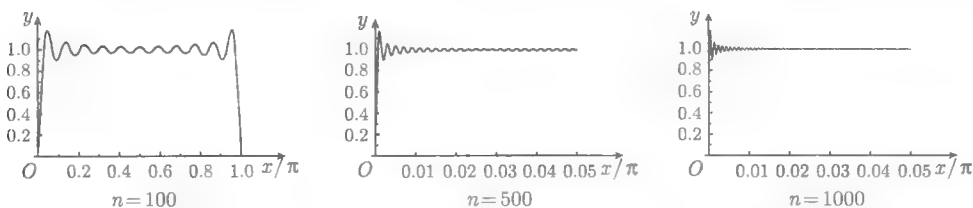


图 11.1 Gibbs 现象: 方形波的 Fourier 展开, 前 n 项的部分和

续函数及 $J_k \eta(x - x_k)$ 形式的各项之和, 其中 x_k 是间断点, J_k 是相应的跃度. 因为 $2\eta(x - x_k) = \operatorname{sgn}(x - x_k) + 1$, 上面的分析几乎可以直接应用到 $J_k \eta(x - x_k)$ 项上. 如果 $f(x)$ 是有界变差函数, 且没有可去间断点, 则其 Fourier 级数的部分和序列在 f 的每一个间断点、也仅仅这些间断点处出现 Gibbs 现象.

§11.3 Fourier 级数的 Cesàro 和与 Abel 和

可以将 Cesàro 求和法 (见第二章) 应用于 Fourier 级数 (11.1) 或 (11.4). 如果把 $a_k \cos kx + b_k \sin kx$ 或 $c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}$ 看成一项, 利用 (11.7) 式, 就可以求出此 Fourier 级数的 n 次算术平均

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{1}{n}(s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}) \\ &= \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [D_0(x-t) + D_1(x-t) + D_2(x-t) + \cdots + D_{n-1}(x-t)] dt \quad (11.22a)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) [D_0(t) + D_1(t) + D_2(t) + \cdots + D_{n-1}(t)] dt. \quad (11.22b)$$

定义 Fejer 核

$$\begin{aligned}F_n(x) &= \frac{1}{n} [D_0(x) + D_1(x) + D_2(x) + \cdots + D_{n-1}(x)] \\ &= \frac{1}{2n\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin[(k+1/2)x]}{\sin(x/2)} = \frac{1}{2n\pi} \frac{1}{\sin^2(x/2)} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x \sin \frac{x}{2} \\ &= \frac{1}{2n\pi} \frac{1}{\sin^2(x/2)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos kx - \cos(k+1)x}{2} \\ &= \frac{1}{2n\pi} \frac{1}{\sin^2(x/2)} \frac{1 - \cos nx}{2} = \frac{1}{2n\pi} \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}, \quad (11.23)\end{aligned}$$

则可将 $\sigma_n(x)$ 写成 $f(x)$ 与 Fejer 核的卷积形式:

$$\sigma_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_n(x-t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_n(t) dt. \quad (11.22')$$

由 (11.9) 式就能直接导出

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1, \quad (11.24a)$$

而且因为 $F_n(x) \geq 0$, 所以这就意味着有

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F_n(t)| dt = 1. \quad (11.24b)$$

由 (11.24) 式就能证明: 只要 $f(x)$ 在 S 上分段连续, 则其部分和的算术平均有界. 这是因为 f 分段连续, 所以一定存在正数 M , 使得对 $\forall x \in S$,

$$|f(x)| < M$$

成立, 因此有

$$\begin{aligned} |\sigma_n| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_n(t) dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| \cdot |F_n(t)| dt \\ &\leq M \int_{-\pi}^{\pi} |F_n(t)| dt = M. \end{aligned} \quad (11.25)$$

下面不加证明地列出有关 Fourier 级数的 Cesàro 和的几个定理, 相关证明可查阅关于 Fourier 级数的专著.

定理 11.6 若 $f(x) \in \mathcal{C}(S)$, 则其 Fourier 级数的 Cesàro 和在每一点都存在, 且等于 f 在该点的函数值; 其部分和的算术平均序列一致收敛到 $f(x)$.

定理 11.7 (Fejer 定理) 若函数 $f(x) \in \mathcal{C}(S)$, 只要 $f(x \pm)$ 存在, 则其 Fourier 级数在该点的 Cesàro 和为 $[f(x+) + f(x-)]/2$. 特别是, 若 f 在 x 点连续, 则级数在该点的 Cesàro 和为 $f(x)$.

定理 11.8 若函数 f 在 S 上分段连续, 则其 Fourier 级数可以不收敛; 但只要收敛, 就一定收敛到 $[f(x+) + f(x-)]/2$. 特别是, 如果函数 $f(x) \in \mathcal{C}(S)$, 其 Fourier 级数在某点收敛, 则在该点一定收敛到 $f(x)$.

为了将 Abel 求和法应用于 Fourier 级数 (11.1) 或 (11.4), 需要构造幂级数

$$f_r(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad 0 \leq r < 1.$$

对于每一个给定的正数 $r < 1$, 级数一致收敛, 因而定义了连续函数 $f_r(x)$. 仿照导出卷积公式 (11.7) 的办法, 写出部分和

$$\begin{aligned} &\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n r^k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \right] r^k \cos kx \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \right] r^k \sin kx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) r^k \cos k(x-t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n r^k \cos k(x-t) \right] dt. \end{aligned} \quad (11.26)$$

定义 Poisson 核

$$\delta_r(x) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kx \right] = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2}, \quad 0 \leq r < 1. \quad (11.27)$$

将 (11.26) 式求极限, 即得

$$f_r(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \delta_r(x-t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \delta_r(t) dt, \quad (11.28)$$

这正是熟悉的 Poisson 公式, 它也可以看成是 $f(x)$ 与 Poisson 核 $\delta_r(x)$ 的卷积.

若 $f(x) \equiv 1$, 因而 $f_r(x) \equiv 1$, 则由 (11.28) 式可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\delta_r(x)| dx = \int_{-\pi}^{\pi} \delta_r(x) dx = 1. \quad (11.29)$$

这里还用到一个事实: 当 $0 \leq r < 1$ 时 $\delta_r(x) > 0$.

下面同样不加证明地列出有关 Fourier 级数的 Abel 和的几个定理.

定理 11.9 若函数 $f(x) \in \mathcal{D}(S)$, 只要 $f(x \pm)$ 存在, 则其 Fourier 级数的 Abel 和为 $[f(x+) + f(x-)]/2$.

定理 11.10 若函数 $f \in \mathcal{C}(S)$, 则其 Fourier 级数的 Abel 和一致收敛.

下面的例 11.4, 原则上与 Abel 求和法有关, 或者说, 需要用到 Abel 第二定理. 这些级数并不复杂, 容易求出它们的和函数. 这里之所以要讨论这些级数和, 原因是第九章曾经用到过它们.

例 11.4 求下列级数之和:

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$, $0 < \theta < 2\pi$;
 (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2n+1}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{2n+1}$, $0 < \theta < \pi$.

解 (1) 因为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n \equiv z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{4} z^4 + \cdots = -\ln(1-z)$$

的收敛圆为 $|z| < 1$, 而且在收敛圆周上除 $z=1$ 点外亦收敛, 故根据 Abel 第二定理, 可令 $z = e^{i\theta}$ 而得

$$\begin{aligned} e^{i\theta} + \frac{1}{2} e^{i2\theta} + \frac{1}{3} e^{i3\theta} + \frac{1}{4} e^{i4\theta} + \cdots &= -\ln(1 - e^{i\theta}) = -\ln(1 - \cos \theta - i \sin \theta) \\ &= -\ln\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) - \ln\left(\sin \frac{\theta}{2} - i \cos \frac{\theta}{2}\right) = -\ln\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) + i \frac{\pi - \theta}{2}. \end{aligned}$$

因此就得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = \cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 3\theta}{3} + \frac{\cos 4\theta}{4} + \cdots = -\ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad (11.30a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} + \frac{\sin 4\theta}{4} + \cdots = \frac{1}{2}(\pi - \theta). \quad (11.30b)$$

☞ 讨论 可以将 (11.30a) 与 (11.30b) 两式改写为

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{n} &= -\ln(2 \sin \theta), & 0 < \theta < \pi, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{n} &= \frac{\pi}{2} - \theta, & 0 < \theta < \pi, \end{aligned}$$

于是就能求得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2n} \\ &= -\ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln(2 \sin \theta) \\ &= \frac{1}{2} \ln \cot \frac{\theta}{2}, & 0 < \theta < \pi, \end{aligned} \quad (11.31a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{2n} \\ &= \frac{\pi - \theta}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{\pi}{4}, & 0 < \theta < \pi. \end{aligned} \quad (11.31b)$$

(2) 因为

$$\cos 2n\theta = \cos(2n+1)\theta \cos \theta + \sin 2n\theta \sin \theta,$$

$$\sin 2n\theta = \sin(2n+1)\theta \cos \theta - \cos 2n\theta \sin \theta,$$

所以, 利用 (11.31a) 与 (11.31b) 两式的结果, 就能求出

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2n+1} &= \cos \theta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} + \sin \theta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} \\ &= -\frac{1}{2} \cos \theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \sin \theta, & 0 < \theta < \pi, \end{aligned} \quad (11.32)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{2n+1} &= \cos \theta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} - \sin \theta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} \\ &= \frac{\pi}{4} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \ln \tan \frac{\theta}{2}, & 0 < \theta < \pi. \end{aligned} \quad (11.33)$$

讨论

1. 类似地, 还可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2n+2} &= \cos 2\theta \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+2)\theta}{2n+2} + \sin 2\theta \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+2)\theta}{2n+2} \\ &= \cos 2\theta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2n} + \sin 2\theta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{2n} \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2\theta \ln(2 \sin \theta) + \frac{1}{2} \sin 2\theta \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right),\end{aligned}\quad (11.34)$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{2n+2} &= \cos 2\theta \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+2)\theta}{2n+2} - \sin 2\theta \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+2)\theta}{2n+2} \\ &= \cos 2\theta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{2n} - \sin 2\theta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2n} \\ &= \frac{1}{2} \cos 2\theta \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + \frac{1}{2} \sin 2\theta \ln(2 \sin \theta);\end{aligned}\quad (11.35)$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2n+3} &= \cos 3\theta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} + \sin 3\theta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} \\ &= -\frac{1}{2} \cos 3\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \sin 3\theta - \cos 2\theta,\end{aligned}\quad (11.36)$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{2n+3} &= \cos 3\theta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} - \sin 3\theta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} \\ &= \frac{\pi}{4} \cos 3\theta + \frac{1}{2} \sin 3\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + \sin 2\theta;\end{aligned}\quad (11.37)$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2n+4} &= \cos 4\theta \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2n} + \sin 4\theta \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{2n} \\ &= -\frac{1}{2} \cos 4\theta \ln(2 \sin \theta) + \frac{1}{2} \sin 4\theta \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) - \frac{1}{2} \cos 2\theta,\end{aligned}\quad (11.38)$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{2n+4} &= \cos 4\theta \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{2n} - \sin 4\theta \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2n} \\ &= \frac{1}{2} \cos 4\theta \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + \frac{1}{2} \sin 4\theta \ln(2 \sin \theta) + \frac{1}{2} \sin 2\theta.\end{aligned}\quad (11.39)$$

以上公式都是在区间 $0 < \theta < \pi$ 内成立.

2. 还可以有更普遍的结果:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{2n+2k+1} &= \frac{1}{2} \left[\sin(2k+1)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \cos(2k+1)\theta \right] \\ &\quad + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\sin(2k-2n)\theta}{2n+1},\end{aligned}\quad (11.40)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2n+2k+1} &= -\frac{1}{2} \left[\cos(2k+1)\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \sin(2k+1)\theta \right] \\ &\quad - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(2k-2n)\theta}{2n+1}, \end{aligned} \quad (11.41)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\theta}{2n+2k+2} &= \frac{1}{2} \left[\sin(2k+2)\theta \ln(2 \sin \theta) - \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \cos(2k+2)\theta \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\sin(2k-2n)\theta}{n+1}, \end{aligned} \quad (11.42)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{2n+2k+2} &= -\frac{1}{2} \left[\cos(2k+2)\theta \ln(2 \sin \theta) + \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \sin(2k+2)\theta \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(2k-2n)\theta}{n+1} \right]. \end{aligned} \quad (11.43)$$

3. 用同样方法也能得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+2} = \frac{1}{2} \left[\sin \theta \ln(2 \sin \theta) - \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \cos \theta \right], \quad (11.44)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+3} = \frac{1}{2} \left[\sin 2\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \cos 2\theta \right] + \sin \theta, \quad (11.45)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+4} = \frac{1}{2} \left[\sin 3\theta \ln(2 \sin \theta) - \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \cos 3\theta + \sin \theta \right], \quad (11.46)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+2k+1} = \frac{1}{2} \left[\sin 2k\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \cos 2k\theta \right] + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\sin(2k-2n-1)\theta}{2n+1}, \quad (11.47)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+2k+2} &= \frac{1}{2} \left[\sin(2k+1)\theta \ln(2 \sin \theta) - \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \cos(2k+1)\theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\sin(2k-2n-1)\theta}{n+1} \right], \end{aligned} \quad (11.48)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+2} = -\frac{1}{2} \left[\cos \theta \ln(2 \sin \theta) + \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \sin \theta \right], \quad (11.49)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+3} = -\frac{1}{2} \cos 2\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \sin 2\theta - \cos \theta, \quad (11.50)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+4} = -\frac{1}{2} \left[\cos 3\theta \ln(2 \sin \theta) + \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \sin 3\theta + \cos \theta \right], \quad (11.51)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+2k+1} = -\frac{1}{2} \cos 2k\theta \ln \tan \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \sin 2k\theta - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(2k-2n-1)\theta}{2n+1}, \quad (11.52)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+2k+2} &= \frac{1}{2} \left[\cos(2k+1)\theta \ln(2 \sin \theta) + \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \sin(2k+1)\theta \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\cos(2n-2k+1)\theta}{n+1} \right]. \end{aligned} \quad (11.53)$$

例 11.5 求下列级数之和:

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2};$$

$$(2) \cos \theta - \frac{\cos 5\theta}{5} + \frac{\cos 7\theta}{7} - \frac{\cos 11\theta}{11} + \cdots, \quad -\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{3}.$$

解 (1) 设

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)\theta \equiv \sin \theta - \frac{\sin 3\theta}{3^2} + \frac{\sin 5\theta}{5^2} - \frac{\sin 7\theta}{7^2} + \cdots,$$

逐项微商, 有

$$f'(\theta) = \cos \theta - \frac{\cos 3\theta}{3} + \frac{\cos 5\theta}{5} - \frac{\cos 7\theta}{7} + \cdots = \operatorname{Re} \{ \arctan(e^{i\theta}) \}.$$

因为

$$\begin{aligned} \arctan(e^{i\theta}) &= \frac{1}{2i} \ln \frac{1+ie^{i\theta}}{1-ie^{i\theta}} = \frac{1}{2i} \ln \frac{(1+ie^{i\theta})(1+ie^{-i\theta})}{(1-ie^{i\theta})(1+ie^{-i\theta})} \\ &= \frac{1}{2i} \ln \frac{i \cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1}{2i} \left(\ln \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\pi i}{2} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2} \ln \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}, \end{aligned}$$

所以 $f'(\theta) = \pi/4$. 又 $f(0) = 0$, 故积分即得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin(2n+1)\theta \equiv \sin \theta - \frac{\sin 3\theta}{3^2} + \frac{\sin 5\theta}{5^2} - \frac{\sin 7\theta}{7^2} + \cdots = \frac{\pi}{4} \theta. \quad (11.54)$$

(2) 因为

$$\begin{aligned} &1 - z^4 + z^6 - z^{10} + z^{12} - z^{16} + \cdots \\ &= (1 - z^4) + z^6(1 - z^4) + z^{12}(1 - z^4) + \cdots \\ &= \frac{1 - z^4}{1 - z^6} = \frac{1 + z^2}{1 + z^2 + z^4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + z + z^2} + \frac{1}{1 - z + z^2} \right), \end{aligned}$$

两端积分, 有

$$\begin{aligned}
 & z - \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{7}z^7 - \frac{1}{11}z^{11} + \dots \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{1+2z}{\sqrt{3}} - \arctan \frac{1-2z}{\sqrt{3}} \right) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}i} \left(\ln \frac{1+i\frac{1+2z}{\sqrt{3}}}{1-i\frac{1+2z}{\sqrt{3}}} - \ln \frac{1+i\frac{1-2z}{\sqrt{3}}}{1-i\frac{1-2z}{\sqrt{3}}} \right) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}i} \left[\ln \frac{\sqrt{3}+i(1+2z)}{\sqrt{3}-i(1+2z)} - \ln \frac{\sqrt{3}+i(1-2z)}{\sqrt{3}-i(1-2z)} \right].
 \end{aligned}$$

令 $z = e^{i\theta}$, 即得

$$\begin{aligned}
 & e^{i\theta} - \frac{1}{5}e^{i5\theta} + \frac{1}{7}e^{i7\theta} - \frac{1}{11}e^{i11\theta} + \dots \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}i} \left(\ln \frac{\sqrt{3}+i+2ie^{i\theta}}{\sqrt{3}-i-2ie^{i\theta}} - \ln \frac{\sqrt{3}+i-2ie^{i\theta}}{\sqrt{3}-i+2ie^{i\theta}} \right) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}i} \ln \left(\frac{\sqrt{3}+i+2ie^{i\theta}}{\sqrt{3}+i-2ie^{i\theta}} \frac{\sqrt{3}-i+2ie^{i\theta}}{\sqrt{3}-i-2ie^{i\theta}} \right) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}i} \ln \left(\frac{e^{-i\pi/3} + e^{i\theta}}{e^{-i\pi/3} - e^{i\theta}} \frac{e^{i\pi/3} - e^{i\theta}}{e^{i\pi/3} + e^{i\theta}} \right) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}i} \ln \left[\frac{1+e^{i(\theta+\pi/3)}}{1-e^{i(\theta+\pi/3)}} \frac{1-e^{i(\theta-\pi/3)}}{1+e^{i(\theta-\pi/3)}} \right].
 \end{aligned}$$

因为

$$\frac{1+e^{i2\alpha}}{1-e^{i2\alpha}} = -\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}} = i \cot \alpha.$$

所以

$$\begin{aligned}
 & e^{i\theta} - \frac{1}{5}e^{i5\theta} + \frac{1}{7}e^{i7\theta} - \frac{1}{11}e^{i11\theta} + \dots \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}i} \left[\ln \cot \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6} \right) - \ln \cot \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}i} \left[\ln \tan \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{2} \right) - \ln \tan \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\theta}{2} \right) + \pi i \right].
 \end{aligned}$$

比较实部, 即得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\cos(6n+1)\theta}{6n+1} - \frac{\cos(6n+5)\theta}{6n+5} \right] \\
 & \equiv \cos \theta - \frac{\cos 5\theta}{5} + \frac{\cos 7\theta}{7} - \frac{\cos 11\theta}{11} + \dots = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.
 \end{aligned} \tag{11.55a}$$

同时比较虚部, 还能得到

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\sin(6n+1)\theta}{6n+1} - \frac{\sin(6n+5)\theta}{6n+5} \right] \\
 &= \sin \theta - \frac{\sin 5\theta}{5} + \frac{\sin 7\theta}{7} - \frac{\sin 11\theta}{11} + \dots \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\ln \tan \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\theta}{2} \right) - \ln \tan \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\theta}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \frac{\theta}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}} - \tan \frac{\theta}{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3} \left(1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) + 4 \tan \frac{\theta}{2}}{\sqrt{3} \left(1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) - 4 \tan \frac{\theta}{2}} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3} + 2 \sin \theta}{\sqrt{3} - 2 \sin \theta}. \tag{11.55b}
 \end{aligned}$$

第十二章 Fourier 积分与 Fourier 变换

§12.1 Fourier 积分

12.1.1 由 Fourier 级数到 Fourier 积分

令函数 $f(x)$ 当 $|x| \rightarrow \infty$ 时足够快地趋于 0, 且 $f_T(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 在 $-T/2 \leq x < T/2$ 的区间上与 f 重合. 如果 f_T 满足 Dirichlet 条件, 则对于任意 x , 有

$$f_T(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x / T}, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\xi) e^{-2\pi i k \xi / T} d\xi.$$

所以, 对于 $|x| < T/2$, 有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2\pi}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\xi) e^{2\pi i k (x-\xi)/T} d\xi \right]. \quad (12.1)$$

令 $\omega_k = 2k\pi/T$, $\Delta\omega = 2\pi/T$ 以及

$$g(\omega, x, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} f(\xi) e^{i\omega(x-\xi)} d\xi,$$

则 (12.1) 式就变为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(\omega_k, x, T) \Delta\omega, \quad |x| < T/2, \quad (12.2)$$

对于大的 T , 可以把此式看成将区间 $(-\pi, \pi)$ 作等间隔划分时的 Riemann 和. 因此 (12.2) 式中的和本质上就是 ω 由 $-\infty$ 到 ∞ 的积分. 同时, 因为 $T \rightarrow \infty$, g 的表达式也变成 ξ 由 $-\infty$ 到 ∞ 的积分 (假设积分存在). 这样, 就得到函数 $f(x)$ 的 Fourier 的积分表达式

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad (12.3)$$

其中

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi. \quad (12.4)$$

公式 (12.4) 定义了 F 为 f 的 Fourier 变换, 而 (12.3) 式则指出了如何求 Fourier 变换的反演, 即如何由连续谱 $F(\omega)$ 重构 $f(x)$:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \tilde{f}(\omega), \quad f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}.$$

为了证明 (12.3) 式, 我们需要注意, 该式中的积分必须理解为

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R F(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (12.5)$$

假设 $f \in \mathcal{L}_1(-\infty, \infty)$, 故 F 存在. 将 F 的定义代入, 并交换积分次序, 我们得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R F(\omega) e^{i\omega x} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_{-R}^R e^{-i\omega(\xi-x)} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{\sin R(\xi-x)}{\pi(\xi-x)} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) \frac{\sin Ry}{\pi y} dy. \end{aligned}$$

因为 $\sin Ry/(\pi y)$ 是 $R \rightarrow \infty$ 时的 δ 型函数族¹, $\lim_{R \rightarrow \infty} [\sin Ry/(\pi y)] = \delta(y)$, 所以对于很大一类函数这个极限是 $f(x)$.

当函数 $f(x)$ 具有奇偶性时, Fourier 变换又具有特殊性. 例如, 若 $f(x)$ 为偶函数, 即 $f(-x) = f(x)$, 则根据 (12.4) 式, 有

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) (\cos \omega \xi - i \sin \omega \xi) d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \omega \xi d\xi.$$

显然有 $F(-\omega) = F(\omega)$, 因此由 (12.3) 式又有

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\omega) \cos \omega x d\omega.$$

这时我们便将 $F(\omega)$ 称为 $f(x)$ 的 Fourier 余弦变换, 记为 $F_c(\omega)$, 即

$$F_c(\omega) = \mathcal{F}_c\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \omega \xi d\xi, \quad (12.6)$$

$$f(x) = \mathcal{F}_c^{-1}\{F(\omega)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\omega) \cos \omega x d\omega. \quad (12.7)$$

同样, 如果 $f(x)$ 是奇函数, 即 $f(-x) = -f(x)$, 则有 $F(-\omega) = -F(\omega)$, 从而

$$F(\omega) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} i \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \omega \xi d\xi, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i \int_0^{\infty} F(\omega) \sin \omega x d\omega.$$

令 $iF(\omega) = F_s(\omega)$, 则

$$F_s(\omega) = \mathcal{F}_s\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \omega \xi d\xi, \quad (12.8)$$

$$f(x) = \mathcal{F}_s^{-1}\{F(\omega)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\omega) \sin \omega x d\omega, \quad (12.9)$$

$F_s(\omega)$ 称为 $f(x)$ 的 Fourier 正弦变换,

表 12.1 和表 12.2 中分别给出了部分初等函数的 Fourier 余弦变换和 Fourier 正弦变换.

^① $\sin Ry/(\pi y)$ 称为 Dirichlet 核, 可以参见《数学物理方法专题——数理方程与特殊函数》的第六章.

表 12.1 部分初等函数的 Fourier 余弦变换

$f(x), x \geq 0$	$F_c(\omega)$	成立条件
$\eta(a-x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\omega}{\omega}$	$a > 0$
$\cos x \eta(a-x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin a(1-\omega)}{1-\omega} + \frac{\sin a(1+\omega)}{1+\omega} \right]$	$a > 0$
$\sin x \eta(a-x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\cos a(1-\omega)}{1-\omega} + \frac{\cos a(1+\omega)}{1+\omega} \right]$	$a > 0$
e^{-x}	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2}$	
$\frac{1}{1+x^4}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)$	
$\frac{1}{\cosh \pi x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cosh \frac{\omega}{2}$	
$e^{-x^2/2}$	$e^{-\omega^2/2}$	
$\sin \frac{x^2}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\omega^2}{2} - \sin \frac{\omega^2}{2} \right)$	
$\cos \frac{x^2}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\omega^2}{2} + \sin \frac{\omega^2}{2} \right)$	
$(1-x^2)^{\nu-1/2} \eta(1-x)$	$2^{\nu-1/2} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \omega^{-\nu} J_\nu(\omega)$	$\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$
$\cos^{\nu-1} x \eta\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(\nu)}{2^{\nu-1}} \left[\Gamma\left(\frac{\nu-\omega+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+\omega+1}{2}\right) \right]^{-1}$	$\nu > 0$

例 12.1 求函数

$$f(x) = \operatorname{arccot} px \quad \text{与} \quad g(x) = \operatorname{arccot} px^2$$

的 Fourier 变换, 其中参数 $p > 0$.

解 因为 $f(x) = \operatorname{arccot} px$ 是奇函数, 所以

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \operatorname{arccot} px \, dx = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin \omega x \operatorname{arccot} px \, dx \\
 &= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-\frac{1}{\omega} \cos \omega x \operatorname{arccot} px \Big|_0^{\infty} - \frac{p}{\omega} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{1+p^2 x^2} \, dx \right) \\
 &= -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\omega} \left(1 - e^{-|\omega|/p} \right). \tag{12.10}
 \end{aligned}$$

表 12.2 部分初等函数的 Fourier 正弦变换

$f(x), x \geq 0$	$F_s(\omega)$	成立条件
e^{-x}	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{1+\omega^2}$	
$\frac{1}{e^{x\sqrt{2\pi}}-1} - \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}$	$\frac{1}{e^{\omega\sqrt{2\pi}}-1} - \frac{1}{\omega\sqrt{2\pi}}$	
$\frac{1}{\sinh(x\sqrt{\pi/2})} - \frac{1}{x\sqrt{\pi/2}}$	$\tanh\left(\omega\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) - 1$	
$xe^{-x^2/2}$	$\omega e^{-\omega^2/2}$	
$\frac{\sin ax}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ln \left \frac{a+\omega}{a-\omega} \right $	$a > 0$
$x(1-x^2)^{\nu-1/2} \eta(1-x)$	$2^{\nu-3/2} \Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right) \omega^{1-\nu} J_\nu(\omega)$	$\operatorname{Re} \nu > -1/2$

最后的积分可以用留数定理计算, 例如见 (7.5b) 式.

上述结果也可以看成 $f(x)$ 的 Fourier 正弦变换:

$$F_s(\omega) = iF(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\omega} (1 - e^{-\omega/p}). \quad (12.10')$$

这里去掉了指数函数中的绝对值符号, 是因为在正弦变换中已经限定 $\omega \geq 0$.

同样, 因为 $g(x) = \operatorname{arccot} px^2$ 是偶函数, 所以

$$\begin{aligned}
 G(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \operatorname{arccot} px^2 dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos \omega x \operatorname{arccot} px^2 dx \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega x \operatorname{arccot} px^2 \Big|_0^{\infty} + \frac{2p}{\omega} \int_0^{\infty} \frac{x \sin \omega x}{1+p^2 x^4} dx \right) \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega} e^{-|\omega|/\sqrt{2p}} \sin \frac{\omega}{\sqrt{2p}}.
 \end{aligned} \quad (12.11)$$

这也能看成 $g(x)$ 的 Fourier 余弦变换, 即

$$G_c(\omega) = G(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega} e^{-\omega/\sqrt{2p}} \sin \frac{\omega}{\sqrt{2p}}. \quad (12.11')$$

例 12.2 已知正弦积分

$$\operatorname{si}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

试计算

$$\mathcal{F}_s \{\text{si}(px)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin \omega x \text{si}(px) dx,$$

$$\mathcal{F}_c \{\text{si}(px)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos \omega x \text{si}(px) dx,$$

其中 $p > 0$.

解 因为

$$\text{si}(px) = - \int_{px}^\infty \frac{\sin t}{t} dt = - \int_x^\infty \frac{\sin pt}{t} dt,$$

所以有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s \{\text{si}(px)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin \omega x \text{si}(px) dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-\frac{1}{\omega} \cos \omega x \text{si}(px) \Big|_0^\infty + \frac{1}{\omega} \int_0^\infty \cos \omega x \frac{\sin px}{x} dx \right) \\ &= \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin(p+\omega)x + \sin(p-\omega)x}{x} dx \right] \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \omega > p, \\ -\frac{1}{2p} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \omega = p, \\ 0, & \omega < p, \end{cases} \end{aligned} \quad (12.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c \{\text{si}(px)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos \omega x \text{si}(px) dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos \omega x \int_x^\infty \frac{\sin pt}{t} dt dx \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega x \text{si}(px) \Big|_0^\infty + \frac{1}{\omega} \int_0^\infty \sin \omega x \frac{\sin px}{x} dx \right) \\ &= -\frac{1}{2\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos(p-\omega)x - \cos(p+\omega)x}{x} dx \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \ln \frac{p+\omega}{|p-\omega|}, & p \neq \omega > 0, \\ -\infty \text{ (对数发散)}, & p = \omega > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (12.13a)$$

当 $\omega = 0$ 时, 需要到 $\text{si}(x)$ 的另一个表达式

$$\text{si}(x) = - \int_0^{\pi/2} e^{-x \cos t} \cos(x \sin t) dt,$$

因而就能直接计算得

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_c\{\text{si}(px)\}|_{\omega=0} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \text{si}(px) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{p} \int_0^\infty \text{si} x dx \\
 &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{p} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-x \cos t} \cos(x \sin t) dt dx \\
 &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{p} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-x \cos t} \cos(x \sin t) dx dt \\
 &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{p} \int_0^{\pi/2} \cos t dt = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{p}.
 \end{aligned} \tag{12.13b}$$

例 12.3 已知余弦积分

$$\text{ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt, \quad x > 0,$$

试计算

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_s\{\text{ci}(px)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin \omega x \text{ci}(px) dx, \\
 \mathcal{F}_c\{\text{ci}(px)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos \omega x \text{ci}(px) dx,
 \end{aligned}$$

其中 $p > 0$.

解 因为

$$\text{ci}(px) = -\int_{px}^\infty \frac{\cos t}{t} dt = -\int_x^\infty \frac{\cos pt}{t} dt,$$

所以

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_s\{\text{ci}(px)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin \omega x \text{ci}(px) dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin \omega x \left(\int_x^\infty \frac{\cos pt}{t} dt \right) dx \\
 &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos pt}{t} \left(\int_0^t \sin \omega x dx \right) dt \\
 &= -\frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos pt}{t} (1 - \cos \omega t) dx \\
 &= -\frac{1}{2\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left[\frac{\cos pt - \cos(p+\omega)t}{t} + \frac{\cos pt - \cos(p-\omega)t}{t} \right] dt \\
 &= \begin{cases} -\frac{1}{2\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\ln \frac{|p-\omega|}{p} + \ln \frac{p+\omega}{p} \right), & p \neq \omega > 0, \\ \infty \text{ (对数发散)}, & p = \omega, \\ 0, & \omega = 0, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{12.14}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c\{\text{ci}(px)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos \omega x \text{ci}(px) dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos \omega x \left(\int_x^\infty \frac{\cos pt}{t} dt \right) dx \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos pt}{t} \left(\int_0^t \cos \omega x dx \right) dt \\
&= -\frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos pt}{t} \sin \omega t dt \\
&= -\frac{1}{2\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \left[\frac{\sin(p+\omega)t}{t} + \frac{\sin(\omega-p)t}{t} \right] dt \\
&= \begin{cases} -\frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \omega > p, \\ -\frac{1}{2p} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \omega = p, \\ 0, & \omega < p. \end{cases} \quad (12.15)
\end{aligned}$$

12.1.2 有关 Fourier 积分的几个重要定理

下面不加证明地介绍有关 Fourier 积分的几个重要定理. 尽管后面的计算中不见得需要直接引用这些定理, 但了解这些定理, 对于理解 Fourier 积分和 Fourier 变换, 肯定是有帮助的.

Riemann-Lebesgue 定理 设函数 $f(x) \in \mathcal{L}_1(-\infty, \infty)$, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = 0. \quad (12.16)$$

Fourier 积分收敛性定理 I 若函数 $f(x) \in \mathcal{L}_1(-\infty, \infty)$, 则

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos \lambda(x-t) dt = a$$

的充分必要条件是对于任意给定的 δ , 有

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^\delta [f(x+y) + f(x-y) - 2a] \frac{\sin \lambda y}{y} dy = 0.$$

Fourier 积分收敛性定理 II 若 $f(x) \in \mathcal{L}_1(-\infty, \infty)$ 是在含有 x 点在内的某区间内的有限变差函数, 则

$$\frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos \lambda(x-t) dt. \quad (12.17a)$$

若 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续且有限变差, 则

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos \lambda(x-t) dt, \quad (12.17b)$$

且积分在 (a, b) 内的任意区间上一致收敛.

Fourier 积分收敛性定理 III 设 $f(x) \in \mathcal{L}_1(-\infty, \infty)$, 如果对于某个正数 δ , 积分

$$\int_0^\delta |f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)| \frac{dy}{y}$$

存在 (特别是, 如果 $f(x)$ 在 x 点可微), 则 (12.17b) 式为真.

Fourier 积分收敛性定理 IV 设 $f(t)/(1+|t|) \in \mathcal{L}_1(-\infty, \infty)$, 令

$$a_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\sin xy}{y} dy,$$

$$b_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(y) \frac{1 - \cos xy}{y} dy - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} f(y) \frac{\cos xy}{y} dy - \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} f(y) \frac{\cos xy}{y} dy$$

在任意一个区间 $0 < \delta \leq x \leq \Delta$ 上绝对连续, 它们的导数分别为 $a(x)$ 与 $b(x)$. 若 $f(t)$ 在 $t = x$ 点的邻域内满足定理 12.2 或定理 12.3 的条件, 则

$$\frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)] = \int_0^\infty [a(u) \cos xu + b(u) \sin xu] du.$$

§12.2 Fourier 变换的 Parseval 公式

假设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的 Fourier 变换均存在, 即

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi, \quad (12.18a)$$

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi, \quad (12.18b)$$

同时, 它们的反演是

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F\}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad (12.18c)$$

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1}\{G\}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad (12.18d)$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma) d\sigma \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega+\sigma)x} dx \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma) \delta(\omega+\sigma) d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(-\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (12.19)$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-i\omega y}dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x+y)}d\omega \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\delta(x+y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(-x)dx.
\end{aligned} \tag{12.20}$$

类似的关系式还有

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \left[\int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma)e^{i\sigma x}d\sigma \right]^* \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \int_{-\infty}^{\infty} G^*(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega \int_{-\infty}^{\infty} G^*(\sigma)d\sigma \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\sigma)x}dx \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega \int_{-\infty}^{\infty} G^*(\sigma)\delta(\omega-\sigma)d\sigma \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^*(\omega)d\omega.
\end{aligned} \tag{12.21}$$

特别是, 取 $f(x) = g(x)$, 就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \tag{12.22}$$

另外, 还能得到

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{i\xi x}d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)d\xi \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\xi)x}dx \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\delta(\omega-\xi)d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)g(\omega)d\omega.
\end{aligned} \tag{12.23}$$

注意这里的 $g(\omega)$ 应理解为将函数 $g(x)$ 中的自变量 x 改写成 ω , 相应地, $G(x)$ 则是将 $G(\omega)$ 中的自变量 ω 改写成 x , 就是将 (12.18b) 和 (12.18d) 两式改写成

$$G(x) = \mathcal{F}\{g\}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{-ix\xi}d\xi, \tag{12.18b'}$$

$$g(\omega) = \mathcal{F}^{-1}\{G\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(x)e^{i\omega x}dx. \tag{12.18d'}$$

(12.19) - (12.23) 式均称为 Fourier 变换的 Parseval 公式. 在推导这些公式时, 都用到了交换积分次序, 因而都要求函数 $f(x)$, $g(x)$ (相应地, 函数 $F(\omega)$, $G(\omega)$) 满足一定的条件. 这里不做仔细的讨论. 但笼统地说, 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是在区间 $(-\infty, \infty)$ 上平方可积的, 则上述诸式均成立. 而如果从广义函数的角度来看, 这些等式自然在广义函数的意义下都成立.

类似地, 对于 Fourier 正弦变换, 也能证明

$$\int_0^{\infty} f(x)g^*(x)dx = \int_0^{\infty} F_s(\omega)G_s^*(\omega)d\omega, \quad (12.24)$$

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F_s(\omega)|^2 d\omega, \quad (12.25)$$

$$\int_0^{\infty} f(x)G_s(x)dx = \int_0^{\infty} F_s(\omega)g(\omega)d\omega. \quad (12.26)$$

对于 Fourier 余弦变换, 也有

$$\int_0^{\infty} f(x)g^*(x)dx = \int_0^{\infty} F_c(\omega)G_c^*(\omega)d\omega, \quad (12.27)$$

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F_c(\omega)|^2 d\omega, \quad (12.28)$$

$$\int_0^{\infty} f(x)G_c(x)dx = \int_0^{\infty} F_c(\omega)g(\omega)d\omega. \quad (12.29)$$

援用上述 Parseval 公式, 可以计算某些特定形式的积分.

例 12.4 作为应用 Parseval 公式的最简单的例子, 取 $f(x) = \eta(a - |x|)$, $g(x) = \eta(b - |x|)$, 则

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-i\omega x} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\omega}{\omega}.$$

$G(\omega)$ 也有类似的表达式, 于是应用 (12.19) 式或 (12.21) 式, 即得

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\omega}{\omega} \frac{\sin b\omega}{\omega} d\omega = \int_{-\min(a,b)}^{\min(a,b)} dx = 2 \min(a, b),$$

或者直接写成

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} dx = \pi \min(a, b). \quad (12.30)$$

例 12.5 计算积分 $\int_0^{\infty} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \ln \left| \frac{b+x}{b-x} \right| dx$, 其中 $a > 0$, $b > 0$.

解 因为(见表 12.2)

$$\mathcal{F}_s \left\{ \frac{\sin ax}{x} \right\} = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{a+\omega}{a-\omega} \right|, \quad \mathcal{F}_s \left\{ \frac{\sin bx}{x} \right\} = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{b+\omega}{b-\omega} \right|.$$

所以, 根据 (12.24) 式, 有

$$\int_0^{\infty} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \ln \left| \frac{b+x}{b-x} \right| dx = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \frac{\sin bx}{x} dx = \pi^2 \min(a, b). \quad (12.31)$$

例 12.6 计算积分 $\int_0^{\infty} \operatorname{arccot} px \operatorname{arccot} qx dx$, 其中 $p > 0, q > 0$.

解 上面的例 12.1 中已经计算过 $\operatorname{arccot} px$ 的 Fourier 正弦变换, 因此, 根据 (12.24) 式, 就能求得

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \operatorname{arccot} px \operatorname{arccot} qx dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-\omega/p}}{\omega} \frac{1-e^{-\omega/q}}{\omega} d\omega \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ -\frac{(1-e^{-\omega/p})(1-e^{-\omega/q})}{\omega} \Big|_0^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} [(1-e^{-\omega/p})(1-e^{-\omega/q})]' \frac{d\omega}{\omega} \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{p} e^{-\omega/p} (1-e^{-\omega/q}) + \frac{1}{q} e^{-\omega/q} (1-e^{-\omega/p}) \right] \frac{d\omega}{\omega} \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{p} \ln \left(1 + \frac{p}{q} \right) + \frac{1}{q} \ln \left(1 + \frac{q}{p} \right) \right]. \end{aligned} \quad (12.32)$$

例 12.7 计算积分 $\int_0^{\infty} \operatorname{arccot} \frac{x^2}{2p^2} \operatorname{arccot} \frac{x^2}{2q^2} dx$, 其中 $p > 0, q > 0$.

解 上面的例 12.1 中也已经计算过 $\operatorname{arccot} px^2$ 的 Fourier 变换, 因此有

$$\mathcal{F}_c \left\{ \operatorname{arccot} \frac{x^2}{2p^2} \right\} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega} e^{-\omega p} \sin \omega p,$$

根据 (12.27) 式, 就有

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \operatorname{arccot} \frac{x^2}{2p^2} \operatorname{arccot} \frac{x^2}{2q^2} dx &= 2\pi \int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega p)}{\omega} \frac{\sin(\omega q)}{\omega} e^{-\omega(p+q)} d\omega \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\omega p} - e^{-i\omega p}}{\omega} \frac{e^{i\omega q} - e^{-i\omega q}}{\omega} e^{-\omega(p+q)} d\omega. \end{aligned}$$

我们可以计算出积分

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \frac{e^{-\gamma x} - e^{-\delta x}}{x} dx &= \int_0^{\infty} \frac{[(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x})(e^{-\gamma x} - e^{-\delta x})]'}{x} dx \\ &= \int_0^{\infty} (-\alpha e^{-\alpha x} + \beta e^{-\beta x}) \frac{e^{-\gamma x} - e^{-\delta x}}{x} dx \\ &\quad + \int_0^{\infty} (-\gamma e^{-\gamma x} + \delta e^{-\delta x}) \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx \\ &= (\alpha + \gamma) \ln(\alpha + \gamma) - (\alpha + \delta) \ln(\alpha + \delta) - (\beta + \gamma) \ln(\beta + \gamma) + (\beta + \delta) \ln(\beta + \delta). \end{aligned} \quad (12.33)$$

在其中代入

$$\alpha = p(1-i), \quad \beta = p(1+i), \quad \gamma = q(1-i), \quad \delta = q(1+i),$$

就能得到

$$\begin{aligned} (\alpha+\gamma) \ln(\alpha+\gamma) &= (p+q)(1-i) \left[\ln(p+q) + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{i\pi}{4} \right] \\ &= (p+q) \left[\ln(p+q) + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} \right] - i(p+q) \left[\ln(p+q) + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} \right], \\ (\beta+\delta) \ln(\beta+\delta) &= (p+q)(1+i) \left[\ln(p+q) + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{i\pi}{4} \right] \\ &= (p+q) \left[\ln(p+q) + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} \right] + i(p+q) \left[\ln(p+q) + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} \right], \\ (\alpha+\delta) \ln(\alpha+\delta) &= [(p+q) - i(p-q)] \left[\frac{1}{2} \ln(p^2+q^2) + \frac{1}{2} \ln 2 - i \arctan \frac{p-q}{p+q} \right] \\ &= \frac{p+q}{2} \ln(p^2+q^2) + \frac{p+q}{2} \ln 2 - (p-q) \arctan \frac{p-q}{p+q} \\ &\quad - i \left[\frac{p-q}{2} \ln(p^2+q^2) + \frac{p-q}{2} \ln 2 + (p+q) \arctan \frac{p-q}{p+q} \right], \\ (\beta+\gamma) \ln(\beta+\gamma) &= [(p+q) + i(p-q)] \left[\frac{1}{2} \ln(p^2+q^2) + \frac{1}{2} \ln 2 + i \arctan \frac{p-q}{p+q} \right] \\ &= \frac{p+q}{2} \ln(p^2+q^2) + \frac{p+q}{2} \ln 2 - (p-q) \arctan \frac{p-q}{p+q} \\ &\quad + i \left[\frac{p-q}{2} \ln(p^2+q^2) + \frac{p-q}{2} \ln 2 + (p+q) \arctan \frac{p-q}{p+q} \right]. \end{aligned}$$

综合以上结果, 我们就求得

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \operatorname{arccot} \frac{x^2}{2p^2} \operatorname{arccot} \frac{x^2}{2q^2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[(p+q) \ln \frac{p^2+q^2}{(p+q)^2} + \frac{(p+q)\pi}{2} - 2(p-q) \arctan \frac{p-q}{p+q} \right]. \end{aligned} \quad (12.34)$$

例 12.8 计算积分 $\int_0^\infty \operatorname{si}(px) \operatorname{si}(qx) dx$ 与 $\int_0^\infty \operatorname{ci}(px) \operatorname{ci}(qx) dx$, 其中 $p > 0, q > 0$.

解 关于 $\operatorname{si}(px)$ 的 Fourier 正弦变换已在例 12.2 中给出, 所以, 根据公式 (12.24) 有

$$\int_0^\infty \operatorname{si}(px) \operatorname{si}(qx) dx = \frac{\pi}{2} \int_{\max(p,q)}^\infty \frac{d\omega}{\omega^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\max(p,q)}. \quad (12.35)$$

同样, $\operatorname{ci}(px)$ 的 Fourier 余弦变换见例 12.3, 故亦有

$$\int_0^\infty \operatorname{ci}(px) \operatorname{ci}(qx) dx = \frac{\pi}{2} \int_{\max(p,q)}^\infty \frac{d\omega}{\omega^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\max(p,q)}. \quad (12.36)$$

再利用 $\text{si}(px)$ 的 Fourier 余弦变换 (见例 12.2) 与 $\text{ci}(qx)$ 的 Fourier 正弦变换 (见例 12.3), 又能进一步推出

$$\int_0^{\infty} \ln \frac{p+\omega}{|p-\omega|} \ln \frac{q+\omega}{|q-\omega|} \frac{d\omega}{\omega^2} = \frac{\pi^2}{\max(p, q)}, \quad (12.37)$$

$$\int_0^{\infty} \ln \frac{|p^2 - \omega^2|}{p^2} \ln \frac{|q^2 - \omega^2|}{q^2} \frac{d\omega}{\omega^2} = \frac{\pi^2}{\max(p, q)}. \quad (12.38)$$

我们还能计算 $\int_0^{\infty} \text{si}(px) \text{ci}(qx) dx$. 不妨先假设 $p \geq q$, 这时根据 $\text{si}(px)$ 与 $\text{ci}(qx)$ 的 Fourier 正弦变换, 有

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \text{si}(px) \text{ci}(qx) dx &= \frac{1}{2} \int_p^{\infty} \ln \frac{\omega^2 - q^2}{q^2} \frac{d\omega}{\omega^2} \\ &= -\frac{1}{2\omega} \ln \frac{\omega^2 - q^2}{q^2} \Big|_p^{\infty} + \int_p^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - q^2} d\omega \\ &= \frac{1}{2p} \ln \frac{p^2 - q^2}{q^2} + \frac{1}{2q} \ln \frac{p+q}{p-q}. \end{aligned} \quad (12.39a)$$

当 $p = q$ 时, 可按 l'Hôpital 法则求极限:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \text{si}(qx) \text{ci}(qx) dx &= \lim_{p \rightarrow q} \left(\frac{1}{2p} \ln \frac{p^2 - q^2}{q^2} + \frac{1}{2q} \ln \frac{p+q}{p-q} \right) = \frac{1}{q} \ln 2. \end{aligned} \quad (12.39b)$$

如果 $p < q$, 则可利用 $\text{si}(px)$ 与 $\text{ci}(qx)$ 的 Fourier 余弦变换, 从而求得

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \text{si}(px) \text{ci}(qx) dx &= \frac{1}{2} \int_q^{\infty} \ln \frac{\omega + p}{\omega - p} \frac{d\omega}{\omega^2} \\ &= -\frac{1}{2\omega} \ln \frac{\omega + p}{\omega - p} \Big|_q^{\infty} + \frac{1}{2} \int_q^{\infty} \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{\omega + p} - \frac{1}{\omega - p} \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2q} \ln \frac{p+q}{q-p} + \frac{1}{2p} \ln \frac{q^2 - p^2}{q^2}. \end{aligned} \quad (12.39c)$$

还可以把这几种情形合并起来, 写成

$$\int_0^{\infty} \text{si}(px) \text{ci}(qx) dx = \begin{cases} \frac{1}{2p} \ln \frac{|p^2 - q^2|}{q^2} + \frac{1}{2q} \ln \frac{p+q}{|p-q|}, & p \neq q, \\ \frac{1}{q} \ln 2, & p = q. \end{cases} \quad (12.39')$$

§12.3 Fourier 变换的卷积公式

类似于 Parseval 公式的推导, 还能导出 Fourier 变换的卷积公式:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega\xi} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma) e^{i\sigma(x-\xi)} d\sigma \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\sigma)\xi} d\xi \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma) e^{i\sigma x} \delta(\omega-\sigma) d\sigma \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \tag{12.40}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma) G(\omega-\sigma) d\sigma &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\sigma x} dx \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-i(\omega-\sigma)y} dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-i\omega y} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma(x-y)} d\sigma \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-i\omega y} \delta(x-y) dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) e^{-i\omega x} dx. \tag{12.41}
 \end{aligned}$$

作为它们的特殊情形, 还可以在 (12.40) 式中代入 $x=0$, 或是在 (12.41) 式中代入 $\omega=0$, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(-\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega) d\omega, \tag{12.42}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma) G(-\sigma) d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx. \tag{12.43}$$

它们就是 Fourier 变换的 Parseval 公式, 见前面的 (12.19) 和 (12.20) 二式.

例 12.9 计算积分 $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\pi\xi^2}}{\cosh \pi\xi} e^{-i2\pi x\xi} d\xi$.

解 这个积分可以看成 $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \psi(x) e^{-i\omega x} dx$ 型的积分, 因而有可能应用卷积定理而计算出.

取 $\phi(x) = e^{-i\pi x^2}$, $\psi(x) = 1/\cosh \pi x$, 由表 12.1 可以检索得^①

$$\mathcal{F}\{e^{-i\pi x^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega^2/(4\pi)} e^{-i\pi/4}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\cosh \pi x}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\cosh(\omega/2)},$$

① 因为这两个函数都是偶函数, 它们的 Fourier 变换与 Fourier 余弦变换相同. 而 $1/\cosh \pi x$ 的 Fourier 变换可应用留数定理计算, 见第六章的例 6.6; $e^{-i\pi x^2}$ 的 Fourier 变换, 亦可通过自变量的变换化为 Γ 函数而求得.

所以, 按照 (12.41) 式, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\pi\xi^2}}{\cosh \pi\xi} e^{-i\omega\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega-\sigma)^2/(4\pi)}}{\cosh(\sigma/2)} e^{-i\pi/4} d\sigma.$$

作代换 $\omega = 2\pi x$, $\sigma = 2\pi t$, 即得

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\pi\xi^2}}{\cosh \pi\xi} e^{-i2\pi x\xi} d\xi = e^{-i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi(x-t)^2}}{\cosh \pi t} dt \\ &= e^{i\pi x^2} e^{-i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi t^2}}{\cosh \pi t} e^{-i2\pi x t} dt, \end{aligned}$$

即

$$e^{-i\pi x^2} f(x) = e^{-i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi t^2}}{\cosh \pi t} e^{-i2\pi x t} dt. \quad (12.44)$$

再将 x 改写为 $x \pm i/2$, 又有

$$\begin{aligned} e^{-i\pi(x+i/2)^2} f(x+i/2) &= e^{-i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi t^2}}{\cosh \pi t} e^{-i2\pi x t} e^{\pi t} dt, \\ e^{-i\pi(x-i/2)^2} f(x-i/2) &= e^{-i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi t^2}}{\cosh \pi t} e^{-i2\pi x t} e^{-\pi t} dt. \end{aligned}$$

两式相加, 得

$$\begin{aligned} &e^{-i\pi(x+i/2)^2} f(x+i/2) + e^{-i\pi(x-i/2)^2} f(x-i/2) \\ &= 2e^{-i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi(t^2-2xt)} dt = 2e^{-i\pi/4} e^{-i\pi x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi(t-x)^2} dt \\ &= 2e^{-i\pi/4} e^{-i\pi x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi t^2} dt = 2e^{-i\pi x^2}. \end{aligned}$$

即

$$e^{\pi x} f(x+i/2) + e^{-\pi x} f(x-i/2) = 2e^{-i\pi/4}. \quad (12.45)$$

在上面的计算中用到了

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin \pi x^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi x^2 dx = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (12.46)$$

另一方面, 由 $f(x)$ 的原始表达式又能直接写出

$$f(x+i/2) + f(x-i/2) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi\xi^2 - i2\pi x\xi} d\xi = 2e^{i\pi x^2} e^{-i\pi/4}. \quad (12.47)$$

这样就得到了关于 $f(x \pm i/2)$ 的一对代数方程, 消去 $f(x - i/2)$ 即得

$$(e^{\pi x} - e^{-\pi x}) f(x + i/2) = 2e^{-i\pi/4} (1 - e^{i\pi x^2} e^{-\pi x}).$$

将上式中的 x 改写成 $x - i/2$, 略加整理就得到所要求的积分

$$f(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\pi\xi^2}}{\cosh \pi\xi} e^{-i2\pi x\xi} d\xi = \frac{1}{\cosh \pi x} (e^{i\pi/4} - i e^{i\pi x^2}). \quad (12.48a)$$

分别比较实部和虚部, 还有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi\xi^2 \cos 2\pi x\xi}{\cosh \pi\xi} d\xi = \frac{1}{\cosh \pi x} \left(\sin \pi x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad (12.48b)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi\xi^2 \cos 2\pi x\xi}{\cosh \pi\xi} d\xi = \frac{1}{\cosh \pi x} \left(\cos \pi x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (12.48c)$$

 讨论 由 (12.48a) 式可以导出 $f(x \pm i/2)$, 即

$$f(x + i/2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi\xi}}{\cosh \pi\xi} e^{-i\pi\xi^2} e^{-i2\pi x\xi} d\xi = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sinh \pi x} (1 - e^{-\pi x} e^{i\pi x^2}), \quad (12.49)$$

$$f(x - i/2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi\xi}}{\cosh \pi\xi} e^{-i\pi\xi^2} e^{-i2\pi x\xi} d\xi = -\frac{e^{-i\pi/4}}{\sinh \pi x} (1 - e^{\pi x} e^{i\pi x^2}). \quad (12.50)$$

或者分别比较实部与虚部, 得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi\xi}}{\cosh \pi\xi} (\cos \pi\xi^2 \cos 2\pi x\xi - \sin \pi\xi^2 \sin 2\pi x\xi) d\xi \\ = \frac{1}{\sqrt{2} \sinh \pi x} [1 - e^{-\pi x} (\cos \pi x^2 + \sin \pi x^2)], \end{aligned} \quad (12.51)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi\xi}}{\cosh \pi\xi} (\cos \pi\xi^2 \sin 2\pi x\xi + \sin \pi\xi^2 \cos 2\pi x\xi) d\xi \\ = \frac{1}{\sqrt{2} \sinh \pi x} [1 - e^{-\pi x} (\cos \pi x^2 - \sin \pi x^2)], \end{aligned} \quad (12.52)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi\xi}}{\cosh \pi\xi} (\cos \pi\xi^2 \cos 2\pi x\xi - \sin \pi\xi^2 \sin 2\pi x\xi) d\xi \\ = -\frac{1}{\sqrt{2} \sinh \pi x} [1 - e^{\pi x} (\cos \pi x^2 + \sin \pi x^2)], \end{aligned} \quad (12.53)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi\xi}}{\cosh \pi\xi} (\cos \pi\xi^2 \sin 2\pi x\xi + \sin \pi\xi^2 \cos 2\pi x\xi) d\xi \\ = -\frac{1}{\sqrt{2} \sinh \pi x} [1 - e^{\pi x} (\cos \pi x^2 - \sin \pi x^2)]. \end{aligned} \quad (12.54)$$

将 (12.51) ~ (12.54) 式中的 x 换成 $-x$, 而后对应相加、减, 又能得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi\xi}}{\cosh \pi\xi} \cos \pi\xi^2 \cos 2\pi x\xi d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \pi x^2 + \sin \pi x^2), \quad (12.55)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi\xi}}{\cosh \pi\xi} \sin \pi\xi^2 \sin 2\pi x\xi \, d\xi \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2} \sinh \pi x} \left[1 - \cosh \pi x (\cos \pi x^2 + \sin \pi x^2) \right], \end{aligned} \quad (12.56)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi\xi}}{\cosh \pi\xi} \sin \pi\xi^2 \cos 2\pi x\xi \, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \pi x^2 - \sin \pi x^2), \quad (12.57)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi\xi}}{\cosh \pi\xi} \cos \pi\xi^2 \sin 2\pi x\xi \, d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \sinh \pi x} \left[1 - \cosh \pi x (\cos \pi x^2 - \sin \pi x^2) \right], \end{aligned} \quad (12.58)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi\xi}}{\cosh \pi\xi} \cos \pi\xi^2 \cos 2\pi x\xi \, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \pi x^2 + \sin \pi x^2), \quad (12.59)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi\xi}}{\cosh \pi\xi} \sin \pi\xi^2 \sin 2\pi x\xi \, d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \sinh \pi x} \left[1 - \cosh \pi x (\cos \pi x^2 + \sin \pi x^2) \right], \end{aligned} \quad (12.60)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi\xi}}{\cosh \pi\xi} \sin \pi\xi^2 \cos 2\pi x\xi \, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \pi x^2 - \sin \pi x^2), \quad (12.61)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi\xi}}{\cosh \pi\xi} \cos \pi\xi^2 \sin 2\pi x\xi \, d\xi \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2} \sinh \pi x} \left[1 - \cosh \pi x (\cos \pi x^2 - \sin \pi x^2) \right]. \end{aligned} \quad (12.62)$$

例 12.10 计算积分 $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\pi\xi^2}}{\sinh \pi\xi} e^{-i2\pi x\xi} \, d\xi$.

解 显然有

$$g(x) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi x\xi}{\sinh \pi\xi} e^{-i\pi\xi^2} \, d\xi = -2i \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\pi x\xi}{\sinh \pi\xi} e^{-i\pi\xi^2} \, d\xi.$$

这个积分可由例 12.9 中已有的结果推出.

首先注意到例 12.9 中的 $f(x + i/2)$, 有

$$\begin{aligned} f(x + i/2) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi(\xi^2 + 2x\xi)} \frac{e^{\pi\xi}}{\cosh \pi\xi} \, d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi(\xi^2 + 2x\xi)} (1 + \tanh \pi\xi) \, d\xi \\ &= e^{-i\pi/4} e^{i\pi x^2} - 2i \int_0^{\infty} e^{-i\pi\xi^2} \sin 2\pi x\xi \tanh \pi\xi \, d\xi, \end{aligned}$$

利用 (12.49) 式已经算出的积分值, 因而就有

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-i\pi\xi^2} \sin 2\pi x\xi \tanh \pi\xi \, d\xi &= \frac{e^{i\pi/4}}{2} \left(\frac{1 - e^{i\pi x^2} e^{-\pi x}}{\sinh \pi x} - e^{i\pi x^2} \right) \\
 &= \frac{e^{i\pi/4}}{2 \sinh \pi x} (1 - e^{i\pi x^2} \cosh \pi x). \quad (12.63)
 \end{aligned}$$

另一方面, 注意到 (见第六章例 6.17 的 (6.62) 式)

$$\tanh \pi\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \xi t}{\sinh t/2} dt = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\pi\xi t}{\sinh \pi t} dt,$$

于是, 又能将 (12.63) 式右端的积分改写为

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-i\pi\xi^2} \sin 2\pi x\xi \tanh \pi\xi \, d\xi &= 2 \int_0^{\infty} e^{-i\pi\xi^2} \sin 2\pi x\xi \, d\xi \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\pi\xi t}{\sinh \pi t} dt \\
 &= 2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sinh \pi t} \int_0^{\infty} e^{-i\pi\xi^2} \sin 2\pi t\xi \sin 2\pi x\xi \, d\xi. \quad (12.64)
 \end{aligned}$$

但因为

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^{\infty} e^{-i\pi\xi^2} \sin 2\pi t\xi \sin 2\pi x\xi \, d\xi &= \int_0^{\infty} e^{-i\pi\xi^2} [\cos 2\pi(x-t)\xi - \cos 2\pi(x+t)\xi] \, d\xi \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi\xi^2} [\cos 2\pi(x-t)\xi - \cos 2\pi(x+t)\xi] \, d\xi \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi\xi^2} [e^{-2\pi(x-t)\xi} - e^{-2\pi(x+t)\xi}] \, d\xi \\
 &= \frac{e^{-i\pi/4}}{2} e^{i\pi x^2} e^{i\pi t^2} (e^{-i2\pi xt} - e^{i2\pi xt}) \\
 &= -e^{i\pi/4} e^{i\pi x^2} e^{i\pi t^2} \sin 2\pi xt. \quad (12.65)
 \end{aligned}$$

综合 (12.65) 与 (12.63) 两式的结果, 就能将 (12.64) 式化为

$$-e^{i\pi/4} e^{i\pi x^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\pi t^2}}{\sinh \pi t} \sin 2\pi xt \, dt = \frac{e^{i\pi/4}}{2 \sinh \pi x} (1 - e^{i\pi x^2} \cosh \pi x),$$

即

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{i\pi t^2}}{\sinh \pi t} \sin 2\pi xt \, dt = \frac{1}{2 \sinh \pi x} (\cosh \pi x - e^{-i\pi x^2}).$$

比较实部和虚部, 即得

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \pi t^2}{\sinh \pi t} \sin 2\pi xt \, dt = \frac{\cosh \pi x - \cos \pi x^2}{2 \sinh \pi x}, \quad (12.66)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \pi t^2}{\sinh \pi t} \sin 2\pi xt \, dt = \frac{\sin \pi x^2}{2 \sinh \pi x}. \quad (12.67)$$

这正是所要计算的积分

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\pi\xi^2}}{\sinh \pi\xi} e^{-i2\pi x\xi} d\xi = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\pi\xi^2}}{\sinh \pi\xi} \sin 2\pi x\xi d\xi \\
 &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi\xi^2 - i \sin \pi\xi^2}{\sinh \pi\xi} \sin 2\pi x\xi d\xi \\
 &= -\frac{i}{\sinh \pi x} [(\cosh \pi x - \cos \pi x^2) - i \sin \pi x^2] \\
 &= -\frac{i}{\sinh \pi x} (\cosh \pi x - e^{i\pi x^2}).
 \end{aligned} \tag{12.68}$$

☞ 讨论 仿照例 12.9 的做法, 也能得到

$$\begin{aligned}
 \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi\xi}}{\sinh \pi\xi} (\cos \pi\xi^2 \cos 2\pi x\xi - \sin \pi\xi^2 \sin 2\pi x\xi) d\xi \\
 = \frac{1}{\cosh \pi x} \frac{e^{-\pi x}}{\sqrt{2}} (\cos \pi x^2 + \sin \pi x^2),
 \end{aligned} \tag{12.69}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi\xi}}{\sinh \pi\xi} (\cos \pi\xi^2 \sin 2\pi x\xi + \sin \pi\xi^2 \cos 2\pi x\xi) d\xi \\
 = \frac{1}{\cosh \pi x} \left[\sinh \pi x + \frac{e^{-\pi x}}{\sqrt{2}} (\cos \pi x^2 - \sin \pi x^2) \right],
 \end{aligned} \tag{12.70}$$

$$\begin{aligned}
 \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi\xi}}{\sinh \pi\xi} (\cos \pi\xi^2 \cos 2\pi x\xi - \sin \pi\xi^2 \sin 2\pi x\xi) d\xi \\
 = -\frac{1}{\cosh \pi x} \frac{e^{\pi x}}{\sqrt{2}} (\cos \pi x^2 + \sin \pi x^2),
 \end{aligned} \tag{12.71}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi\xi}}{\sinh \pi\xi} (\cos \pi\xi^2 \sin 2\pi x\xi + \sin \pi\xi^2 \cos 2\pi x\xi) d\xi \\
 = \frac{1}{\cosh \pi x} \left[\sinh \pi x - \frac{e^{\pi x}}{\sqrt{2}} (\cos \pi x^2 - \sin \pi x^2) \right]
 \end{aligned} \tag{12.72}$$

以及

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi\xi}}{\sinh \pi\xi} \cos \pi\xi^2 \cos 2\pi x\xi d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \pi x^2 + \sin \pi x^2), \tag{12.73}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi\xi}}{\sinh \pi\xi} \sin \pi\xi^2 \sin 2\pi x\xi d\xi = \frac{\tanh \pi x}{\sqrt{2}} (\cos \pi x^2 + \sin \pi x^2), \tag{12.74}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi\xi}}{\sinh \pi\xi} \sin \pi\xi^2 \cos 2\pi x\xi d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \pi x^2 - \sin \pi x^2), \tag{12.75}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi\xi}}{\sinh \pi\xi} \cos \pi\xi^2 \sin 2\pi x\xi d\xi = \tanh \pi x \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \pi x^2 - \sin \pi x^2) \right], \tag{12.76}$$

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-e^{-\pi\xi}}{\sinh \pi\xi} \cos \pi\xi^2 \cos 2\pi x\xi \, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \pi x^2 + \sin \pi x^2), \quad (12.77)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi\xi}}{\sinh \pi\xi} \sin \pi\xi^2 \sin 2\pi x\xi \, d\xi = \frac{\tanh \pi x}{\sqrt{2}} (\cos \pi x^2 + \sin \pi x^2), \quad (12.78)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi\xi}}{\sinh \pi\xi} \sin \pi\xi^2 \cos 2\pi x\xi \, d\xi = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \pi x^2 - \sin \pi x^2), \quad (12.79)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi\xi}}{\sinh \pi\xi} \cos \pi\xi^2 \sin 2\pi x\xi \, d\xi = \tanh \pi x \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \pi x^2 - \sin \pi x^2) \right]. \quad (12.80)$$

§12.4 Γ 函数的 Fourier 变换

作为本节讨论的出发点, 需要用到积分

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{p-2} \theta \, e^{ix\theta} \, d\theta = 2^{2-p} \frac{\pi \Gamma(p-1)}{\Gamma((p-x)/2) \Gamma((p+x)/2)}, \quad \operatorname{Re} p > 1. \quad (12.81)$$

这个积分实际上在例 7.5 中已经计算过, 不再重复, 只是需要明确一下公式成立的准确条件是 $\operatorname{Re} p > 1$. 各种不同解法过程中, 可能还出现了其他限制, 例如要求 $\operatorname{Re}(x-p) > -2$, 但容易看出, 根据解析延拓理论, 这个限制可以去掉.

例 12.11 可以从 Fourier 变换的角度重新考察积分 (12.81). 它可以看成函数 $\cos^{p-2} \theta \cdot \eta\left(\frac{\pi}{2} - |\theta|\right)$ 的 Fourier 逆变换:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{p-2} \theta \, e^{ix\theta} \, d\theta = 2^{2-p} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma(p-1)}{\Gamma((p-x)/2) \Gamma((p+x)/2)}. \quad (12.82a)$$

因此, 作为 Fourier 变换本身, 我们就有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\theta}}{\Gamma((p-x)/2) \Gamma((p+x)/2)} \, dx = \frac{2^{p-1}}{\Gamma(p-1)} \cos^{p-2} \theta \, \eta\left(\frac{\pi}{2} - |\theta|\right). \quad (12.82b)$$

或者令 $p = \alpha + \beta$, $x = 2\xi + \alpha - \beta$, 于是在 $\operatorname{Re}(\alpha + \beta) > 1$ 的条件下, 上式变为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i2\xi\theta}}{\Gamma(\alpha + \xi) \Gamma(\beta - \xi)} \, d\xi = \frac{2^{\alpha+\beta-2}}{\Gamma(\alpha + \beta - 1)} e^{i(\alpha-\beta)\theta} \cos^{\alpha+\beta-2} \theta \, \eta\left(\frac{\pi}{2} - |\theta|\right), \quad (12.83)$$

特别是, 当 $\theta = 0$ 时, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+\xi)\Gamma(\beta-\xi)} d\xi = \frac{2^{\alpha+\beta-2}}{\Gamma(\alpha+\beta-1)}. \quad (12.84)$$

上述二式也可改写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi\theta}}{\Gamma(\alpha+\mu+\xi)\Gamma(\alpha-\mu-\xi)} d\xi = \frac{2^{2\alpha-2}}{\Gamma(2\alpha-1)} e^{i\mu\theta} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{2\alpha-2} \eta(\pi-|\theta|), \quad (12.83')$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+\mu+\xi)\Gamma(\alpha-\mu-\xi)} d\xi = \frac{2^{2\alpha-2}}{\Gamma(2\alpha-1)}. \quad (12.84')$$

相应地, 成立条件则为 $\operatorname{Re} \alpha > 1/2$. 当 $\mu = 0$ 时, 更有

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+\xi)\Gamma(\alpha-\xi)} d\xi = \frac{2^{2\alpha-3}}{\Gamma(2\alpha-1)}. \quad (12.85)$$

讨论 还可以将 (12.83') 式进一步改写为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(x+\mu)t}}{\Gamma(\alpha+k\mu+kx)\Gamma(\alpha-k\mu-kx)} dx = \frac{1}{k} \frac{2^{2\alpha-2}}{\Gamma(2\alpha-1)} \left(\cos \frac{t}{2k}\right)^{2\alpha-2} \eta(k\pi-|t|), \quad (12.86)$$

其中 $k > 0$. 例如, 当 $k = 2$ 时, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(x+\mu)t}}{\Gamma(\alpha+2\mu+2x)\Gamma(\alpha-2\mu-2x)} dx = \frac{2^{2\alpha-3}}{\Gamma(2\alpha-1)} \left(\cos \frac{t}{4}\right)^{2\alpha-2} \eta(2\pi-|t|); \quad (12.87)$$

而当 $k = 3$ 时, 则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(x+\mu)t}}{\Gamma(\alpha+3\mu+3x)\Gamma(\alpha-3\mu-3x)} dx = \frac{1}{3} \frac{2^{2\alpha-2}}{\Gamma(2\alpha-1)} \left(\cos \frac{t}{6}\right)^{2\alpha-2} \eta(3\pi-|t|). \quad (12.88)$$

例 12.12 从 (12.83') 式出发, 还可以计算

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi\xi}{\sin \pi\xi} \frac{d\xi}{\Gamma(\alpha+\mu+\xi)\Gamma(\alpha-\mu-\xi)}, \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi\xi}{\sin \pi\xi} \frac{d\xi}{\Gamma(\alpha+\mu+\xi)\Gamma(\alpha-\mu-\xi)} \end{aligned}$$

等类型的积分. 注意到

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2n+1)\pi\xi}{\sin \pi\xi} &= e^{i2n\pi\xi} + e^{i2(n-1)\pi\xi} + \dots + e^{i2\pi\xi} + 1 \\ &\quad + e^{-i2\pi\xi} + \dots + e^{-i2(n-1)\pi\xi} + e^{-i2n\pi\xi}, \end{aligned} \quad (12.89a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2n\pi\xi}{\sin \pi\xi} &= e^{i(2n-1)\pi\xi} + e^{i(2n-3)\pi\xi} + \dots + e^{i\pi\xi} \\ &\quad + e^{-i\pi\xi} + \dots + e^{-i(2n-3)\pi\xi} + e^{-i(2n-1)\pi\xi}, \end{aligned} \quad (12.89b)$$

所以根据 (12.83') 式, 就能得到

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi\xi}{\sin \pi\xi} \frac{d\xi}{\Gamma(\alpha+\mu+\xi) \Gamma(\alpha-\mu-\xi)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\Gamma(\alpha+\mu+\xi) \Gamma(\alpha-\mu-\xi)} = \frac{2^{2\alpha-2}}{\Gamma(2\alpha-1)}, \end{aligned} \quad (12.90)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi\xi}{\sin \pi\xi} \frac{d\xi}{\Gamma(\alpha+\mu+\xi) \Gamma(\alpha-\mu-\xi)} = 0. \quad (12.91)$$

同理, 因为

$$\frac{\cos(2n+1)\pi\xi}{\cos \pi\xi} = e^{i2n\pi\xi} - e^{i(2n-2)\pi\xi} + \dots + (-1)^n + \dots + e^{-i(2n-2)\pi\xi} - e^{-i2n\pi\xi}, \quad (12.92a)$$

$$\frac{\sin 2n\pi\xi}{\cos \pi\xi} = \frac{1}{i} \left[e^{i(2n-1)\pi\xi} - e^{i(2n-3)\pi\xi} + \dots + e^{-i(2n-3)\pi\xi} - e^{-i(2n-1)\pi\xi} \right], \quad (12.92b)$$

所以也有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi\xi}{\cos \pi\xi} \frac{d\xi}{\Gamma(\alpha+\mu+\xi) \Gamma(\alpha-\mu-\xi)} = (-1)^n \frac{2^{2\alpha-2}}{\Gamma(2\alpha-1)}, \quad (12.93)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi\xi}{\cos \pi\xi} \frac{d\xi}{\Gamma(\alpha+\mu+\xi) \Gamma(\alpha-\mu-\xi)} = 0. \quad (12.94)$$

将 (12.89a) 及 (12.89b) 式中的 ξ 改为 $\xi/2$, 又能得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n+1/2)\pi\xi}{\sin(\pi\xi/2)} \frac{d\xi}{\Gamma(\alpha+\mu+\xi) \Gamma(\alpha-\mu-\xi)} = \frac{2^{2\alpha-2}}{\Gamma(2\alpha-1)}, \quad (12.95)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin n\pi\xi}{\sin(\pi\xi/2)} \frac{d\xi}{\Gamma(\alpha+\mu+\xi) \Gamma(\alpha-\mu-\xi)} \\ &= \frac{2^{2\alpha-2}}{\Gamma(2\alpha-1)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2\alpha-2} (e^{i\mu\pi/2} + e^{-i\mu\pi/2}) = \frac{2^\alpha}{\Gamma(2\alpha-1)} \cos \frac{\mu\pi}{2}. \end{aligned} \quad (12.96)$$

将 (12.92a) 及 (12.92b) 两式中的 ξ 改为 $\xi/2$, 也有

$$\begin{aligned} \frac{\cos(n+1/2)\pi\xi}{\cos(\pi\xi/2)} &= e^{in\pi\xi} - e^{i(n-1)\pi\xi} + \dots + (-1)^n + \dots \\ &\quad + e^{-i(n-1)\pi\xi} - e^{-in\pi\xi}, \end{aligned} \quad (12.92a')$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin n\pi\xi}{\cos(\pi\xi/2)} &= \frac{1}{i} \left[e^{i(n-1/2)\pi\xi} - e^{i(n-3/2)\pi\xi} + \dots + (-1)^{n-1} e^{i\pi/2} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n e^{-i\pi/2} + \dots + e^{-i(n-3/2)\pi\xi} - e^{-i(n-1/2)\pi\xi} \right], \end{aligned} \quad (12.92b')$$

于是也能得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(n+1/2)\pi\xi}{\cos(\pi\xi/2)} \frac{d\xi}{\Gamma(\alpha+\mu+\xi) \Gamma(\alpha-\mu-\xi)} = (-1)^n \frac{2^{2\alpha-2}}{\Gamma(2\alpha-1)} \quad (12.97)$$

以及

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin n\pi\xi}{\cos(\pi\xi/2)} \frac{d\xi}{\Gamma(\alpha+\mu+\xi)\Gamma(\alpha-\mu-\xi)} \\
 &= \frac{2^{2\alpha-2}}{\Gamma(2\alpha-1)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2\alpha-2} \frac{(-1)^n}{i} (e^{i\mu\pi/2} - e^{-i\mu\pi/2}) \\
 &= (-1)^n \frac{2^\alpha}{\Gamma(2\alpha-1)} \sin \frac{\mu\pi}{2}.
 \end{aligned} \tag{12.98}$$

可以预料, 如果将 (12.89) 及 (12.92) 两式中的 ξ 改写成 $\xi/3, \xi/4, \dots$, 还能得到一系列新的结果.

例 12.13 如果取

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)}, \quad g(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta+\nu+x)\Gamma(\beta-\nu-x)},$$

于是, 由 Fourier 变换的 Parseval 公式 (12.19), 则有

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+\nu+x)\Gamma(\beta-\nu-x)} \\
 &= \frac{2^{2\alpha+2\beta-4}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\cos \frac{t}{2}\right)^{2\alpha+2\beta-4} e^{i\mu t} e^{-i\nu t} \eta(\pi-|t|) dt \\
 &= \frac{2^{2\alpha+2\beta-4}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos \frac{t}{2}\right)^{2\alpha+2\beta-4} e^{i(\mu-\nu)t} dt.
 \end{aligned}$$

令 $\theta = t/2$, 并利用 (12.81) 式的结果, 在 $\operatorname{Re}(\alpha+\beta) > 3/2$ 的条件下, 就得到

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+\nu+x)\Gamma(\beta-\nu-x)} \\
 &= \frac{\Gamma(2\alpha+2\beta-3)}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)\Gamma(\alpha+\beta+\mu-\nu-1)\Gamma(\alpha+\beta-\mu+\nu-1)}.
 \end{aligned} \tag{12.99}$$

例 12.14 取与例 12.13 相同的 $f(x)$ 与 $g(x)$, 利用 Fourier 变换的卷积公式 (12.41), 则又有

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt}}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+\nu+x)\Gamma(\beta-\nu-x)} dx \\
 &= \frac{2^{2\alpha+2\beta-4}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \frac{1}{2\pi} \\
 & \quad \times \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos \frac{\tau}{2}\right)^{2\alpha-2} \left(\cos \frac{t-\tau}{2}\right)^{2\beta-2} e^{i\mu\tau} e^{i\nu(t-\tau)} \eta(\pi-|t-\tau|) d\tau,
 \end{aligned} \tag{12.100a}$$

亦即

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(x+\nu)t}}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+\nu+x)\Gamma(\beta-\nu-x)} dx \\
&= \frac{2^{2\alpha+2\beta-5}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \frac{1}{\pi} \\
& \quad \times \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos \frac{\tau}{2}\right)^{2\alpha-2} \left(\cos \frac{t-\tau}{2}\right)^{2\beta-2} e^{i(\mu-\nu)\tau} \eta(\pi-|t-\tau|) d\tau. \quad (12.100b)
\end{aligned}$$

若令 $t = 0$, 就可以得到 (12.99) 式. 而如果 $t = \pm\pi$, 则有

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mp i(x+\nu)\pi}}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+\nu+x)\Gamma(\beta-\nu-x)} dx \\
&= \frac{2^{2\alpha+2\beta-4}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-2}\theta \sin^{2\beta-2}\theta e^{\pm 2i(\mu-\nu)\theta} d\theta.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x+\nu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+\nu+x)\Gamma(\beta-\nu-x)} dx \\
&= \frac{2^{2\alpha+2\beta-4}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-2}\theta \sin^{2\beta-2}\theta \cos 2(\mu-\nu)\theta d\theta, \quad (12.101a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x+\nu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+\nu+x)\Gamma(\beta-\nu-x)} dx \\
&= -\frac{2^{2\alpha+2\beta-4}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-2}\theta \sin^{2\beta-2}\theta \sin 2(\mu-\nu)\theta d\theta. \quad (12.101b)
\end{aligned}$$

当 $2(\mu-\nu)$ 为整数时, 即可计算出右端的积分. 例如, 当 $\mu = \nu$ 时, 有

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mp i(x+\mu)\pi}}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+\mu+x)\Gamma(\beta-\mu-x)} dx \\
&= \frac{2^{2\alpha+2\beta-4}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-2}\theta \sin^{2\beta-2}\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta-1)}, \quad (12.102)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x+\mu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+\mu+x)\Gamma(\beta-\mu-x)} dx \\
&= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta-1)}, \quad (12.103)
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x+\mu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+\mu+x)\Gamma(\beta-\mu-x)} dx = 0, \quad (12.104)$$

或者写成

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mp i\pi x} dx}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+\mu+x)\Gamma(\beta-\mu-x)} = \frac{e^{\pm i\mu\pi}}{2\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta-1)}, \quad (12.105)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x dx}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+\mu+x)\Gamma(\beta-\mu-x)} = \frac{\cos \mu\pi}{2\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta-1)}, \quad (12.106)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x dx}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+\mu+x)\Gamma(\beta-\mu-x)} = -\frac{\sin \mu\pi}{2\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta-1)}. \quad (12.107)$$

如果 $\mu - \nu = \pm 1/2$, (12.101) 式变为

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x+\mu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+\mu+x\mp 1/2)\Gamma(\beta-\mu-x\pm 1/2)} dx \\ &= \pm \frac{2^{2\alpha+2\beta-4}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-2}\theta \sin^{2\beta-1}\theta d\theta \\ &= \pm \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-1/2)\Gamma(\alpha+\beta-1/2)}, \end{aligned} \quad (12.108)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x+\mu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+\mu+x\mp 1/2)\Gamma(\beta-\mu-x\pm 1/2)} dx \\ &= -\frac{2^{2\alpha+2\beta-4}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-1}\theta \sin^{2\beta-2}\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha-1/2)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta-1/2)}. \end{aligned} \quad (12.109)$$

如果 $\mu - \nu = \pm 1$, 则

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x+\mu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+\mu+x\mp 1)\Gamma(\beta-\mu-x\pm 1)} dx \\ &= -\frac{2^{2\alpha+2\beta-4}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-1}\theta \sin^{2\beta-1}\theta \cos 2\theta d\theta \\ &= -\frac{\alpha-\beta}{2\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}, \end{aligned} \quad (12.110)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x+\mu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+\mu+x\mp 1)\Gamma(\beta-\mu-x\pm 1)} dx \\ &= \pm \frac{2^{2\alpha+2\beta-4}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-1}\theta \sin^{2\beta-1}\theta \sin 2\theta d\theta \\ &= \pm \frac{1}{\Gamma(\alpha-1/2)\Gamma(\beta-1/2)\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned} \quad (12.111)$$

特别是当 $\mu = 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\alpha-x) \Gamma(\beta+x) \Gamma(\beta-x)} dx \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\alpha+\beta-1)}, \end{aligned} \quad (12.112)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\alpha-x) \Gamma(\beta+x) \Gamma(\beta-x)} dx = 0; \quad (12.113)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\alpha-x) \Gamma(\beta+x \mp 1/2) \Gamma(\beta-x \pm 1/2)} dx \\ &= \pm \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta-1/2) \Gamma(\alpha+\beta-1/2)}, \end{aligned} \quad (12.114)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\alpha-x) \Gamma(\beta+x \mp 1/2) \Gamma(\beta-x \pm 1/2)} dx \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha-1/2) \Gamma(\beta) \Gamma(\alpha+\beta-1/2)}; \end{aligned} \quad (12.115)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\alpha-x) \Gamma(\beta+x \mp 1) \Gamma(\beta-x \pm 1)} dx \\ &= -\frac{\alpha-\beta}{2\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\alpha+\beta)}, \end{aligned} \quad (12.116)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{\Gamma(\alpha+x) \Gamma(\alpha-x) \Gamma(\beta+x \mp 1) \Gamma(\beta-x \pm 1)} dx \\ &= \pm \frac{1}{\Gamma(\alpha-1/2) \Gamma(\beta-1/2) \Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned} \quad (12.117)$$

由 (12.100a) 式还可看出, 当 t 为整数 $k=2, 3, 4, \dots$ 时, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\mp ik\pi x}}{\Gamma(\alpha+\mu+x) \Gamma(\alpha-\mu-x) \Gamma(\beta+\nu+x) \Gamma(\beta-\nu-x)} dx = 0. \quad (12.118)$$

当 $\beta = 1, 2, 3, \dots$ 时, 也能直接计算出 (12.101a) 式右端的积分. 例如, 当 $\beta = 1$ 时, (12.101a) 式变为

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x+\nu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x) \Gamma(\alpha-\mu-x) \Gamma(1+\nu+x) \Gamma(1-\nu-x)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2(x+\nu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x) \Gamma(\alpha-\mu-x)} \frac{dx}{x+\nu} \\ &= \frac{2^{2\alpha-2}}{\Gamma(2\alpha-1)} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-2} \theta \cos 2(\mu-\nu)\theta d\theta, \end{aligned}$$

因此, 援引 (12.81) 式的结果就可得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2(x+\nu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x) \Gamma(\alpha-\mu-x)} \frac{\Gamma(x+\nu)}{\Gamma(x+\nu+1)} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(\alpha+\mu-\nu) \Gamma(\alpha-\mu+\nu)}. \quad (12.119)$$

类似地, 当 $\beta = 2$ 时, 也有

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2(x+\nu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)} \frac{\Gamma(x+\nu-1)}{\Gamma(x+\nu+2)} dx \\
 &= -2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x+\nu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(2+\nu+x)\Gamma(2-\nu-x)} dx \\
 &= -\frac{2^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha-1)} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-2}\theta \sin^2\theta \cos 2(\mu-\nu)\theta d\theta \\
 &= \frac{\pi [2(\mu-\nu)^2 - \alpha]}{\Gamma(\alpha+\mu-\nu+1)\Gamma(\alpha-\mu+\nu+1)}. \quad (12.120)
 \end{aligned}$$

例 12.15 仿照例 12.14 的做法, 取

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)}, \quad g(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta+2\nu+2x)\Gamma(\beta-2\nu-2x)},$$

也能写出

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt}}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+2\nu+2x)\Gamma(\beta-2\nu-2x)} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{2^{2\alpha+2\beta-5}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \int_{-2\pi}^{2\pi} \left(\cos \frac{t-\tau}{2}\right)^{2\alpha-2} \left(\cos \frac{\tau}{4}\right)^{2\beta-2} \\
 & \quad \times e^{i\mu(t-\tau)} e^{i\nu\tau} \eta(\pi-|t-\tau|) d\tau. \quad (12.121)
 \end{aligned}$$

若 $t = \pm\pi$, 则由 (12.121) 式可得

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i(x+\mu)\pi}}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+2\nu+2x)\Gamma(\beta-2\nu-2x)} dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{2^{2\alpha+2\beta-6}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{t-\tau}{2}\right)^{2\alpha-2} \left(\cos \frac{\tau}{4}\right)^{2\beta-2} e^{-i(\mu-\nu)\tau} d\tau \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{2^{4\alpha+2\beta-6}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha-2}\theta \cos^{2\alpha+2\beta-4}\theta e^{-4i(\mu-\nu)\theta} d\theta, \\
 & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(x+\mu)\pi}}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+2\nu+2x)\Gamma(\beta-2\nu-2x)} dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{2^{4\alpha+2\beta-6}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha-2}\theta \cos^{2\alpha+2\beta-4}\theta e^{4i(\mu-\nu)\theta} d\theta.
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x+\mu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+2\nu+2x)\Gamma(\beta-2\nu-2x)} dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{2^{4\alpha+2\beta-6}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha-2}\theta \cos^{2\alpha+2\beta-4}\theta \cos 4(\mu-\nu)\theta d\theta, \quad (12.122a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x+\mu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+2\nu+2x)\Gamma(\beta-2\nu-2x)} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{2^{4\alpha+2\beta-6}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha-2}\theta \cos^{2\alpha+2\beta-4}\theta \sin 4(\mu-\nu)\theta d\theta.
\end{aligned} \tag{12.122b}$$

当 $4(\mu-\nu)$ 为整数时, 即可计算出上述二式右端的积分. 例如, 当 $\mu=\nu$ 时, 即有

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x+\mu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+2\mu+2x)\Gamma(\beta-2\mu-2x)} dx \\
&= \frac{2^{2\alpha+2\beta-5}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-3/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\beta-1)\Gamma(2\alpha+\beta-2)},
\end{aligned} \tag{12.123}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x+\mu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+2\mu+2x)\Gamma(\beta-2\mu-2x)} dx = 0. \tag{12.124}$$

如果 $\mu=\nu+1/4$ 或 $\mu=\nu+1/2$, 则可得

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x+\mu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+2\mu+2x-1/2)\Gamma(\beta-2\mu-2x+1/2)} dx \\
&= \frac{2^{2\alpha+2\beta-5}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\beta-1)\Gamma(2\alpha+\beta-3/2)},
\end{aligned} \tag{12.125}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x+\mu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+2\mu+2x-1/2)\Gamma(\beta-2\mu-2x+1/2)} dx \\
&= \frac{2^{2\alpha+2\beta-5}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-3/2)}{\Gamma(\alpha-1/2)\Gamma(2\beta-1)\Gamma(2\alpha+\beta-3/2)};
\end{aligned} \tag{12.126}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x+\mu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+2\mu+2x-1)\Gamma(\beta-2\mu-2x+1)} dx \\
&= \frac{2^{2\alpha+2\beta-5}}{\sqrt{\pi}} \frac{(\beta-1)\Gamma(\alpha+\beta-3/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\beta-1)\Gamma(2\alpha+\beta-1)},
\end{aligned} \tag{12.127}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x+\mu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+2\mu+2x-1)\Gamma(\beta-2\mu-2x+1)} dx \\
&= \frac{2^{2\alpha+2\beta-4}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha-1/2)\Gamma(2\beta-1)\Gamma(2\alpha+\beta-1)}.
\end{aligned} \tag{12.128}$$

当 $\alpha=1, 2, 3, \dots$ 时, 也能求出 (12.122a) 式右端的积分. 例如, 当 $\alpha=1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x+\mu)\pi}{\Gamma(1+\mu+x)\Gamma(1-\mu-x)\Gamma(\beta+2\nu+2x)\Gamma(\beta-2\nu-2x)} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2(x+\mu)x}{\Gamma(\beta+2\nu+2x)\Gamma(\beta-2\nu-2x)} \frac{dx}{x+\mu} \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{2^{2\beta-2}}{\Gamma(2\beta-1)} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\beta-2}\theta \cos 4(\mu-\nu)\theta d\theta,
\end{aligned}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2(x+\mu)x}{\Gamma(\beta+2\nu+2x)\Gamma(\beta-2\nu-2x)} \frac{dx}{x+\mu} = \frac{\pi}{\Gamma(\beta+2\mu-2\nu)\Gamma(\beta-2\mu+2\nu)}. \quad (12.129)$$

同样, 如果 $\alpha = 2$, 则有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2(x+\mu)x}{\Gamma(\beta+2\nu+2x)\Gamma(\beta-2\nu-2x)} \frac{\Gamma(x+\mu-1)}{\Gamma(x+\mu+2)} dx \\ &= \frac{\pi \cdot 2\beta(2\beta-1)[8(\mu-\nu)^2 + 3\beta + 1]}{\Gamma(\beta+2\mu-2\nu)\Gamma(\beta-2\mu+2\nu)}. \end{aligned} \quad (12.130)$$

如果在 (12.121) 式中代入 $t = \pm 2\pi$, 我们将得到

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i(x+\mu)\pi}}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+2\nu+2x)\Gamma(\beta-2\nu-2x)} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{2^{2\alpha+2\beta-6}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \int_{\pi}^{2\pi} \left(\cos \frac{2\pi-\tau}{2}\right)^{2\alpha-2} \left(\cos \frac{\tau}{4}\right)^{2\beta-2} e^{-i(\mu-\nu)\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{2^{2\alpha+2\beta-5}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} e^{-2i(\mu-\nu)\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-2} \theta \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2\beta-2} e^{2i(\mu-\nu)\theta} d\theta, \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2i(x+\mu)\pi}}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+2\nu+2x)\Gamma(\beta-2\nu-2x)} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{2^{2\alpha+2\beta-6}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \int_{-2\pi}^{-\pi} \left(\cos \frac{-2\pi-\tau}{2}\right)^{2\alpha-2} \left(\cos \frac{\tau}{4}\right)^{2\beta-2} e^{-i(\mu-\nu)\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{2^{2\alpha+2\beta-5}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} e^{2i(\mu-\nu)\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-2} \theta \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2\beta-2} e^{-2i(\mu-\nu)\theta} d\theta. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2(x+\nu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+2\nu+2x)\Gamma(\beta-2\nu-2x)} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{2^{2\alpha+2\beta-5}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-2} \theta \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2\beta-2} \cos 2(\mu-\nu)\theta d\theta, \end{aligned} \quad (12.131)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2(x+\nu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+2\nu+2x)\Gamma(\beta-2\nu-2x)} dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{2^{2\alpha+2\beta-5}}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\beta-1)} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-2} \theta \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2\beta-2} \sin 2(\mu-\nu)\theta d\theta. \end{aligned} \quad (12.132)$$

如果 $\mu = \nu$, 由 (12.132) 式立即就能看出

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2(x+\nu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+2\mu+2x)\Gamma(\beta-2\mu-2x)} dx = 0. \quad (12.133)$$

如果 $\mu - \nu = 1/4$, 则可根据 (12.131) 式得到

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2(x+\mu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+2\mu+2x-1/2)\Gamma(\beta-2\mu-2x+1/2)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{2\alpha-\beta-5/2}}{\Gamma(\beta)\Gamma(2\alpha+\beta-3/2)}. \end{aligned} \quad (12.134)$$

若 $\mu - \nu = 1/2$, 则又可由 (12.132) 式导出

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2(x+\mu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+2\mu+2x-1)\Gamma(\beta-2\mu-2x+1)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{2\alpha-\beta-2}}{\Gamma(\beta-1/2)\Gamma(2\alpha+\beta-1)}. \end{aligned} \quad (12.135)$$

在 (12.131) 式中也可代入 $\beta = 1, 2, 3, \dots$. 例如, 令 $\beta = 1$, 有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2(x+\nu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(1+2\nu+2x)\Gamma(1-2\nu-2x)} dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 4(x+\nu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)} \frac{dx}{x+\nu} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{2^{2\alpha-3}}{\Gamma(2\alpha-1)} \int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-2} \cos 2(\mu-\nu)\theta, \end{aligned}$$

由此即可计算出

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 4(x+\nu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)} \frac{dx}{x+\nu} = \frac{\pi}{\Gamma(\alpha+\mu-\nu)\Gamma(\alpha-\mu+\nu)}. \quad (12.136)$$

若取 $\beta = 2$, 则有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 4(x+\nu)\pi}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)} \frac{\Gamma(2\nu+2x-1)}{\Gamma(2\nu+2x+2)} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+\mu-\nu+1/2)\Gamma(\alpha-\mu+\nu+1/2)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\mu-\nu)\Gamma(\alpha-\mu+\nu)} \right]. \end{aligned} \quad (12.137)$$

由 (12.121) 式也能看出, 当 $k = 3, 4, 5, \dots$ 时, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm ik\pi x}}{\Gamma(\alpha+\mu+x)\Gamma(\alpha-\mu-x)\Gamma(\beta+2\nu+2x)\Gamma(\beta-2\nu-2x)} dx = 0. \quad (12.138)$$

例 12.16 在例 12.14 与例 12.15 中, 已经出现了被积函数的分子、分母同时含有 Γ 函数的情形. 类似的例子还有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)} e^{-ixt} dx, \quad \text{Im } \alpha < 0, \text{ Re } (\beta-\alpha) > 0.$$

利用 Γ 函数的互余宗量定理可以将积分化为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)} e^{-ixt} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt}}{\Gamma(\beta+x) \Gamma(1-\alpha-x)} \frac{\pi}{\sin \pi(\alpha+x)} dx.$$

在 $\operatorname{Im} \alpha < 0$ 的条件下, 有

$$\frac{1}{\sin \pi(\alpha+x)} = 2i e^{-i\pi(\alpha+x)} [1 - e^{-i2\pi(\alpha+x)}]^{-1} = 2i \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\pi(2n+1)(\alpha+x)}.$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)} e^{-ixt} dx = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt - i\pi(2n+1)(\alpha+x)}}{\Gamma(\beta+x) \Gamma(1-\alpha-x)} dx.$$

级数中的每一项都是 (12.83) 式型的积分. 由该式可以断定, 此级数中只有 $n = k$ 的一项才不为 0, 该 k 值应当由不等式 $-\pi < t + (2k+1)\pi < \pi$ 决定. 所以

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)} e^{-ixt} dx \\ &= \frac{2\pi i e^{-i(2k+1)\pi\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha)} e^{i(\alpha+\beta-1)\tau/2} \left(2 \cos \frac{\tau}{2}\right)^{\beta-\alpha-1} \eta(\pi-|\tau|), \end{aligned} \quad (12.139)$$

其中 $\tau = t + (2k+1)\pi$. 读者可以完全类似地讨论 $\operatorname{Im} \alpha > 0$ 的情形.

在此基础上, 还能计算

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\alpha+x) \Gamma(\beta-x) e^{-ixt} dx = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(1-\beta+x)} \frac{e^{-ixt}}{\sin(\beta-x)} dx.$$

在 $\operatorname{Im} \beta \neq 0$ 的条件下, 将函数 $1/\sin(\beta-x)$ 展开, 就可化为 (12.139) 形式的积分.

例 12.17 作为这类积分计算的一个发展, 还能计算某些对于 Bessel 函数的阶的积分. 例如:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{\alpha+\mu+x}(a)}{a^{\alpha+\mu+x}} \frac{J_{\alpha-\mu-x}(b)}{b^{\alpha-\mu-x}} dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{k! l!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \left(\frac{b}{2}\right)^{2l} \frac{1}{2^{2\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\Gamma(\alpha+\mu+x+k+1) \Gamma(\alpha-\mu-x+l+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{k! l!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \left(\frac{b}{2}\right)^{2l} \frac{2^{k+l}}{\Gamma(2\alpha+k+l+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n! \Gamma(2\alpha+n+1)} \sum_{l=0}^n \frac{n!}{l! (n-l)!} a^{2l} b^{2n-2l} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(2\alpha+n+1)} \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^n = \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{-\alpha} J_{2\alpha}(\sqrt{2a^2+2b^2}). \end{aligned} \quad (12.140)$$

特别是, 当 $a = b$ 时, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} J_{\alpha+\mu+x}(a) J_{\alpha-\mu-x}(a) dx = J_{2\alpha}(2a). \quad (12.141)$$

完全类似地, 还可以有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{\alpha+\mu+x}(a)}{a^{\alpha+\mu+x}} \frac{J_{\alpha-\mu-x}(b)}{b^{\alpha-\mu-x}} e^{-i2xt} dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{k! l!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \left(\frac{b}{2}\right)^{2l} \frac{1}{2^{2\alpha}} \\ & \quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i2xt}}{\Gamma(\alpha+\mu+x+k+1) \Gamma(\alpha-\mu-x+l+1)} dx. \end{aligned}$$

当 $\operatorname{Re} \alpha > 1/2$ 时, 可代入 (12.82b) 式的结果, 即得^①

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{\alpha+\mu+x}(a)}{a^{\alpha+\mu+x}} \frac{J_{\alpha-\mu-x}(b)}{b^{\alpha-\mu-x}} e^{-i2xt} dx \\ &= e^{i\mu t} \eta\left(\frac{\pi}{2} - |t|\right) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{k+l}}{k! l!} \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \left(\frac{b}{2}\right)^{2l} \right. \\ & \quad \times \left. \frac{2^{k+l}}{\Gamma(2\alpha+k+l+1)} e^{i(2\mu+k-l)t} \cos^{2\alpha+k+l} t \right] \\ &= e^{i2\mu t} \cos^{2\alpha} t \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n! \Gamma(2\alpha+n+1)} \left(\frac{\cos t}{2}\right)^n e^{-int} \right. \\ & \quad \times \left. \sum_{l=0}^n \frac{n!}{l! (n-l)!} a^{2l} b^{2n-2l} e^{i2(n-l)t} \right] \eta\left(\frac{\pi}{2} - |t|\right) \\ &= e^{i2\mu t} \cos^{2\alpha} t \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n! \Gamma(2\alpha+n+1)} \left(\frac{\cos t}{2}\right)^n (a^2 e^{-it} + b^2 e^{it})^n \right] \eta\left(\frac{\pi}{2} - |t|\right) \\ &= e^{i2\mu t} \cos^{\alpha} t \left(\frac{a^2 e^{-it} + b^2 e^{it}}{2} \right)^{-\alpha} J_{2\alpha} \left(\sqrt{2(a^2 e^{-it} + b^2 e^{it}) \cos t} \right) \eta\left(\frac{\pi}{2} - |t|\right). \end{aligned} \quad (12.142)$$

特别地, 当 $a = b$ 时, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} J_{\alpha+\mu+x}(a) J_{\alpha-\mu-x}(a) e^{-i2xt} dx = e^{i2\mu t} J_{2\alpha}(2a \cos t) \eta\left(\frac{\pi}{2} - |t|\right). \quad (12.143)$$

因此

^① 在 Y. L. Luke 的 *Integrals of Bessel Functions* (McFraw-Hill, New York, 1962) 中, 此积分的结果中出现因子 $\eta(\pi - |t|)$, 明显有误.

$$\int_{-\infty}^{\infty} J_{\alpha+\mu+x}(a) J_{\alpha-\mu-x}(a) \cos 2xt \, dx = \cos 2\mu t J_{2\alpha}(2a \cos t) \eta\left(\frac{\pi}{2}-|t|\right), \quad (12.144a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} J_{\alpha+\mu+x}(a) J_{\alpha-\mu-x}(a) \sin 2xt \, dx = -\sin 2\mu t J_{2\alpha}(2a \cos t) \eta\left(\frac{\pi}{2}-|t|\right). \quad (12.144b)$$

§12.5 复平面上的 Fourier 变换

12.5.1 复平面上的 Fourier 变换

在一定程度上, 可以将公式 (12.3) 和 (12.4) 的变换变量 ω 推广为取复数值. 令 $\omega = \sigma + i\tau$ (σ 和 τ 为实数), 我们得到

$$F(\omega) = F(\sigma + i\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} e^{\tau x} f(x) \, dx. \quad (12.145)$$

对于 (12.145) 式可以有两种解读, 既可以把 $F(\omega)$ 看成 $f(x)$ 的 Fourier 变换, ω 为复数, 也可以看成函数 $e^{\tau x} f(x)$ 的“旧”的 Fourier 变换, 变换的变量为 σ . 引进虚部 τ 的好处是, 可以选择 τ , 使得 $e^{\tau x} f(x)$ 属于 $\mathcal{L}_1(-\infty, \infty)$, 保证 Fourier 变换 (12.145) 式存在. 我们可以由 (12.145) 式导出

$$e^{\tau x} f(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R F(\sigma + i\tau) e^{i\sigma x} \, d\sigma.$$

后一个积分可理解为复 ω 平面上沿平行于实轴的直线的积分. 事实上, 我们有

$$f(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{i\tau-R}^{i\tau+R} F(\omega) e^{i\omega x} \, d\omega,$$

或者直接就写成

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} \, d\omega, \quad (12.146)$$

其中 τ 是任意实数, 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{\tau x} f(x)| \, dx < \infty. \quad (12.147)$$

如果不等式在整个带形区域 $\tau_1 < \tau < \tau_2$ 内成立, 则 $F(\omega)$ 就是该带内的解析函数.

例 12.18 设 $f(x) = e^{-|x|}$, 则对于 $-1 < \tau < 1$ 内的所有 τ 值, $f(x) e^{\tau x}$ 属于 $\mathcal{L}_1(-\infty, \infty)$. 我们有

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-i\omega x} e^x \, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-x} \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+\omega^2}, \quad -1 < \tau < 1. \end{aligned}$$

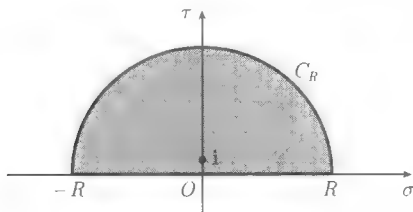
现在我们示范, 用 $\tau = 0$, 如何能用 (12.146) 式通过围道积分由 $F(\omega)$ 求出 $f(x)$. 对于 $x > 0$, 考虑由以 R 为半径的上半圆及实轴上的直径组成的积分围道 C (见图 12.1a), 则由留数定理, 有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \frac{2}{1+\omega^2} e^{i\omega x} d\omega = 2\pi i \times \left\{ \frac{2}{1+\omega^2} e^{i\omega x} \text{ 在 } C \text{ 内的留数和} \right\} = 2\pi e^{-x}.$$

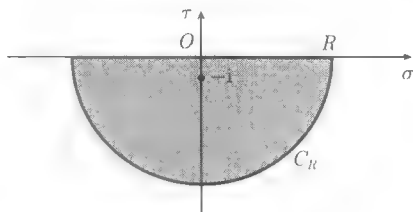
当 $R \rightarrow \infty$ 时, 根据 Jordan 引理可以判断, 沿半圆弧 C_R 的贡献趋于 0. 这样围道积分中就只剩下沿实轴的积分的贡献, 于是就得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+\omega^2} e^{i\omega x} d\omega = e^{-x}, \quad x > 0.$$

类似地, 考虑在下半平面内的围道积分 (见图 12.1b), 就能够得到 $x < 0$ 时的逆变换积分值为 e^x .



(a) 适用于 $x > 0$ 时的积分围道



(b) 适用于 $x < 0$ 时的积分围道

图 12.1 例 12.18 中求反演时用到的积分围道

例 12.19 设 $f(x) = -2\eta(x) \sinh x$, 其中 $\eta(x)$ 是 Heaviside 函数, 即

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sinh x, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

因为 $2 \sinh x = e^x - e^{-x}$, 我们看到: 当 $\tau < -1$ 时, $e^{\tau x} \sinh x$ 属于 $\mathcal{L}_1(0, \infty)$, 所以当 $\tau < -1$ 时, $e^{\tau x} f(x)$ 属于 $\mathcal{L}_1(-\infty, \infty)$. 简单的计算给出

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (e^{-x} - e^x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+\omega^2}, \quad \tau < -1.$$

和例 12.18 相比较, 第一印象是不可思议: 两个不同的函数居然有相同的 Fourier 变换! 回答是, 不同的函数的 Fourier 变换的确可以有相同的函数形式, 它们各自在 ω 平面上互不相重叠的不同区域内有效. 我们仍旧可以用逆变换公式 (12.146) 去求出本例题中的 $f(x)$, 只是这时应取 $\tau < -1$. 当 $x < 0$ 时, (采用图 12.2(a) 的

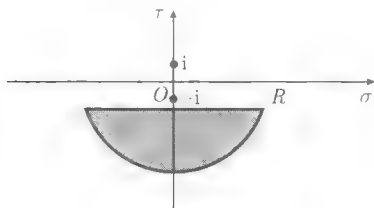
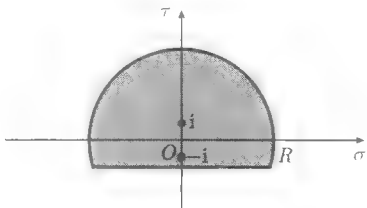
(a) 适用于 $x < 0$ 时的积分围道(b) 适用于 $x > 0$ 时的积分围道

图 12.2 例 12.19 中求反演时用到的积分围道

积分围道) 计算出 $f = 0$. 对于 $x > 0$, 又可以采用图 12.2(b) 的积分围道, 它包含了被积函数的两个极点: $\omega = \pm i$, 这样又得到 $f = -2 \sinh x$.

例 12.20 设 $f(x) = e^{-x^2}$, 这时对于任何实的 τ , $f e^{\tau x}$ 都属于 $\mathcal{L}_1(-\infty, \infty)$, 所以 $F(\omega)$ 是整个 ω 平面上的解析函数. 对于 $\omega = i\tau$, 有

$$F(i\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau x} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\tau^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\tau/2)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\tau^2/4}.$$

所以, 由解析延拓, 可知

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\omega^2/4}.$$

最后, 必须指出, 就一般函数 $f(x)$ 而言, 出现在 (12.145) 式中的因子 $e^{\tau x}$ 具有两面性: 当 $\tau > 0$ 时, 它改善了在下限的收敛性, 但却破坏了在上限的收敛性; 而当 $\tau < 0$ 时则相反. 即使 $f(x) = 1$, 也不存在 τ 值, 使得 (12.145) 式成立, 所以我们的方案必须加以修改.

12.5.2 单侧函数

$x < 0$ 时恒为 0 的函数称为右侧函数, 记为 $f_+(x)$; $x > 0$ 时恒为 0 的函数称为左侧函数, 记为 $f_-(x)$.

考虑右侧函数 $f_+(x)$, 假设它在 $x \rightarrow \infty$ 时为 $O(e^{\alpha x})$, 即存在常数 C , 使得

$$|f_+(x)| < C e^{\alpha x} \quad \text{对于足够大的 } x,$$

则 $f_+(x) e^{\tau x}$ 在 $\tau < -\alpha$ 时属于 $\mathcal{L}_1(-\infty, \infty)$. 因此 $f_+(x)$ 的 Fourier 变换 $F_+(\omega)$ 在下半平面 $\tau < -\alpha$ 解析. 公式 (12.145) 和 (12.146) 分别变为

$$F_+(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f_+(x) e^{-i\omega x} dx, \quad \tau < -\alpha, \quad (12.148)$$

$$f_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty} F_+(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad \tau < -\alpha. \quad (12.149)$$

特别是, 当 $\tau \rightarrow -\infty$ 时, 应当有 $F_+(\omega) \rightarrow 0$.

对于 $x \rightarrow -\infty$ 时为 $O(e^{\beta x})$ 的左侧函数 $f_-(x)$, 它在 $\tau > -\beta$ 时属于 $\mathcal{L}_1(-\infty, \infty)$, 因而 Fourier 级数 $F_-(\omega)$ 在 $\tau > -\beta$ 的上半平面解析. 因此我们有

$$F_-(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f_-(x) e^{-i\omega x} dx, \quad \tau > -\beta, \quad (12.150)$$

$$f_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty} F_-(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad \tau > -\beta. \quad (12.151)$$

同样, 当 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $F_-(\omega) \rightarrow 0$.

如果 $f(x)$ 是实轴上的任意函数, 我们总能写成 $f(x) = f_+(x) + f_-(x)$, 其中

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad f_-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ f(x), & x < 0. \end{cases}$$

如果 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 和 $x \rightarrow -\infty$ 时分别为 $O(e^{\alpha x})$ 和 $O(e^{\beta x})$, 我们可以把前面的结果组合起来而得到

$$F_+(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad \tau < -\alpha, \quad (12.152)$$

$$F_-(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad \tau > -\beta, \quad (12.153)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} F_+(\omega) e^{i\omega x} d\omega + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} F_-(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad (12.154)$$

其中 $a < -\alpha$, $b > -\beta$. 这些公式有效地推广了 (12.145) 与 (12.146) 两式. 若 $\beta > \alpha$, 则 $-\beta < \tau < -\alpha$ 时 Fourier 变换存在, 我们能在此带形区域内取 $a = b$ 而将 (12.154) 式化为 (12.146) 式.

例 12.21 求 $f(x) = 1/\sinh \pi x$ 的 Fourier 变换.

解 例 12.10 已经用到过这个 Fourier 变换, 当时援引了第六章中的计算结果.

本题的特殊之处在于 $f(x) = 1/\sinh \pi x$ 显然不是平方可积函数, 因此, 从原则上说, 它的 Fourier 变换问题也应该从广义函数的角度加以审视. 但因为 $f(x)$ 是奇函数, 故其 Fourier 变换的实部 (在积分主值的意义下) 为 0, 而虚部恰恰又是一个收敛性很好的积分, 甚至无须涉及广义函数的概念.

下面采用围道积分的办法计算函数 $1/\sinh \pi x$ 的 Fourier 变换. 为此取积分围道 C 如图 12.3 所示, 考虑复变积分 $\oint_C \frac{e^{-i\omega z}}{\sinh \pi z} dz$. 因为积分围道内无奇点, 所以此围道积分为 0. 易证

$$\lim_{\operatorname{Re} z \rightarrow \pm\infty} z \cdot \frac{e^{-i\omega z}}{\sinh \pi z} = 0,$$

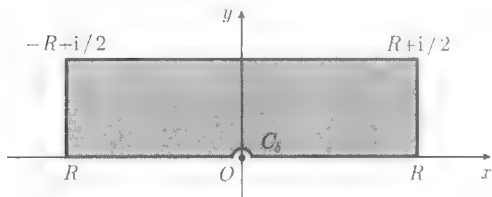


图 12.3 例 12.21 中的积分围道

因此

$$\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{e^{-i\omega x}}{\sinh \pi x} dx + \int_{C_\delta} \frac{e^{-i\omega z}}{\sinh \pi z} dz + \int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\sinh \pi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega(x+i/2)}}{\sinh \pi(x+i/2)} dx.$$

又因为

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{e^{-i\omega z}}{\sinh \pi z} = \frac{1}{\pi},$$

所以, 取极限 $\delta \rightarrow 0$, 就得到

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\sinh \pi x} dx &= i + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega(x+i/2)}}{\sinh \pi(x+i/2)} dx = i - i e^{\omega/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh \pi x} dx \\ &= i \left[1 - \frac{e^{\omega/2}}{\cosh(\omega/2)} \right] = -i \tanh \frac{\omega}{2}, \end{aligned}$$

亦即

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\sinh \pi x}\right\} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \tanh \frac{\omega}{2}.$$

§12.6 用 Fourier 变换方法解积分方程

Fourier 变换的适用范围是 $-\infty < x < \infty$, 所以我们不妨研究

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x|\xi) \psi(\xi) d\xi \quad (12.155)$$

型的积分方程, 其中 $\phi(x)$ 和 $w(x|\xi)$ 均为已知函数, $w(x|\xi)$ 称为积分方程的核, 而 $\psi(x)$ 则是方程的非齐次项. 现在将方程两端作 Fourier 变换. 设 $\phi(x)$ 的 Fourier 变换已知, 因此

$$\Phi(k) \equiv \mathcal{F}\{\phi(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-ikx} dx, \quad (12.156a)$$

$$\phi(x) \equiv \mathcal{F}^{-1}\{\Phi(k)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k) e^{ikx} dk; \quad (12.156b)$$

同时假设 $\psi(x)$ 的 Fourier 变换也存在, 即

$$\Psi(k) \equiv \mathcal{F}\{\psi(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ikx} dx, \quad (12.157a)$$

$$\psi(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\Psi(k)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(k) e^{ikx} dk. \quad (12.157b)$$

容易计算得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} w(x|\xi) \psi(\xi) d\xi\right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} w(x|\xi) \psi(\xi) d\xi\right\} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} w(x|\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(k') e^{ik'\xi} dk'\right] d\xi\right\} e^{-ikx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W(k|k') \Psi(k') dk', \end{aligned} \quad (12.158)$$

其中

$$W(k|k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik'\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} w(x|\xi) e^{-ikx} dx. \quad (12.159)$$

这样, 方程 (12.155) 就变为新的积分方程

$$\Phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} W(k|k') \Psi(k') dk'. \quad (12.160)$$

显然, 只有新的积分方程的核 $W(k|k')$ 比原来的核 $w(x|\xi)$ 简单, 更易于求解, 这样的变换才是有意义的.

最简单的情形是

$$W(k|k') = \sqrt{2\pi} V(k) \delta(k - k'). \quad (12.161)$$

代入 (12.160) 式, 就得到代数方程 $\Phi(k) = \sqrt{2\pi} V(k) \Psi(k)$, 因此

$$\Psi(k) = \frac{\Phi(k)}{\sqrt{2\pi} V(k)}. \quad (12.162)$$

应用 Fourier 变换的反演公式, 就能求出 $\psi(x)$.

现在先找出 (12.161) 式的成立条件. 因为 $W(k|k')$ 是 $w(x|\xi)$ 的二重 Fourier 变换, 故其反演为

$$\begin{aligned} w(x|\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik'\xi} dk' \int_{-\infty}^{\infty} W(k|k') e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik'\xi} dk' \int_{-\infty}^{\infty} V(k) \delta(k - k') e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik'\xi} \delta(k - k') dk' \right] V(k) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V(k) e^{ik(x-\xi)} dk = v(x - \xi). \end{aligned} \quad (12.163)$$

换言之, Fourier 变换可用于求解核为 $v(x-\xi)$ 型的积分方程

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x-\xi) \psi(\xi) d\xi. \quad (12.164)$$

这类积分方程中, 未知函数只出现在积分号下, 称为第一类 Fredholm 型积分方程.

例 12.22 由长螺线管轴线上磁场反求线圈匝数的问题.

取 z 轴与螺线管的轴线重合. 设螺线管的半径为 a , 单位长度上螺线管的匝数为 $n(z)$, 线圈中的电流强度为 I , 则在螺线管上长度为 $d\zeta$ 的线圈中的电流元为 $di = In(\zeta)d\zeta$, 它在轴线上 z 处的磁场强度为

$$dH = \frac{2\pi a}{a^2 + (z-\zeta)^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + (z-\zeta)^2}} di = \frac{2\pi a^2 I}{[a^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} n(\zeta) d\zeta.$$

将螺线管近似地看成是无穷长, 则总磁场强度为

$$H(z) = 2\pi a^2 I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(\zeta)}{[a^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} d\zeta. \quad (12.165)$$

现在要由 $H(z)$ 反求线圈的匝数 $n(z)$. 其实, 这就是第一类 Fredholm 型积分方程, 且方程的核满足 (12.163) 式的形式. 于是可用 Fourier 变换方法求解. 设

$$\tilde{H}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(z) e^{-ikz} dz, \quad (12.166a)$$

$$N(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} n(z) e^{-ikz} dz, \quad (12.166b)$$

$$V(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikz}}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2|k|}{a} K_1(|k|a), \quad (12.166c)$$

其中最后一步用到了虚宗量 Bessel 函数的积分表示

$$\begin{aligned} K_1(x) &= -\frac{d}{dx} K_0(x) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm iz}}{\sqrt{x^2 + z^2}} dz \\ &= \frac{x}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm iz}}{(x^2 + z^2)^{3/2}} dz. \end{aligned}$$

这样, 由积分方程 (12.165) 式就导出

$$\begin{aligned} \tilde{H}(k) &= 2\pi a^2 I \int_{-\infty}^{\infty} n(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik(z-\zeta)}}{[a^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} dz \right] \\ &= 2\pi a^2 I \int_{-\infty}^{\infty} n(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikz}}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz \\ &= 2\pi a^2 I \cdot \sqrt{2\pi} N(k) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2|k|}{a} K_1(|k|a) = 4\pi I a |k| N(k) K_1(|k|a), \end{aligned}$$

所以

$$N(k) = \frac{1}{4\pi I a} \frac{\tilde{H}(k)}{|k| K_1(|k|a)}. \quad (12.167)$$

求反演即得

$$n(z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2Ia} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \frac{\tilde{H}(k)}{K_1(|k|a)} \frac{dk}{|k|}. \quad (12.168)$$

另外, 还有第二类 Fredholm 型积分方程

$$\psi(x) = \phi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} w(x|\xi) \psi(\xi) d\xi. \quad (12.169)$$

在这类积分方程中, 未知函数不只出现在积分号下. 重复上面的变换步骤, 就能得到积分方程

$$\Psi(k) = \Phi(k) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} W(k|k') \Psi(k') dk', \quad (12.170)$$

于是在

$$W(k|k') = \sqrt{2\pi} V(k) \delta(k - k') \quad (12.171)$$

的条件下, 就得到代数方程

$$\Psi(k) = \Phi(k) + \sqrt{2\pi} \lambda V(k) \Psi(k). \quad (12.170')$$

因此

$$\Psi(k) = \frac{\Phi(k)}{1 - \sqrt{2\pi} \lambda V(k)}. \quad (12.172)$$

应用 Fourier 变换的反演公式, 也能求出 $\psi(x)$.

第十三章 Laplace 变换

§13.1 Laplace 积分

可以有多种方法引入 Laplace 积分. 大家比较熟悉的是由 Fourier 积分导入的办法. 另一种做法是由 Taylor 级数推广而得^①. 为了简单起见, 设有 Taylor 级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| < R. \quad (13.1)$$

作变换 $z = e^{-p}$, 并且将展开系数 c_n 改写为 $c(n)$, 则上式右端即变为

$$\sum_{n=0}^{\infty} c(n) e^{-np}.$$

再将离散变量 n 过渡为连续变量 t , 也就是将级数过渡为积分, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} c(n) e^{-np} \rightarrow \int_0^{\infty} c(t) e^{-pt} dt,$$

称为 Laplace 积分. 这个积分属于反常积分, 它至少作为无穷积分, 应该理解为

$$\int_0^{\infty} c(t) e^{-pt} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T c(t) e^{-pt} dt;$$

而且, 在积分区间 $[0, T]$ 上, 函数 $c(t)$ 还可以不连续, 从而使得积分又兼具瑕积分的身份. 在积分收敛的条件下, Laplace 积分就定义了一个函数 $F(p)$:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (13.2)$$

这里同时将 $c(t)$ 改写为 $f(t)$. 通常约定 $f(t)$ 为实函数, 且当 $t \geq 0$ 时有定义, 或者说, 约定 $t < 0$ 时 $f(t) = 0$. 作为复变量 z 的替代而引入的变量 p , 也应当是复变量. 原来 Taylor 级数的收敛圆, 则相应地变换为对 p 的限制条件, 即保证 Laplace 积分收敛的限制条件. 下一节将看到, Laplace 积分的收敛区域是 (p 平面上的) 半平面.

对于给定的 p 值, (13.2) 式 (如果收敛的话) 定义了相应的 Laplace 积分值. 如果对于某一区域 G 内任意 p 值, Laplace 积分均收敛, 则 (13.2) 式就定义了区域

^① 也可以从 Laurent 级数出发, 而推广为双边 (bilateral) Laplace 变换.

G 内的函数 $F(p)$, 这样也就建立了 (定义在 $0 \leq t < \infty$ 上的) 函数 $f(t)$ 与 (定义在区域 G 内的) 函数 $F(p)$ 之间的对应关系. 换言之, (13.2) 式就建立了原函数 $f(t)$ 与像函数 $F(p)$ 之间的一个变换: Laplace 变换, 记为

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \equiv F(p) \equiv \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (13.2')$$

§13.2 Laplace 积分的收敛半平面

定理 13.1 若 Laplace 积分在 p 平面上某一点 p_0 处绝对收敛, 则在半闭平面 $\operatorname{Re} p \geq \operatorname{Re} p_0$ 上亦绝对收敛.

证 在一定意义上, 这相当于幂级数中的 Abel 定理, 证明思路也基本相同.

令 $p = s + i\sigma$, $p_0 = s_0 + i\sigma_0$, 当 $\operatorname{Re} p \geq \operatorname{Re} p_0$, 即 $s \geq s_0$ 时, 我们有

$$\int_{T_1}^{T_2} |f(t)e^{-pt}| dt = \int_{T_1}^{T_2} |f(t)| e^{-st} dt \leq \int_{T_1}^{T_2} |f(t)| e^{-s_0 t} dt.$$

因为积分 $\int_0^{\infty} f(t)e^{-p_0 t} dt = \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-s_0 t} dt$ 收敛, 所以按照反常积分收敛的 Cauchy 充分必要条件, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 一定存在 $T > 0$, 使当 $T_2 > T_1 > T$ 时, 有

$$\int_{T_1}^{T_2} |f(t)| e^{-s_0 t} dt < \varepsilon.$$

因此

$$\int_{T_1}^{T_2} |f(t)e^{-pt}| dt < \varepsilon, \quad T_2 > T_1 > T,$$

由此即证得 Laplace 积分在半闭平面 $\operatorname{Re} p \geq \operatorname{Re} p_0$ 上亦绝对收敛. \square

思考题 1 以上证明中, 为何未考虑 Laplace 积分可能是瑕积分?

思考题 2 请读者证明: 在定理 13.1 的条件下, $F(p)$ 有界.

根据定理 13.1, 我们就能推断出:


定理 13.2 Laplace 积分的绝对收敛区域要么是开的半平面 $\operatorname{Re} p > \alpha$, 要么是闭的半平面 $\operatorname{Re} p \geq \alpha$. 作为它们的极端情形, 这里的 α 也可以是 $\pm\infty$.

证 我们不妨从 p 为实数 (因此 Laplace 积分为实积分) 的情形出发讨论, 这并不外乎会面临下列三种情形之一:

(1) 积分对于一切实数 p 均绝对收敛, 因此, 根据定理 13.1, Laplace 积分也必然对一切 (复数) p 均绝对收敛. 这就是 $\alpha = -\infty$ 的情形.

(2) 积分对于一切实数 p 均不绝对收敛, 因此, 根据定理 13.1, Laplace 积分也必然对一切 (复数) p 均不绝对收敛. 这就是 $\alpha = \infty$ 的情形.

(3) 至少存在一个实数 $p_1 = s_1$, 使得积分绝对收敛; 同时存在另一个实数 $p_2 = s_2$, 使积分不绝对收敛. 我们肯定应当有 $s_2 < s_1$ (为什么?). 因此, 对于 $\operatorname{Re} p \geq s_1$ 的一切复数 p , 积分均绝对收敛; 而对于 $\operatorname{Re} p \leq s_2$ 的一切复数 p , 积分均不绝对收敛. 现在就出现了一个中间地带 $s_2 < \operatorname{Re} p < s_1$, 需要判断积分是否绝对收敛. 为此可在 (s_2, s_1) 中再任取一实数 s_3 , 它必然要么使积分绝对收敛, 要么使积分不绝对收敛, 二者必居其一. 如此继续划分, 我们必然能得到一个有限实数值 α , 使得对于满足 $\operatorname{Re} p > \alpha$ 的一切 p 值, 积分均绝对收敛; 同时使得对于满足 $\operatorname{Re} p < \alpha$ 的一切 p 值, 积分均不绝对收敛. 至于在分界线 $\operatorname{Re} p = \alpha$ 上, 我们只要判断 $p = \alpha$ 时积分是否绝对收敛即可: 若 $p = \alpha$ 时积分绝对收敛, 则对于直线 $\operatorname{Re} p = \alpha$ 上的一切 p 值, 积分均绝对收敛, 于是 Laplace 积分就在闭的半平面 $\operatorname{Re} p \geq \alpha$ 上绝对收敛; 反之, 若 $p = \alpha$ 时积分不绝对收敛, 则对于直线 $\operatorname{Re} p = \alpha$ 上的一切 p 值, 积分均不绝对收敛, 于是 Laplace 积分就在开的半平面 $\operatorname{Re} p > \alpha$ 上绝对收敛. \square

 **评述** 容易举出分属于上述三种情形的例子. $f(t) = e^{\pm t}$ 就分别属于 $\alpha = \pm\infty$ 的情形. 对于有限的 α 值, 可以举出 $f(t) = 1/(1+t)$ 和 $f(t) = 1/(1+t^2)$, 前者的绝对收敛区域是 $\operatorname{Re} p > 0$, 后者的绝对收敛区域为 $\operatorname{Re} p \geq 0$.

定义 13.1 Laplace 积分绝对收敛的区域 $\operatorname{Re} p > \alpha$ 或 $\operatorname{Re} p \geq \alpha$ 称为 Laplace 积分的绝对收敛半平面, 相应的实数值 α 称为 Laplace 积分的绝对收敛横标.

定理 13.3 若 Laplace 积分 $\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ 在 $p = p_0$ 处收敛, 则它在半开平面 $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$ 上亦收敛, 且在此半平面上等于绝对收敛积分

$$(p - p_0) \int_0^\infty g(t; p_0) e^{-(p-p_0)t} dt,$$

其中

$$g(t; p_0) = \int_0^t f(\tau) e^{-p_0 \tau} d\tau.$$

证 因为 $dg(t; p_0)/dt = f(t)e^{-p_0 t}$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t)e^{-pt} dt &= \int_0^T \frac{dg(t; p_0)}{dt} e^{-(p-p_0)t} dt \\ &= g(t; p_0) e^{-(p-p_0)t} \Big|_0^T + (p-p_0) \int_0^T g(t; p_0) e^{-(p-p_0)t} dt \\ &= g(T; p_0) e^{-(p-p_0)T} + (p-p_0) \int_0^T g(t; p_0) e^{-(p-p_0)t} dt. \end{aligned} \quad (13.3)$$

已知积分 $\int_0^\infty f(t)e^{-p_0 t} dt$ 收敛, 这意味着

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(t)e^{-p_0 t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} g(T; p_0)$$

存在, 亦即 $g(t; p_0)$ 有界: $|g(t; p_0)| \leq M$, 故将 (13.3) 式取极限 $T \rightarrow \infty$ 后, 即证得积分

$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = (p - p_0) \int_0^\infty g(t; p_0)e^{-(p-p_0)t}dt \quad (13.4)$$

收敛. 而对于上式右端的积分, 因为被积函数

$$|g(t; p_0)e^{-(p-p_0)t}| \leq Me^{-(s-s_0)t} \leq Me^{-\delta t}, \quad \delta = \min(s - s_0) > 0,$$

而 $e^{-\delta t}$ 可积, 由此即证得 (13.4) 式右端的积分绝对收敛. \square

根据定理 13.3, 运用与定理 13.2 同样的证明方法, 就能够证明:

定理 13.4 Laplace 积分的收敛区域是半平面 $\operatorname{Re} p > \beta$, 而对于直线 $\operatorname{Re} p = \beta$ 上的点, 可能 Laplace 积分全都收敛, 可能全都发散, 也有可能在一部分点上收敛, 而在另一部分点上发散. 作为极端情形, 这里的 β 也可以是 $\pm\infty$.

定义 13.2 Laplace 积分的收敛区域 $\operatorname{Re} p > \beta$ 称为 Laplace 积分的**收敛半平面**, 相应的实数值 β 称为 Laplace 积分的**收敛横标**.

容易以为, Laplace 积分的收敛横标 β 与绝对收敛横标 α 相等, 或者说, Laplace 积分的收敛区域与绝对收敛区域最多只是在边界上可能有差异, 就像我们熟悉的幂级数中遇见的情形那样. 这种想法其实大谬不然. 我们所能得出的结论只是 $\alpha \geq \beta$. 甚至存在这样的 Laplace 积分, 它在全平面处处收敛, 却处处不绝对收敛. 函数

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \ln \ln 3, \\ (-1)^n e^{\lambda e^t}, & \ln \ln n \leq t < \ln \ln(n+1), n = 3, 4, \dots \end{cases}$$

的 Laplace 积分就是这样的例子. 事实上, 这时

$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \sum_{n=3}^\infty (-1)^n \int_{\ln \ln n}^{\ln \ln(n+1)} e^{\lambda e^t} e^{-pt}dt.$$

作变换 $t = \ln \ln x$, 得

$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \sum_{n=3}^\infty (-1)^n \int_n^{n+1} \frac{\ln^{-p-1} x}{x^{1-\lambda}} dx.$$

容易看出, 只要 $\lambda < 1$, 则对于任意实数 p 值, 至少 n 足够大时, $\int_n^{n+1} \frac{\ln^{-p-1} x}{x^{1-\lambda}} dx$ 单调地趋于 0, 因此级数 (作为交错级数) 收敛, 即原 Laplace 积分收敛; 但当 $0 < \lambda < 1$ 时, 无论 p 取何值, 均有

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-pt}|dt = \int_{\ln \ln 3}^\infty e^{\lambda e^t - st}dt$$

总不收敛, 亦即原 Laplace 积分不绝对收敛.

§13.3 Laplace 积分的解析性

作为含参量的积分, 可以讨论 Laplace 积分的解析性.

定理 13.5 Laplace 积分在其收敛半平面 $\operatorname{Re} p > \beta$ 内解析 (β 为 Laplace 积分的收敛横标), 其各阶导数可以由积分号下求导而得:

$$F^{(n)}(p) = \int_0^{\infty} (-t)^n f(t) e^{-pt} dt. \quad (13.5)$$

证 按照解析函数的定义, 只需证明 $F(p)$ 在收敛半平面内处处可导, 而且只需证明

$$F'(p) = \int_0^{\infty} (-t) f(t) e^{-pt} dt$$

在收敛半平面内处处成立即可. 这一证明的困难之处在于 Laplace 积分只是收敛而非绝对收敛 (因而直接在积分号下求导的运算不合法), 而克服这一困难的办法恰当也就是应用定理 13.3 将收敛的 Laplace 积分改写成绝对收敛的 Laplace 积分:

$$F(p) = (p-p_0) \int_0^{\infty} g(t; p_0) e^{-(p-p_0)t} dt, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0, \quad (13.6a)$$

其中 p_0 应当处于 Laplace 积分的收敛半平面内, 而

$$g(t; p_0) = \int_0^t f(\tau) e^{-p_0 \tau} d\tau. \quad (13.6b)$$

令 $\operatorname{Re} p = s$, $\operatorname{Re} p_0 = s_0$, 取 $s = \beta + 3\xi$, $s_0 = \beta + \xi$, 其中 $\xi > 0$, 因而满足 $\operatorname{Re}(p-p_0) > 0$ 的要求. 作为第一步, 我们先要证明, $F'(p)$ 可通过对 (13.6a) 式求导 (包括积分号下求导) 而求得, 即

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{F(p+h) - F(p)}{h} = \int_0^{\infty} g(t; p_0) e^{-(p-p_0)t} dt - (p-p_0) \int_0^{\infty} t g(t; p_0) e^{-(p-p_0)t} dt.$$

将右端记为 $\Phi(p)$, 于是

$$\begin{aligned} & \frac{F(p+h) - F(p)}{h} - \Phi(p) \\ &= \frac{1}{h} \left[(p-p_0+h) \int_0^{\infty} g(t; p_0) e^{-(p-p_0+h)t} dt - (p-p_0) \int_0^{\infty} g(t; p_0) e^{-(p-p_0)t} dt \right] \\ & \quad - \int_0^{\infty} g(t; p_0) e^{-(p-p_0)t} dt + (p-p_0) \int_0^{\infty} t g(t; p_0) e^{-(p-p_0)t} dt \\ &= \int_0^{\infty} g(t; p_0) e^{-(p-p_0)t} (e^{-ht} - 1) dt \\ & \quad + (p-p_0) \int_0^{\infty} g(t; p_0) e^{-(p-p_0)t} \left(\frac{e^{-ht} - 1}{h} + t \right) dt. \end{aligned}$$

只要取 h 足够小, 例如 $|h| < \xi$, 则有

$$\begin{aligned} |e^{-ht} - 1| &= \left| -\frac{ht}{1!} + \frac{(ht)^2}{2!} - \frac{(ht)^3}{3!} + \cdots \right| \\ &\leq |h|t \left(1 + \frac{|h|t}{1!} + \frac{|h|^2 t^2}{2!} + \cdots \right) = |h|te^{|h|t} \leq |h|te^{\xi t}, \\ \left| \frac{e^{-ht} - 1}{h} + t \right| &= \left| \frac{ht^2}{2!} - \frac{h^2 t^3}{3!} + \frac{h^3 t^4}{4!} - \cdots \right| \\ &\leq |h|t^2 \left(1 + \frac{|h|t}{1!} + \frac{|h|^2 t^2}{2!} + \cdots \right) = |h|t^2 e^{|h|t} \leq |h|t^2 e^{\xi t}. \end{aligned}$$

因为当 $t \geq 0$ 时, $g(t; p_0)$ 连续, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t; p_0) = F(p_0)$, 故 $|g(t; p_0)| \leq M$. 综合以上结果, 并注意到 $\operatorname{Re}(p - p_0) = 2\xi$, 就得到

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{h} [F(p+h) - F(p)] - \Phi(p) \right| \\ &\leq |h| M \left(\int_0^\infty te^{\xi t} e^{-2\xi t} dt + |p - p_0| \int_0^\infty t^2 e^{\xi t} e^{-2\xi t} dt \right) \\ &= |h| M \left(\int_0^\infty te^{-\xi t} dt + |p - p_0| \int_0^\infty t^2 e^{-\xi t} dt \right) \\ &= |h| M \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{2}{\xi^3} |p - p_0| \right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

因而即证得

$$F'(p) = \int_0^\infty g(t; p_0) e^{-(p-p_0)t} dt - (p - p_0) \int_0^\infty tg(t; p_0) e^{-(p-p_0)t} dt.$$

再继续化简, 将上式右端第二项分部积分, 得

$$\begin{aligned} &-(p-p_0) \int_0^\infty tg(t; p_0) e^{-(p-p_0)t} dt \\ &= tg(t; p_0) e^{-(p-p_0)t} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{d[tg(t; p_0)]}{dt} e^{-(p-p_0)t} dt \\ &= - \int_0^\infty \left[g(t; p_0) + t \frac{dg(t; p_0)}{dt} \right] e^{-(p-p_0)t} dt, \end{aligned}$$

因此

$$F'(p) = - \int_0^\infty t \frac{dg(t; p_0)}{dt} e^{-(p-p_0)t} dt.$$

再注意到 $dg(t; p_0)/dt = f(t) e^{-p_0 t}$, 所以最后就证得所要求的结果

$$F'(p) = \int_0^\infty (-t) f(t) e^{-pt} dt.$$

□

需要区分“Laplace 积分 (13.2) 的解析性”与“ $F(p)$ 的解析性”这两种说法. 二者有联系, 但又有区别. 定理 13.5 告诉我们, 就 Laplace 积分而言, 其解析区域是半平面 $\operatorname{Re} p > \beta$, 我们绝不应奢望积分的解析区域能超出收敛区域. 但是切不可以为, 函数 $F(p)$ 作为复变量 p 的函数, 它的解析区域也就只是半平面 $\operatorname{Re} p > \beta$. 函数 $F(p)$, 不仅不必在直线 $\operatorname{Re} p = \beta$ 上有奇点, 而且可以越过这条直线而向左延拓到更大区域, 甚至延拓到整个 p 平面. 例如, 对于

$$f(t) = -\pi e^t \sin(\pi e^t) = \frac{d}{dt} \cos(\pi e^t),$$

毋庸置疑, 它的 Laplace 积分在 $\operatorname{Re} p > 1$ 的半平面上收敛, 然而

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt &= - \int_0^\infty \pi e^t \sin(\pi e^t) e^{-pt} dt \\ &= \cos(\pi e^t) e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty \cos(\pi e^t) e^{-pt} dt \\ &= 1 + \frac{p}{\pi} \int_0^\infty \pi e^t \cos(\pi e^t) e^{-(p+1)t} dt \\ &= 1 + \frac{p}{\pi} \sin(\pi e^t) e^{-(p+1)t} \Big|_0^\infty + \frac{p(p+1)}{\pi} \int_0^\infty \sin(\pi e^t) e^{-(p+1)t} dt \\ &= 1 + \frac{p(p+1)}{\pi^2} \int_0^\infty \pi e^t \sin(\pi e^t) e^{-(p+2)t} dt, \end{aligned}$$

即

$$F(p) = 1 - \frac{p(p+1)}{\pi^2} F(p+2),$$

因此可以利用这个关系将 $F(p)$ 解析延拓到半平面 $\operatorname{Re} p > -1$ 而不产生任何奇点, 而后可逐次延拓到 $\operatorname{Re} p > -3, \operatorname{Re} p > -5, \dots$, 最终延拓到整个 p 平面.

定义 13.3 $F(p)$ 的解析区域 $\operatorname{Re} p > \gamma$ 称为该 Laplace 变换的**正则半平面**, 相应的实数值 γ 称为 $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ 的**正则横标**.

显然, $\beta \geq \gamma$.

§13.4 Laplace 变换举例

例 13.1 求 $\mathcal{L}\{\ln t\}$.

解 可以从 $\int_0^\infty t^{z-1} e^{-pt} dt$ 出发来计算 $\mathcal{L}\{\ln t\} = \int_0^\infty \ln t e^{-pt} dt$. 因为

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-pt} dt = \frac{\Gamma(z)}{p^z}, \quad \operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} z > 0, \quad (13.7)$$

两端对 z 求导 (合法性?), 得

$$\int_0^{\infty} t^{z-1} \ln t e^{-pt} dt = \frac{\Gamma(z)}{p^z} [\psi(z) - \ln p], \quad \operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} z > 0. \quad (13.8)$$

代入 $z = 1$, 即可求出

$$\int_0^{\infty} \ln t e^{-pt} dt = \frac{1}{p} [\psi(1) - \ln p] = -\frac{1}{p} (\gamma + \ln p), \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (13.9a)$$

类似地, 还可以代入 $z = 1/2$, 从而得到

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} e^{-pt} dt &= \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{p}} \left[\psi\left(\frac{1}{2}\right) - \ln p \right] \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{p}} (\gamma + 2 \ln 2 + \ln p), \quad \operatorname{Re} p > 0. \end{aligned} \quad (13.9b)$$

读者也可以代入 $z = 3/2$ 或 $z = 2$ 等数值, 又可得到一系列函数的 Laplace 变换.

例 13.2 计算 $I_n = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin^n t dt$, 其中 n 为正整数.

解 $n = 0$ 与 $n = 1$ 时的结果已知, 即

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad (13.10a)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \sin t dt = \frac{1}{p^2 + 1}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (13.10b)$$

所以下面只需讨论 $n > 1$ 的情形. 此时可分部积分两次, 得

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin^n t dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \sin^n t \Big|_0^{\infty} + \frac{n}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin^{n-1} t \cos t dt \\ &= \frac{n}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin^{n-1} t \cos t dt = \frac{n}{p^2} \int_0^{\infty} e^{-pt} (\sin^{n-1} t \cos t)' dt \\ &= \frac{n}{p^2} \int_0^{\infty} e^{-pt} [(n-1) \sin^{n-2} t \cos^2 t - \sin^n t] dt \\ &= \frac{n}{p^2} \int_0^{\infty} e^{-pt} [(n-1) \sin^{n-2} t (1 - \sin^2 t) - \sin^n t] dt, \end{aligned}$$

因此得到递推关系

$$I_n = \frac{n(n-1)}{p^2 + n^2} I_{n-2}.$$

可以预见, 当 n 为偶数或奇数时, 反复利用这个递推关系, 将会推至 I_0 或 I_1 , 即

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n(2n-1)}{p^2 + (2n)^2} I_{2n-2} = \frac{2n(2n-1)}{p^2 + (2n)^2} \frac{(2n-2)(2n-3)}{p^2 + (2n-2)^2} I_{2n-4} \\ &= \cdots = \frac{(2n)!}{[p^2 + (2n)^2][p^2 + (2n-2)^2] \cdots [p^2 + 2^2]} \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0; \end{aligned} \quad (13.11a)$$

$$\begin{aligned}
 I_{2n+1} &= \frac{(2n+1)(2n)}{p^2 + (2n+1)^2} I_{2n-1} = \frac{(2n+1)(2n)}{p^2 + (2n+1)^2} \frac{(2n-1)(2n-2)}{p^2 + (2n-1)^2} I_{2n-3} \\
 &= \cdots = \frac{(2n+1)!}{[p^2 + (2n+1)^2][p^2 + (2n-1)^2] \cdots [p^2 + 3^2][p^2 + 1^2]}, \quad \operatorname{Re} p > 0.
 \end{aligned} \tag{13.11b}$$

例 13.3 计算 $J_n = \int_0^\infty e^{-pt} \cos^n t \, dt$, 其中 n 为正整数.

解 与上题相似, 可以分部积分两次而得到

$$\begin{aligned}
 J_n &= \int_0^\infty e^{-pt} \cos^n t \, dt \\
 &= -\frac{1}{p} e^{-pt} \cos^n t \Big|_0^\infty - \frac{n}{p} \int_0^\infty e^{-pt} \cos^{n-1} t \sin t \, dt \\
 &= \frac{1}{p} - \frac{n}{p} \int_0^\infty e^{-pt} \cos^{n-1} t \sin t \, dt = \frac{1}{p} - \frac{n}{p^2} \int_0^\infty e^{-pt} [\cos^{n-1} t \sin t]' \, dt \\
 &= \frac{1}{p} - \frac{n}{p^2} \int_0^\infty e^{-pt} [-(n-1) \cos^{n-2} t \sin^2 t + \cos^n t] \, dt \\
 &= \frac{1}{p} - \frac{n}{p^2} \int_0^\infty e^{-pt} [-(n-1) \cos^{n-2} t (1 - \cos^2 t) + \cos^n t] \, dt.
 \end{aligned}$$

因而有“非齐次的”递推关系

$$J_n = \frac{n(n-1)}{p^2 + n^2} \left[J_{n-2} + \frac{p}{n(n-1)} \right].$$

非齐次项的出现, 给下面的计算带来了一定的麻烦:

$$\begin{aligned}
 J_{2n} &= \frac{2n(2n-1)}{p^2 + (2n)^2} \left[J_{2n-2} + \frac{p}{2n(2n-1)} \right] \\
 &= \frac{2n(2n-1)}{p^2 + (2n)^2} \left\{ \frac{(2n-2)(2n-3)}{p^2 + (2n-2)^2} \left[J_{2n-4} + \frac{p}{(2n-2)(2n-3)} \right] + \frac{p}{2n(2n-1)} \right\} \\
 &= \frac{2n(2n-1)}{p^2 + (2n)^2} \frac{(2n-2)(2n-3)}{p^2 + (2n-2)^2} \\
 &\quad \times \left[J_{2n-4} + \frac{p}{(2n-2)(2n-3)} + \frac{p}{2n(2n-1)} \frac{p^2 + (2n-2)^2}{(2n-2)(2n-3)} \right] \\
 &= \frac{2n(2n-1)}{p^2 + (2n)^2} \frac{(2n-2)(2n-3)}{p^2 + (2n-2)^2} \left\{ \frac{(2n-4)(2n-5)}{p^2 + (2n-4)^2} \left[J_{2n-6} + \frac{p}{(2n-4)(2n-5)} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{p}{(2n-2)(2n-3)} + \frac{p}{2n(2n-1)} \frac{p^2 + (2n-2)^2}{(2n-2)(2n-3)} \right\} \\
 &= \frac{2n(2n-1)}{p^2 + (2n)^2} \frac{(2n-2)(2n-3)}{p^2 + (2n-2)^2} \frac{(2n-4)(2n-5)}{p^2 + (2n-4)^2} \\
 &\quad \times \left[J_{2n-6} + \frac{p}{(2n-4)(2n-5)} + \frac{p}{(2n-2)(2n-3)} \frac{p^2 + (2n-4)^2}{(2n-4)(2n-5)} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{p}{2n(2n-1)} \frac{p^2 + (2n-2)^2}{(2n-2)(2n-3)} \frac{p^2 + (2n-4)^2}{(2n-4)(2n-5)} \Big] \\
& = \dots \\
& = \frac{2n(2n-1)}{p^2 + (2n)^2} \frac{(2n-2)(2n-3)}{p^2 + (2n-2)^2} \frac{(2n-4)(2n-5)}{p^2 + (2n-4)^2} \dots \frac{2 \cdot 1}{p^2 + 2^2} \\
& \times \left[J_0 + \frac{p}{2 \cdot 1} + \frac{p}{4 \cdot 3} \frac{p^2 + 2^2}{2 \cdot 1} + \frac{p}{6 \cdot 5} \frac{p^2 + 4^2}{4 \cdot 3} \frac{p^2 + 2^2}{2 \cdot 1} + \dots \right. \\
& \left. + \frac{p}{2n(2n-1)} \frac{p^2 + (2n-2)^2}{(2n-2)(2n-3)} \frac{p^2 + (2n-4)^2}{(2n-4)(2n-5)} \dots \frac{p^2 + 2^2}{2 \cdot 1} \right].
\end{aligned}$$

代入

$$J_0 = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \frac{1}{p}, \quad (13.12a)$$

就得到

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty e^{-pt} \cos^{2n} t dt \\
& = \frac{(2n)!}{[p^2 + (2n)^2] [p^2 + (2n-2)^2] [p^2 + (2n-4)^2] \dots (p^2 + 2^2)} \\
& \times \frac{1}{p} \left\{ 1 + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^2(p^2 + 2^2)}{4!} + \frac{p^2(p^2 + 2^2)(p^2 + 4^2)}{6!} \right. \\
& \left. + \dots + \frac{p^2(p^2 + 2^2)(p^2 + 4^2) \dots [p^2 + (2n-2)^2]}{(2n)!} \right\}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (13.13a)
\end{aligned}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned}
J_{2n+1} & = \frac{(2n+1)(2n)}{p^2 + (2n+1)^2} \left[J_{2n-1} + \frac{p}{(2n+1)(2n)} \right] \\
& = \frac{(2n+1)(2n)}{p^2 + (2n+1)^2} \frac{(2n-1)(2n-2)}{p^2 + (2n-1)^2} \\
& \times \left[J_{2n-3} + \frac{p}{(2n-1)(2n-2)} + \frac{p}{(2n+1)(2n)} \frac{p^2 + (2n-1)^2}{(2n-1)(2n-2)} \right] \\
& = \frac{(2n+1)(2n)}{p^2 + (2n+1)^2} \frac{(2n-1)(2n-2)}{p^2 + (2n-1)^2} \frac{(2n-3)(2n-4)}{p^2 + (2n-3)^2} \\
& \times \left[J_{2n-5} + \frac{p}{(2n-3)(2n-4)} + \frac{p}{(2n-1)(2n-2)} \frac{p^2 + (2n-3)^2}{(2n-3)(2n-4)} \right. \\
& \left. + \frac{p}{(2n+1)(2n)} \frac{p^2 + (2n-1)^2}{(2n-1)(2n-2)} \frac{p^2 + (2n-3)^2}{(2n-3)(2n-4)} \right] \\
& = \dots
\end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
&= \frac{(2n+1)(2n)}{p^2 + (2n+1)^2} \frac{(2n-1)(2n-2)}{p^2 + (2n-1)^2} \frac{(2n-3)(2n-4)}{p^2 + (2n-3)^2} \cdots \frac{3 \cdot 2}{p^2 + 3^2} \\
&\times \left[J_1 + \frac{p}{3 \cdot 2} + \frac{p}{5 \cdot 4} \frac{p^2 + 3^2}{3 \cdot 2} + \frac{p}{7 \cdot 6} \frac{p^2 + 5^2}{5 \cdot 4} \frac{p^2 + 3^2}{3 \cdot 2} + \cdots \right. \\
&\left. + \frac{p}{(2n+1)(2n)} \frac{p^2 + (2n-1)^2}{(2n-1)(2n-2)} \frac{p^2 + (2n-3)^2}{(2n-3)(2n-4)} \cdots \frac{p^2 + 3^2}{3 \cdot 2} \right].
\end{aligned}$$

代入

$$J_1 = \int_0^\infty e^{-pt} \cos t \, dt = \frac{p}{p^2 + 1}, \quad (13.12b)$$

即得

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-pt} \cos^{2n+1} t \, dt \\
&= \frac{(2n+1)!}{[p^2 + (2n+1)^2][p^2 + (2n-1)^2][p^2 + (2n-3)^2] \cdots (p^2 + 3^2)(p^2 + 1)} \\
&\times p \left\{ 1 + \frac{p^2 + 1}{3!} + \frac{(p^2 + 1)(p^2 + 3^2)}{5!} + \frac{(p^2 + 1)(p^2 + 3^2)(p^2 + 5^2)}{7!} \right. \\
&\left. + \cdots + \frac{(p^2 + 1)(p^2 + 3^2)(p^2 + 5^2) \cdots [p^2 + (2n-1)^2]}{(2n+1)!} \right\}, \quad \operatorname{Re} p > 0.
\end{aligned} \quad (13.13b)$$

 **评述** 上一节关于 Laplace 积分解析性的讨论, 有助于简化 Laplace 积分的计算. 因为 Laplace 积分在它的收敛半平面内一定解析, 所以我们只需在 p 为实数的条件下计算积分, 而后一定可以延拓到收敛半平面上. 唯一可能需要额外说明的只是区域的边界, 需要讨论 Laplace 积分在直线 $\operatorname{Re} p = \beta$ (收敛横标) 上是否收敛, 但这也只要判断直线上的任意一点 (例如 $p = \beta$) 即可.

例 13.4 求 $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-1/t}\right\}$.

解 因为

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-1/t}\right\} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-1/t} e^{-pt} \, dt.$$

作变换 $t = x^2$, $p = \alpha^4$, 得

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-1/t}\right\} = 2 \int_0^\infty e^{-x^{-2}} e^{-\alpha^4 x^2} \, dx.$$

再令 $y = \alpha x$, 就有

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-1/t}\right\} &= \frac{2}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha^2(y^{-2}+y^2)} dy = \frac{2}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha^2(y^2+y^{-2})} \frac{dy}{y^2} \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha^2(y^2+y^{-2})} \left(1 + \frac{1}{y^2}\right) dy \\
&= \frac{1}{\alpha} e^{-2\alpha^2} \int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha^2\xi^2} d\xi \quad (\text{因为 } \xi = y - 1/y) \\
&= \frac{1}{\alpha} e^{-2\alpha^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-2\sqrt{p}}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (13.14)
\end{aligned}$$

在以上的计算过程中, 可以先假定 p 为实数 (例如, 在作变换 $p = \alpha^4$ 时, 可以规定 $\alpha > 0$), 在得到最后结果后, 再延拓到收敛半平面 $\operatorname{Re} p > 0$.

例 13.5 求正弦积分

$$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi$$

与余弦积分

$$\operatorname{ci}(t) = - \int_t^\infty \frac{\cos \xi}{\xi} d\xi$$

的 Laplace 变换.

解 因为

$$\mathcal{L}\{\operatorname{Si}(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} \left(\int_0^t \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi \right) dt,$$

交换积分次序, 得

$$\mathcal{L}\{\operatorname{Si}(t)\} = \int_0^\infty \frac{\sin \xi}{\xi} \left(\int_\xi^\infty e^{-pt} dt \right) d\xi = \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{\sin \xi}{\xi} e^{-p\xi} d\xi,$$

利用^a

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt = \int_p^\infty F(q) dq, \quad \text{其中 } F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt, \quad (13.15)$$

即得

$$\mathcal{L}\{\operatorname{Si}(t)\} = \frac{1}{p} \int_p^\infty \frac{dq}{1+q^2} = \frac{1}{p} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan p \right), \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (13.16)$$

又因为

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\operatorname{ci}(t)\} &= \int_0^\infty e^{-pt} \left(\int_t^\infty \frac{\cos \xi}{\xi} d\xi \right) dt = \int_0^\infty \frac{\cos \xi}{\xi} \left(\int_0^\xi e^{-pt} dt \right) d\xi \\
&= - \int_0^\infty \frac{\cos \xi}{\xi} (1 - e^{-p\xi}) d\xi,
\end{aligned}$$

^a 参见: 吴崇试, 数学物理方法, 第 2 版, 北京: 北京大学出版社, 2003: 121.

由 (13.15) 式可直接导出

$$\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} (e^{-pt} - e^{-qt}) dt = \int_p^q F(\xi) d\xi.$$

因此有

$$\mathcal{L}\{\text{ci}(t)\} = -\frac{1}{p} \int_0^p \frac{q}{1+q^2} dq = -\frac{1}{2p} \ln(1+p^2), \quad \text{Re } p > 0. \quad (13.17)$$

例 13.6 求 n 次 Laguarre 多项式

$$L_n(t) = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n(e^{-t}t^n)}{dt^n} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} t^k$$

的 Laplace 变换.

$$\begin{aligned} \text{解 } \mathcal{L}\{L_n(t)\} &= \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-(p-1)t} \frac{d^n(e^{-t}t^n)}{dt^n} dt \\ &= \frac{1}{n!} \left[e^{-(p-1)t} \frac{d^{n-1}(e^{-t}t^n)}{dt^{n-1}} \Big|_0^{\infty} \right. \\ &\quad \left. + (p-1) \int_0^{\infty} e^{-(p-1)t} \frac{d^{n-1}(e^{-t}t^n)}{dt^{n-1}} dt \right] \\ &= \frac{p-1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-(p-1)t} \frac{d^{n-1}(e^{-t}t^n)}{dt^{n-1}} dt = \dots \\ &= \frac{(p-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-(p-1)t} e^{-t} t^n dt = \frac{(p-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n dt \\ &= \frac{(p-1)^n}{n!} \frac{n!}{p^{n+1}} = \frac{(p-1)^n}{p^{n+1}}. \end{aligned} \quad (13.18)$$

容易判断, 收敛半平面为 $\text{Re } p > 0$.

例 13.7 计算积分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-pt} dt$ 与 $\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} e^{-pt} dt$.

解 显然这两个积分在 $\text{Re } p \geq 0$ 时均收敛. 下面先计算

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{it} e^{-pt} dt &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-(p-i)t} dt = \frac{\Gamma(1/2)}{(p-i)^{1/2}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \left(\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p} + i \sqrt{\sqrt{p^2+1}-p} \right). \end{aligned}$$

这里的计算仍然应当限制在 p 为实数的条件下进行, 因而就允许直接比较上式两端的实部和虚部, 从而得到

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} e^{-pt} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} + \frac{p}{p^2+1}}, \quad (13.19)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-pt} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} - \frac{p}{p^2+1}}. \quad (13.20)$$

现在就能再延拓到 $\operatorname{Re} p \geq 0$. 这里出现的多值函数都应该理解为: 规定在正实轴上

$$\arg(p^2+1) = 0, \quad \arg(\sqrt{p^2+1} \pm p) = 0.$$

还可以将这两个积分用于计算 Fresnel 积分^①的 Laplace 变换:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{S(\sqrt{t})\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-pt} \left[\int_0^t \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du \right] dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left[\int_u^\infty e^{-pt} dt \right] \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{\sin u}{\sqrt{u}} e^{-pu} du = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} - \frac{p}{p^2+1}}, \end{aligned} \quad (13.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{C(\sqrt{t})\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-pt} \left[\int_0^t \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du \right] dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left[\int_u^\infty e^{-pt} dt \right] \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{p} \int_0^\infty \frac{\cos u}{\sqrt{u}} e^{-pu} du = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} + \frac{p}{p^2+1}}. \end{aligned} \quad (13.22)$$

另一方面, 将上面的结果改写为

$$\mathcal{L}\{S(\sqrt{t})\} = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} - \frac{p}{p^2+1}} = \frac{i}{2\sqrt{2}p} \left(\frac{1}{\sqrt{p+i}} - \frac{1}{\sqrt{p-i}} \right), \quad (13.23a)$$

$$\mathcal{L}\{C(\sqrt{t})\} = \frac{1}{2p} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} + \frac{p}{p^2+1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}p} \left(\frac{1}{\sqrt{p+i}} + \frac{1}{\sqrt{p-i}} \right). \quad (13.23b)$$

① 这里采用的是 I. S. Gradshteyn 和 I. M. Ryzhik 的 *Table of Integrals, Series, and Products* 一书中的定义:

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t^2 dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^2} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du \quad \text{和} \quad C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos t^2 dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^2} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du.$$

除此之外, Fresnel 函数还有其他定义, 例如 A. Erdélyi 等人在 *Higher Transcendental Functions* 一书中定义为

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du \quad \text{和} \quad C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du;$$

M. Abramowitz 和 I. A. Stegun 的 *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* 一书中的定义是

$$S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi t^2}{2} dt \quad \text{和} \quad C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos \frac{\pi t^2}{2} dt;$$

在 http://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_integral 中的定义则为

$$S(x) = \int_0^x \sin t^2 dt \quad \text{和} \quad C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos t^2 dt.$$

为了与关于 $\arg(\sqrt{p^2+1} \pm p)$ 的规定一致, 这里需规定, 当 p 处于正实轴上时,

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg(p-i) < 0, \quad 0 < \arg(p+i) \leq \frac{\pi}{2}.$$

因此

$$\mathcal{L}\{S(\sqrt{t}) e^{it}\} = \frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{1}{p-i} \left(\frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{p-2i}} \right), \quad (13.24a)$$

$$\mathcal{L}\{S(\sqrt{t}) e^{-it}\} = \frac{i}{2\sqrt{2}} \frac{1}{p+i} \left(\frac{1}{\sqrt{p+2i}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \right), \quad (13.24b)$$

$$\mathcal{L}\{C(\sqrt{t}) e^{it}\} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{p-i} \left(\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{p-2i}} \right), \quad (13.24c)$$

$$\mathcal{L}\{C(\sqrt{t}) e^{-it}\} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{p+i} \left(\frac{1}{\sqrt{p+2i}} + \frac{1}{\sqrt{p}} \right). \quad (13.24d)$$

将它们组合起来, 就得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{C(\sqrt{t}) \sin t\} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{1}{p^2+1} \\ &\quad + \frac{1}{2i} \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{p-i} \frac{1}{\sqrt{p-2i}} - \frac{1}{p+i} \frac{1}{\sqrt{p+2i}} \right), \end{aligned} \quad (13.25a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{S(\sqrt{t}) \cos t\} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{1}{p^2+1} \\ &\quad - \frac{i}{2} \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{p-i} \frac{1}{\sqrt{p-2i}} - \frac{1}{p+i} \frac{1}{\sqrt{p+2i}} \right); \end{aligned} \quad (13.25b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{S(\sqrt{t}) \sin t\} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{p}}{p^2+1} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{p-i} \frac{1}{\sqrt{p-2i}} + \frac{1}{p+i} \frac{1}{\sqrt{p+2i}} \right), \end{aligned} \quad (13.25c)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{C(\sqrt{t}) \cos t\} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{p}}{p^2+1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{p-i} \frac{1}{\sqrt{p-2i}} + \frac{1}{p+i} \frac{1}{\sqrt{p+2i}} \right). \end{aligned} \quad (13.25d)$$

重新组合, 又可得到

$$\mathcal{L}\{C(\sqrt{t}) \sin t - S(\sqrt{t}) \cos t\} = \frac{1}{\sqrt{2p}} \frac{1}{p^2+1}, \quad (13.26a)$$

$$\mathcal{L}\{S(\sqrt{t}) \sin t + C(\sqrt{t}) \cos t\} = \frac{1}{p^2+1} \sqrt{\frac{p}{2}}. \quad (13.26b)$$

例 13.8 计算积分 $\int_0^\infty t^{\nu/2} J_\nu(\sqrt{t}) e^{-pt} dt$, 其中 $\nu \geq 0$.

解 容易判断, 此积分的收敛半平面为 $\operatorname{Re} p > 0$.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} t^{\nu/2} J_{\nu}(\sqrt{t}) e^{-pt} dt &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+\nu+1)} \frac{1}{2^{2n+\nu}} t^{n+\nu} e^{-pt} dt \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+\nu+1)} \frac{1}{2^{2n+\nu}} \int_0^{\infty} t^{n+\nu} e^{-pt} dt \\
 &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+\nu+1)} \frac{1}{2^{2n+\nu}} \cdot \frac{\Gamma(n+\nu+1)}{p^{n+\nu+1}} \\
 &= 2^{-\nu} p^{-\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{4p}\right)^n \\
 &= 2^{-\nu} p^{-\nu-1} e^{-1/4p}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (13.27)
 \end{aligned}$$

§13.5 Laplace 变换的反演

在讨论 Laplace 变换的反演公式时, 需要区分 Laplace 积分

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

绝对收敛或收敛而不绝对收敛的两种情形.

13.5.1 Laplace 积分绝对收敛时的反演公式

定理 13.6 设 $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ 对于实数 $p (= s_0)$ 绝对收敛, 即

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-s_0 t} dt < \infty,$$

因而对 $\operatorname{Re} p \geq s_0$ 也绝对收敛.

(1) 在 $t > 0$ 处, 只要函数 $f(t)$ 在该点邻域上为有限变差函数, 则有反演公式

$$\frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)] = \text{v.p.} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp \right\} \quad (s = \operatorname{Re} p \geq s_0); \quad (13.28a)$$

(2) 若 $f(t)$ 在区间 (ε, δ) 上为有限变差函数 ($\varepsilon \rightarrow 0, \delta > 0$), 则

$$\frac{1}{2}f(0+) = \text{v.p.} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp \right\} \quad (s = \operatorname{Re} p \geq s_0); \quad (13.28b)$$

(3) 对于 $t < 0$, 恒有

$$\text{v.p.} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp \right\} = 0 \quad (s = \operatorname{Re} p \geq s_0). \quad (13.28c)$$

此定理可以从 Fourier 变换的反演公式推出, 而定理的内容也是我们所熟悉的, 此处不再赘述.

13.5.2 Laplace 积分收敛而不绝对收敛时的反演公式

当 Laplace 积分不绝对收敛时, 定理 13.6 不再适用. 为了导出这种条件下的反演公式, 需要用到下面的定理 (原函数的积分定理).

定理 13.7 设

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

若 $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ 对于正实数 $p = s_0 > 0$ 收敛, 则 $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(p)$ 对于该实数 $p = s_0$ 也收敛, 且

$$G(p) = \frac{1}{p} F(p), \quad \text{当 } p \text{ 为实数 } s_0 \text{ 或 } \operatorname{Re} p > s_0;$$

并且当 $t \rightarrow \infty$ 时, $g(t) = o(e^{s_0 t})$, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-s_0 t} g(t) = 0,$$

因而当 $\operatorname{Re} p > s_0$ 时 $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(p)$ 绝对收敛.

证 再定义函数

$$\phi(t) = e^{s_0 t}, \quad \psi(t) = e^{s_0 t} \int_0^t e^{-s_0 \tau} g(\tau) d\tau,$$

则按照 l'Hôpital 法则, 可以求得极限

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(t)}{\phi(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s_0} e^{-s_0 t} g(t) + \int_0^t e^{-s_0 \tau} g(\tau) d\tau \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s_0} e^{-s_0 t} g(t) - \frac{1}{s_0} e^{-s_0 \tau} g(\tau) \Big|_0^t + \frac{1}{s_0} \int_0^t e^{-s_0 \tau} g'(\tau) d\tau \right] \\ &= \frac{1}{s_0} \int_0^\infty e^{-s_0 \tau} g'(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (13.29a)$$

但 $g'(\tau) = f(\tau)$, 所以有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(t)}{\phi(t)} = \frac{1}{s_0} F(s_0).$$

这样就证明了极限

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(t)}{\phi(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-s_0 \tau} g(\tau) d\tau = \int_0^\infty e^{-s_0 \tau} g(\tau) d\tau \quad (13.29b)$$

存在, 亦即 $\mathcal{L}\{g(t)\}$ 对于该实数 $p = s_0$ 也收敛 (记为 $G(s_0)$), 且

$$G(s_0) = \frac{1}{s_0} F(s_0).$$

按照定理 13.3, 又可知 $\mathcal{L}\{g(t)\}$ 对于 $\operatorname{Re} p > s_0$ 也收敛 (记为 $G(p)$). 特别是, 对于实轴上满足 $s \geq s_0$ 的所有点均收敛, 且

$$G(s) = \frac{1}{s} F(s).$$

因为 $G(p)$ 在收敛半平面 $\operatorname{Re} p > s_0$ 内一定解析 (定理 13.5), 所以就能将上面的等式延拓为

$$G(p) = \frac{1}{p} F(p), \quad \operatorname{Re} p > s_0.$$

而上述证明过程中得到的 (13.28a) 和 (13.28b) 二式, 意味着

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s_0} e^{-s_0 t} g(t) + \int_0^t e^{-s_0 \tau} g(\tau) d\tau \right] = \int_0^\infty e^{-s_0 \tau} g(\tau) d\tau,$$

自然也就是证明了

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-s_0 t} g(t) = 0.$$

这样也就不难证明当 $\operatorname{Re} p > s_0$ 时 $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(p)$ 绝对收敛. \square

评述 这个定理提醒我们, 即使 $f(t)$ 的 Laplace 积分不绝对收敛, 但 $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ 的 Laplace 积分绝对收敛, 因而我们可以由定理 13.6 给出的反演公式先求出 $g(t)$, 而后求导即可求得 $f(t)$. 按照 Lebesgue 理论, 积分 $\int_0^t f(\tau) d\tau$ 几乎处处可微, 且其导数几乎处处等于 $f(t)$, 换言之, 其导数与 $f(t)$ 之差为零函数.

定理 13.8 若 $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ 对于实的 $p = s_0 \geq 0$ 收敛, 则

$$\text{v.p.} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp \right\} = \eta(t) \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad s = \operatorname{Re} p > s_0 \geq 0. \quad (13.30)$$

其中 $\eta(t)$ 为 Heaviside 函数.

13.5.3 一个特殊的反演公式

现在变换一下求反演的思路. 如果我们现在能够令

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad (13.31)$$

这相当于将定义在 $t \geq 0$ 的 $f(t)$ 作延拓, 放弃 $f(t < 0) = 0$ 的要求而使之成为整函数, 尽管这时仍定义 $f(t)$ 的 Laplace 变换为

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt. \quad (13.32)$$

将 (13.31) 式代入 (13.32) 式, 假定能够逐项积分, 则有

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} t^n e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! a_n}{p^{n+1}}. \quad (13.33)$$

如果能再对 $f(t)$ 进一步加以适当限制, $F(p)$ 就能是 $p = \infty$ 点邻域内的解析函数; 而且, 取 C 为围绕原点 $p = 0$ 而又离原点足够远的围道, 则容易计算出

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} n! a_n \oint_C \frac{e^{pt}}{p^{n+1}} dp = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = f(t). \quad (13.34)$$

这就是在这种特殊条件下的反演公式.

使得 (13.34) 式成立的最简单情形就是:

定理 13.9 使

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(p) e^{pz} dp, \quad C \text{ 为围绕 } p = 0 \text{ 的闭合围道} \quad (13.35)$$

成立的充分必要条件是 $f(z)$ 为指数型整函数, 即 $f(z) = e^{s|\operatorname{Re} z|}$, s 为实常数.

正如我们知道的, 这时 (13.32) 式只在 $\operatorname{Re} p > s$ 的条件下成立.

在重新定义 $f(t)$ 之后, 仍然必须保证 Laplace 变换及其反演的唯一性. 这就要求当且仅当 $F(p) \equiv 0$ 时才有 $f(t) \equiv 0$. 然而, 只要 $F(p)$ 在 \bar{C} 内解析, (13.34) 式中的围道积分就一定恒为 0, 而并不必要求 $F(p) \equiv 0$. 这说明, 给定函数 $f(z)$ 以及积分围道 C , 并不能唯一地确定 $F(p)$, 除非进一步对 $F(p)$ 加以适当的限制.

定理 13.10 设 $\phi(p)$ 在 $|p|$ 足够大时解析, 但 $p = \infty$ 点例外, 它是 $\phi(p)$ 的 n 阶极点. 若对于 $\forall t$, 有

$$\oint_C \phi(p) e^{pt} dp = 0, \quad (13.36)$$

其中 C 为围绕原点的闭合围道, 则 $\phi(p)$ 必为 n 次多项式.

证 按照题设, $\phi(p)$ 在 $|p|$ 足够大时解析, 且以 $p = \infty$ 为 n 阶极点, 所以一定可以在 $p = \infty$ 点的邻域内作 Laurent 展开:

$$\phi(p) = \psi(p) + a_1 p + \cdots + a_n p^n,$$

其中 $a_1 p + \cdots + a_n p^n$ 与 $\psi(p) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k p^{-k}$ 分别是 $\phi(p)$ 的主要部分与正则部分. 直接计算可得

$$\begin{aligned} \oint_C \psi(p) e^{pt} dp &= \oint_C [\phi(p) - (a_1 p + \cdots + a_n p^n)] e^{pt} dp \\ &= \oint_C \phi(p) e^{pt} dp = 0. \end{aligned}$$

另一方面, 将被积函数作幂级数展开, 并逐项积分, 又应当有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \oint_C \psi(p) e^{pt} dp &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C [\psi(p) - a_0] e^{pt} dp \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{l!} t^l \oint_C p^{l-k} dp = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_{l+1}}{l!} t^l = 0.\end{aligned}$$

按照 Taylor 展开的唯一性, 就能定出

$$b_1 = b_2 = \cdots = 0, \quad \text{即} \quad \psi(p) = a_0.$$

由此即证得 $\phi(p)$ 一定为多项式:

$$\phi(p) = a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n. \quad \square$$

读者可能会质疑上述做法的必要性. Laplace 变换, 应用于处理随时间 t 演化的过程, 根据描写演化过程的微分方程以及初始状态 (通常将初始时刻取为 $t = 0$, 因而方程在 $t > 0$ 时成立), 可以推断出以后 ($t > 0$) 任一时刻的状况, 无须追溯 $t < 0$ 时方程是否成立或体系处于何种状态. 而与其说是事先约定 $t < 0$ 时函数值恒为 0, 还不如说是为了适应反演公式 (13.28) 的既成事实. 这样做的后果之一, 就是无法将 $f(t)$ 作解析延拓, 或者说无法将 $f(t)$ 在 $t = 0$ 点作 Taylor 展开.

放弃原函数 $f(t) = 0$ ($t < 0$) 的约定, 或者说放弃原函数为 $f(t)\eta(t)$ 的约定, 其现实意义就是已知定义在区间 $-\infty < t < \infty$ 上的微分方程 (常微分方程或偏微分方程), 我们是否仍然能够应用 Laplace 变换的方法求解? 从这一点来看, 假设 $f(t)$ 满足解析性的要求, 假设 $f(t)$ 能作 Taylor 展开, 相应地, 寻找不同于 (13.28) 式的反演公式, 实在也就是自然之举. 这样一来, 我们也就不必或明或暗地要求 t 具有时间变量的特征.

例 13.9 应用 Laplace 变换方法求解 Bessel 方程

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0, \quad \nu > 0.$$

解 这是我们熟悉的方程. 对于一般的 ν , 它的两个线性无关解是

$$J_{\pm\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n \pm \nu + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n \pm \nu}.$$

它们都不是 x 的整函数. 为了能应用上面描述的 Laplace 变换求得指数型整函数的解, 需要先作变换

$$u(x) = x^{-\nu} y(x). \quad (13.37)$$

可以预料, 这时将会得到解 $x^{-\nu} J_{\nu}(x)$.

$w(x)$ 满足的微分方程是

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x} \frac{dw}{dx} + w = 0. \quad (13.38a)$$

令

$$w(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C u(\zeta) e^{x\zeta} d\zeta, \quad (13.39)$$

则

$$\begin{aligned} xw &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_C u'(\zeta) e^{x\zeta} d\zeta, \\ \frac{dw}{dx} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C u(\zeta) \zeta e^{x\zeta} d\zeta, \\ x \frac{d^2 w}{dx^2} &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_C [2\zeta u(\zeta) + \zeta^2 u'(\zeta)] e^{x\zeta} d\zeta. \end{aligned}$$

因此, 方程 (13.38a) 就转化为

$$\oint_C [(1+\zeta^2)u'(\zeta) - (2\nu-1)\zeta u(\zeta)] e^{x\zeta} d\zeta = 0. \quad (13.38b)$$

在上式的被积函数中, 括号内的表达式最多以 $\zeta = \infty$ 为其一阶极点, 因此, 按照定理 13.10, 有

$$(1+\zeta^2)u'(\zeta) - (2\nu-1)\zeta u(\zeta) = a_0 + a_1 \zeta.$$

解之得

$$u(\zeta) = a_0(1+\zeta^2)^{\nu-1/2} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{dt}{(1+t^2)^{\nu+1/2}} - \frac{a_1}{2\nu-1}.$$

因为 $u(\zeta)$ 在 $\zeta = \infty$ 点解析, 必须取 $\zeta_0 = \infty$, 则

$$u(\zeta) = a_0(1+\zeta^2)^{\nu-1/2} \int_{\infty}^{\zeta} \frac{dt}{(1+t^2)^{\nu+1/2}} - \frac{a_1}{2\nu-1}.$$

代回到 (13.39) 式中, 注意到 a_1 项对积分无贡献, 因此有

$$w(x) = \frac{a_0}{2\pi i} \oint_C (1+\zeta^2)^{\nu-1/2} e^{x\zeta} d\zeta \int_{\infty}^{\zeta} \frac{dt}{(1+t^2)^{\nu+1/2}}. \quad (13.40)$$

这里出现了多值因子 $(1+\zeta^2)^{\nu-1/2}$ 及 $(1+t^2)^{\nu+1/2}$, 均约定在各自的复平面上沿虚轴由 $-i$ 到 i 作割线, 并规定函数在正实轴上取实数值.

代回 (13.38) 式, 并适当选择 a_0 , 就可以得到 Bessel 函数 $J_{\nu}(x)$; 而如果再将 ν 换成 $-\nu$, 则就可以得到 $J_{-\nu}(x)$.

在 $\operatorname{Re} \nu > -1/2$ 的条件下, 还可以将 (13.40) 式化成更简单的形式, 因为这时能够将积分围道 C 收缩为沿割线的哑铃型围道. 注意到在割线右岸, $\zeta = i\tau$, 则有

$$\arg(1 + \zeta^2) = \arg(1 - \tau^2) = 0;$$

而在割线左岸, 仍令 $\zeta = i\tau$, 则有

$$\arg(1 + \zeta^2) = \arg(1 - \tau^2) = 2\pi.$$

于是就能将 (13.40) 式改写成

$$w(x) = \frac{a_0}{2\pi} \int_{-1}^1 (1 - \tau^2)^{\nu-1/2} e^{ix\tau} d\tau \left[\int_I \frac{dt}{(1+t^2)^{\nu+1/2}} - e^{i\pi(2\nu-1)} \int_{II} \frac{dt}{(1+t^2)^{\nu+1/2}} \right],$$

其中的积分路径 I 与 II 分别由无穷远点到达割线右岸和左岸的 $i\tau$ 处. 为方便起见, 不妨将起点 (无穷远点) 分别取为 $-i\infty$ 与 $+i\infty$. 这样, 对于位于左半平面的第二个积分,

$$e^{i\pi(2\nu-1)} \int_{II} \frac{dt}{(1+t^2)^{\nu+1/2}} = \int_{II} \frac{dt}{e^{-i\pi(2\nu+1)}(1+t^2)^{\nu+1/2}},$$

可以将 $e^{-i\pi(2\nu+1)}(1+t^2)^{\nu+1/2} = [e^{-i2\pi}(1+t^2)]^{\nu+1/2}$ 理解为绕枝点 $t = i$ 转动 -2π , 因而变换到右半平面, 于是就有

$$\int_I \frac{dt}{(1+t^2)^{\nu+1/2}} - e^{i\pi(2\nu-1)} \int_{II} \frac{dt}{(1+t^2)^{\nu+1/2}} = \int_{III} \frac{dt}{(1+t^2)^{\nu+1/2}},$$

这里的积分路径 III 便是由 $-i\infty$ 出发, 经割线右侧, 到达 $+i\infty$ 的无穷直线, 因此积分值必为 (可以与 ν 有关的) 常数, 记为 A , 故有

$$w(x) = \frac{a_0 A}{2\pi} \int_{-1}^1 (1 - \tau^2)^{\nu-1/2} e^{ix\tau} d\tau.$$

如果令

$$w(0) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^\nu,$$

就可以定出

$$\frac{a_0 A}{2\pi} = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \left[\int_{-1}^1 (1 - \tau^2)^{\nu-1/2} d\tau \right]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^\nu.$$

这样就得到 Bessel 函数的积分表示

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^1 (1 - \tau^2)^{\nu-1/2} e^{ix\tau} d\tau \quad (13.41a)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^1 (1 - \tau^2)^{\nu-1/2} \cos x\tau d\tau. \quad (13.41b)$$

§13.6 Laplace 变换像函数的必要条件

我们知道,并不是复变量 p 任何函数都能充当 Laplace 变换的像函数^①. 作为 Laplace 变换的像函数,必要条件是必须在 $\operatorname{Re} p > s_0$ 的半平面上解析(见 §13.3). 我们还可以举出其他一些必要条件,例如见下面的几个定理.

定理 13.11 若 p_0 是 $\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ 的收敛点,则此积分在任意一个角形区域 $|\arg(p-p_0)| \leq \psi < \pi/2$ 上均一致收敛.

证 由定理 13.3 可知,积分 $\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ 在 $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$ 的半平面上也一定收敛. 令

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0,$$

并定义函数

$$g(\tau; p_0) = \int_0^\tau f(t)e^{-p_0 t}dt.$$

则按照 (13.3) 式,有

$$\int_0^\tau f(t)e^{-pt}dt = g(\tau; p_0)e^{(p-p_0)\tau} + (p-p_0) \int_0^\tau g(t; p_0)e^{-(p-p_0)t}dt. \quad (13.42)$$

另一方面,由恒等式

$$(p-p_0) \int_0^\tau e^{-(p-p_0)t}dt = 1 - e^{-(p-p_0)\tau},$$

因而

$$F(p_0) - F(p_0)e^{-(p-p_0)\tau} - (p-p_0) \int_0^\tau F(p_0)e^{-(p-p_0)t}dt = 0.$$

与 (13.42) 式相加, 即得

$$\begin{aligned} \int_0^\tau f(t)e^{-pt}dt &= F(p_0) + [g(\tau; p_0) - F(p_0)]e^{-(p-p_0)\tau} \\ &\quad + (p-p_0) \int_0^\tau [g(t; p_0) - F(p_0)]e^{-(p-p_0)t}dt, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)e^{-pt}dt &= [g(\tau_2; p_0) - F(p_0)]e^{-(p-p_0)\tau_2} - [g(\tau_1; p_0) - F(p_0)]e^{-(p-p_0)\tau_1} \\ &\quad + (p-p_0) \int_{\tau_1}^{\tau_2} [g(t; p_0) - F(p_0)]e^{-(p-p_0)t}dt. \end{aligned}$$

^① 这里我们不考虑广义函数的 Laplace 变换.

由于

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t; p_0) = F(p_0),$$

故若给定 $\varepsilon > 0$, 则一定存在 T , 使当 $t > T$ 时, 有

$$|g(t; p_0) - F(p_0)| < \varepsilon.$$

因此, 只要 $\tau_2 > \tau_1 > T$, 且 $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$, 就有

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t) e^{-pt} dt \right| &\leq 2\varepsilon + \varepsilon |p - p_0| \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-(s-s_0)t} dt \\ &< 2\varepsilon + \varepsilon |p - p_0| \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} dt = \varepsilon \left(2 + \frac{|p - p_0|}{s - s_0} \right), \end{aligned}$$

其中 $s = \operatorname{Re} p$, $s_0 = \operatorname{Re} p_0$. 但在角形区域 (以下简称角域) $|\arg(p - p_0)| \leq \psi < \pi/2$ 上 ($p = p_0$ 点除外), 有

$$\frac{s - s_0}{|p - p_0|} = \frac{\operatorname{Re}(p - p_0)}{|p - p_0|} = \cos[\arg(p - p_0)] \geq \cos \psi,$$

最后就证得

$$\left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t) e^{-pt} dt \right| < \varepsilon \left(2 + \frac{1}{\cos \psi} \right),$$

而且包括在 $p = p_0$ 点此式仍然成立. 这样就证明了积分 $\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$ 在角域 $|\arg(p - p_0)| \leq \psi < \pi/2$ 上一致收敛. \square

定理 13.12 若 p_0 是 $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ 的收敛点, 则当 p 在角域 $|\arg(p - p_0)| \leq \psi < \pi/2$ 上趋于 ∞ 时 $F(p)$ 一致地趋于 0.

证 因为

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{T_1} f(t) e^{-pt} dt + \int_{T_1}^{T_2} f(t) e^{-pt} dt + \int_{T_2}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 0$, 可取足够小的 T_1 , 使得

$$\left| \int_0^{T_1} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^{T_1} |f(t)| dt < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \operatorname{Re} p \geq 0.$$

根据定理 13.11, 又可取足够大的 T_2 , 使得对于角域上的一切 p , 有

$$\left| \int_{T_2}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

如此选定 T_1, T_2 后, 又可取足够大的 s_0 , 使当 $\operatorname{Re} p > s_0$ 时, 有

$$\left| \int_{T_1}^{T_2} f(t) e^{-pt} dt \right| \leq e^{-s_0 T_1} \int_{T_1}^{T_2} |f(t)| dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

把这三部分合起来, 即证得: 对于角域上满足 $\operatorname{Re} p > s_0$ 的一切 p , 均有

$$|F(p)| < \varepsilon.$$

□

定理 13.12 可用作判断任意一个 $F(p)$ 是否能作为 Laplace 变换像函数的判据. 例如, 我们就可以断定当 $\alpha > 1$ 时的函数 e^{-p^α} 就不可能是 Laplace 变换的像函数, 因为

$$|e^{-p^\alpha}| = e^{-\rho^\alpha \cos \alpha \phi}, \quad \text{其中 } p = \rho e^{i\phi},$$

当 $\alpha\phi$ 位于第 II 或第 III 象限 (尽管 $|\phi| < \pi/2$) 时, $\cos \alpha\phi \leq 0$, 因而不满足 $F(p)$ 在右半平面上一致地趋于 0 的要求.

∞ 点可以是 Laplace 变换像函数 $F(p)$ 的解析点, 也可以是 $F(p)$ 的奇点. 特别是, 可以是 $F(p)$ 的本性奇点: 当 p 以不同方式趋近 ∞ 时, 可以逼近不同的数值. 但无论哪种情形, 定理 13.12 告诉我们, 当 p 在角域 $\arg(p - p_0), \leq \psi < \pi/2$ 内趋于 ∞ 时, $F(p)$ 一定一致地趋于 0.

定理 13.12 还能推广到 p_0 为 p 平面上任意一点的情形, 因为就以 p_0 为顶点的角域 $|\arg(p - p_0)| \leq \psi < \pi/2$ 而言, 其 $\operatorname{Re} p$ 足够大的部分总可以包含在另一个以收敛点为顶点而张角更大的角域内.

还可以讨论 $F(p) = F(s + i\sigma)$ 在 $\sigma \rightarrow \pm\infty$ 时的行为. 下面不加证明地介绍有关的两个结论:

(1) 若 $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ 对于 p 是实数值 s_0 绝对收敛 (因而对 $\operatorname{Re} p \geq s_0$ 绝对收敛), 则当 $\sigma \rightarrow \pm\infty$ 时, $F(p) = F(s + i\sigma)$ 在直线 $\operatorname{Re} p = s_0$ 上一致地趋于 0;

(2) 若 β 为 $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ 的收敛横标, 则在任意一个半平面 $\operatorname{Re} p \geq \beta + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ 可任意小) 上, 当 $\sigma \rightarrow \pm\infty$ 时, (对 $s = \operatorname{Re} p$) 一致地有 $F(s + i\sigma) = o(\sigma)$.

定理 13.13 Laplace 变换的像函数不可能是周期函数, 除非该函数恒为 0.

证 设 Laplace 变换像函数 $F(p)$ 具有 (实的或复的) 周期 ρ : $F(p) = F(p + \rho)$, 这说明

$$\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(p+\rho)t} dt,$$

即

$$\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt - \int_0^\infty f(t) e^{-(p+\rho)t} dt = \int_0^\infty f(t) (1 - e^{-\rho t}) e^{-pt} dt = 0,$$

因此, $f(t)[1 - e^{-\rho t}]$ 为零函数, 于是,

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) e^{-\rho\tau} d\tau, \quad t \geq 0.$$

令 $\phi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ (因此 $\phi(t)$ 连续), 则将上式右端分部积分后即可得到

$$\phi(t) = \int_0^t f(\tau) e^{-\rho\tau} d\tau = e^{-\rho t} \phi(t) + \rho \int_0^t e^{-\rho\tau} \phi(\tau) d\tau.$$

于是就有

$$[1 - e^{-\rho t}] \phi(t) = \rho \int_0^t e^{-\rho\tau} \phi(\tau) d\tau, \quad \text{即} \quad \phi(t) = \frac{\rho}{1 - e^{-\rho t}} \int_0^t e^{-\rho\tau} \phi(\tau) d\tau.$$

因为上式右端积分中的被积函数连续, 所以积分可微, 因而左端的函数 $\phi(t)$ 可微 ($1 - e^{-\rho t}$ 的零点可能例外). 这样就能将上式两端求导, 因而得到

$$\rho e^{-\rho t} \phi(t) + (1 - e^{-\rho t}) \phi'(t) = \rho e^{-\rho t} \phi(t), \quad \text{即} \quad (1 - e^{-\rho t}) \phi'(t) = 0.$$

所以

$$\phi'(t) = 0,$$

$1 - e^{-\rho t}$ 的零点可能例外. 由于 $f(t)$ 与 $\phi'(t)$ 最多只相差一个零函数, 所以这就说明 $f(t)$ 是零函数, 因而一定有 $F(p) \equiv 0$. \square

根据定理 13.11 就可以断定, 函数 $e^{-\alpha p}$ 不可能是 Laplace 变换的像函数, 因为函数 $e^{-\alpha p}$ 是周期函数 (周期为 $2\pi i/\alpha$), 尽管它在全平面都解析.

最后需要说明, 以上的讨论均限于原函数为普通函数的情形, 并不适用于广义函数. 例如, 在广义函数的范围内, $e^{-\alpha p}$ 可以有原函数 $\delta(t - \alpha)$, 而且, 并不违反 $(1 - e^{\rho t})\delta(t - \alpha) = 0$ 的要求, 只要周期 $\rho = 2\pi i/\alpha$.

§13.7 Laplace 变换像函数的充分条件

所谓 $F(p)$ 是 Laplace 变换像函数与否的问题, 也就是, 是否存在 $f(t)$, 使得

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$$

成立. 这里涉及两个问题: 一是 $f(t)$ 的存在性; 二是如何求出 $f(t)$, 亦即 $F(p)$ 的反演问题. 现在的状况是: 我们无法给出 $F(p)$ 作为像函数所需满足的充分必要条件. 我们只能列举出 $F(p)$ 作为像函数所必须具有的若干必要条件, 例如见 §13.5;

或者可以在一定的限制条件下给出由 $F(p)$ 求 $f(t)$ 的反演公式 (例如见定理 13.6 与定理 13.8). 但作为特定的反演公式, 自然只能是 $F(p)$ 作为 Laplace 变换像函数的充分条件 (而非充分必要条件).

定理 13.6 的成立条件是针对原函数 $f(t)$ 提出的, 这在实用上有一定的缺憾, 因为作为反演公式, 已知的是像函数 $F(p)$, 待求的是原函数 $f(t)$, 因而我们事先难以知道 $f(t)$ 是否满足定理的要求. 我们希望能列出对 $F(p)$ 的要求, 使得能运用定理 13.7 中的反演公式求出 $f(t)$. 本着这样的思路, 我们就来分析积分

$$\text{v.p.} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p) dp \right\} = \text{v.p.} \left\{ \frac{e^{st}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma t} F(s+i\sigma) d\sigma \right\}, \quad s > s_0 \quad (13.43)$$

能作为反演公式所必须具有的下列内涵:

(1) 积分 (13.43) 存在. 作为充分条件, $F(p)$ 绝对可积

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(s+i\sigma)| d\sigma < \infty$$

就可以保证满足这一要求.

(2) 当 $t > 0$ 时积分 (13.43) 应与 s 无关. 为此, 可考虑图 13.1 中的矩形积分围道 C , 由于被积函数在围道内解析, 因此

$$\begin{aligned} \oint_C F(p) e^{pt} dp &= \int_{s_1-i\sigma}^{s_1+i\sigma} F(p) e^{pt} dp + \int_{s_1+i\sigma}^{s_2+i\sigma} F(p) e^{pt} dp \\ &\quad + \int_{s_2+i\sigma}^{s_2-i\sigma} F(p) e^{pt} dp + \int_{s_2-i\sigma}^{s_1-i\sigma} F(p) e^{pt} dp = 0. \end{aligned}$$

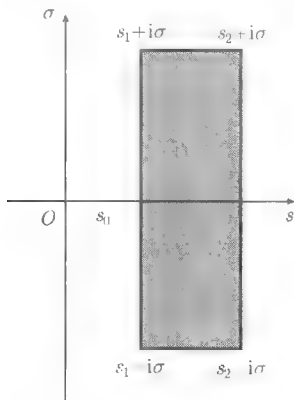


图 13.1 矩形积分围道

令 $\sigma \rightarrow \infty$, 我们就能看出, 如果对于任意 $s_2 > s_1 > s_0$, 有

$$\lim_{\sigma \rightarrow \pm\infty} \int_{s_1+i\sigma}^{s_2+i\sigma} F(p) e^{pt} dp = 0, \quad (13.44)$$

则一定有

$$\int_{s_1-i\infty}^{s_1+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \int_{s_2-i\infty}^{s_2+i\infty} F(p) e^{pt} dp,$$

即积分 (13.43) 应与 s 无关. 而要使得 (13.44) 式成立, 充分条件是

$$F(p) \rightarrow 0, \quad \operatorname{Re} p > s_0, \operatorname{Im} p \rightarrow \pm\infty.$$

(3) 当 $t < 0$ 时, 积分 (13.43) 一定为 0. 换言之, 即应当有

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(p) e^{pt} dp = 0, \quad \operatorname{Re} p > s_0.$$

Jordan 引理告诉我们, 只要

$$F(p) \rightarrow 0, \quad \operatorname{Re} p > s_0, |p| \rightarrow \infty,$$

就能满足这个要求. 应该说, 定理 13.12 的内容颇为接近, 但也尚不能完全满足这一要求 (差别在于区域略有差异).

总结以上的分析, 我们就得到下列定理:

定理 13.14 设 $F(p) = F(s+i\sigma)$ 在半平面 $s > s_0$ 上解析, $\int_{-\infty}^{\infty} |F(s+i\sigma)| d\sigma < \infty$, 且在该半平面上当 $p \rightarrow \infty$ 时, $F(p)$ 一致地趋于 0, 则 $F(p)$ 是函数

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

的 Laplace 变换像函数.

再强调一次, 定理 13.14 只是充分条件. 如果 $F(p)$ 不满足定理的条件, 并不能肯定它就不是 Laplace 变换的像函数. 例如 $F(p) = p^{-\alpha}$, 当 $0 < \alpha < 1$ 时并不满足绝对可积的要求, 但我们知道, $p^{-\alpha}$ 的原函数确实存在:

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{p^\alpha} = t^{\alpha-1} \eta(t).$$

事实上, 因为积分 (13.43) 收敛, 我们仍然能用它求出 $p^{-\alpha}$ 的原函数.

这一结论也适用于 $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$ 的情形.

基于这一认识, 我们就能看出, 如果 $F(p)$ 在半平面 $\operatorname{Re} p > s_1 > 0$ 上解析, 则

$$F(p) = \sum_{k=1}^n c_k p^{-\alpha_k} + \frac{G(p)}{p^\lambda}, \quad \text{其中 } c_k \text{ 为常数, } 0 < \operatorname{Re} \alpha_k < 1, \operatorname{Re} \lambda > 1,$$

而 $G(p)$ 在半平面 $\operatorname{Re} p > s_1 + \delta > s_1$ 上有界, 故 $F(p)$ 一定是 Laplace 变换的像函数.

§13.8 Laplace 变换卷积定理的应用

Laplace 变换的卷积定理解决的是 Laplace 变换像函数乘积的反演问题: 设有 $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$, $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(p)$, 则

$$F(p) G(p) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)e^{\tau}d\tau.$$

作为它的用途之一, 这个公式可以用来计算上式右端这种特定形式的积分, 如果 $F(p)G(p)$ 的原函数可以更容易地用其他方法求得的话. 例如, 将 $\mathcal{L}\{S(\sqrt{t})\}$ 和 $\mathcal{L}\{C(\sqrt{t})\}$ (见例 13.7, (13.23) 式) 相乘:

$$\mathcal{L}\{S(\sqrt{t})\} \mathcal{L}\{C(\sqrt{t})\} = \frac{1}{4} \frac{1}{p^2} \frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1} \right),$$

我们可以直接求出上式右端的反演, 从而得到

$$\int_0^t S(\sqrt{\tau})C(\sqrt{t-\tau})d\tau = \int_0^t C(\sqrt{\tau})S(\sqrt{t-\tau})d\tau = \frac{1}{4}(t - \sin t), \quad t > 0. \quad (13.45)$$

同样, 根据

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}\{C(\sqrt{t})\} \mathcal{L}\{C(\sqrt{t})\} - \mathcal{L}\{S(\sqrt{t})\} \mathcal{L}\{S(\sqrt{t})\} \\ &= \frac{1}{2p} \frac{1}{1+p^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{1+p^2} \right). \end{aligned}$$

也能求得

$$\int_0^t [C(\sqrt{\tau})C(\sqrt{t-\tau}) - S(\sqrt{\tau})S(\sqrt{t-\tau})]d\tau = \frac{1}{2}(1 - \cos t), \quad t > 0. \quad (13.46)$$

类似地, 由 (13.27) 式, 可以有

$$\mathcal{L}\{t^{\mu/2}J_{\mu}(a\sqrt{t})\} \mathcal{L}\{t^{\nu/2}J_{\nu}(b\sqrt{t})\} = \left(\frac{a}{2}\right)^{\mu} \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu} \frac{1}{p^{\mu+\nu+2}} e^{-(a^2+b^2)/4p}.$$

仍可根据 (13.27) 式求出上式右端的原函数, 故

$$\begin{aligned} & \int_0^t \tau^{\mu/2}J_{\mu}(a\sqrt{\tau})(t-\tau)^{\nu/2}J_{\nu}(b\sqrt{t-\tau})d\tau \\ &= \int_0^t (t-\tau)^{\mu/2}J_{\mu}(a\sqrt{t-\tau})\tau^{\nu/2}J_{\nu}(b\sqrt{\tau})d\tau \\ &= \frac{2a^{\mu}b^{\nu}}{(a^2+b^2)^{-(\mu+\nu+1)/2}} t^{(\mu+\nu+1)/2} J_{\mu+\nu+1}(\sqrt{(a^2+b^2)t}). \end{aligned} \quad (13.47)$$

而如果把 (13.27) 式与 (13.7) 式结合起来, 我们则有

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} \mathcal{L}\{t^{\nu/2} J_{\nu}(b\sqrt{t})\} = \frac{\Gamma(\alpha)}{p^{\alpha}} \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu} \frac{1}{p^{\nu+1}} e^{-b^2/4p},$$

同样能求得

$$\begin{aligned} \int_0^t \tau^{\alpha-1} (t-\tau)^{\nu/2} J_{\nu}(b\sqrt{t-\tau}) d\tau &= \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\nu/2} J_{\nu}(b\sqrt{\tau}) d\tau \\ &= \Gamma(\alpha) \left(\frac{b}{2}\right)^{-\alpha} t^{(\alpha+\nu)/2} J_{\alpha+\nu}(b\sqrt{t}). \end{aligned} \quad (13.48)$$

在《数学物理方法专题——数理方程与特殊函数》一书的第十四章中还给出了一些涉及 Bessel 函数的 Laplace 变换式, 例如^①

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t} J_{\nu}(t)\right\} = \frac{1}{\nu} \left(\sqrt{1+p^2} - p\right)^{\nu}, \quad (13.49)$$

$$\mathcal{L}\{J_{\nu}(t)\} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \left(\sqrt{1+p^2} - p\right)^{\nu}, \quad (13.50)$$

$$\mathcal{L}\{t^{\nu} J_{\nu}(t)\} = \frac{2^{\nu} \Gamma(\nu+1/2)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(1+p^2)^{\nu+1/2}}, \quad (13.51)$$

$$\mathcal{L}\{t^{\nu+1} J_{\nu}(t)\} = \frac{2^{\nu+1} \Gamma(\nu+3/2)}{\sqrt{\pi}} \frac{p}{(1+p^2)^{\nu+3/2}}. \quad (13.52)$$

特别是, 当 $\nu=0$ 时, 有

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad (13.53)$$

$$\mathcal{L}\{t J_0(t)\} = \frac{p}{(1+p^2)^{3/2}}. \quad (13.54)$$

根据这些换式, 我们就能得到

$$\int_0^t \frac{J_{\mu}(\tau)}{\tau} \frac{J_{\nu}(t-\tau)}{t-\tau} d\tau = \frac{\mu+\nu}{\mu\nu} \frac{J_{\mu+\nu}(t)}{t}, \quad (13.55)$$

$$\int_0^t \frac{J_{\mu}(\tau)}{\tau} J_{\nu}(t-\tau) d\tau = \int_0^t \frac{J_{\mu}(t-\tau)}{t-\tau} J_{\nu}(\tau) d\tau = \frac{1}{\mu} J_{\mu+\nu}(t), \quad (13.56)$$

$$\int_0^t \frac{J_{\mu}(\tau)}{\tau} J_0(t-\tau) d\tau = \int_0^t \frac{J_{\mu}(t-\tau)}{t-\tau} J_0(\tau) d\tau = \frac{1}{\mu} J_{\mu}(t), \quad (13.57)$$

^① 参见吴崇试编著的《数学物理方法专题——数理方程与特殊函数》(北京大学出版社), 第十四章, §14.2.

$$\int_0^t J_0(\tau) J_0(t-\tau) d\tau = \sin t, \quad (13.58)$$

$$\int_0^t J_\nu(\tau) J_{-\nu}(t-\tau) d\tau = \sin t, \quad (13.59)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \tau^\mu (t-\tau)^\nu J_\mu(\tau) J_\nu(t-\tau) d\tau \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(\mu+1/2) \Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\mu+\nu+1/2)} t^{\mu+\nu+1/2} J_{\mu+\nu+1/2}(t), \end{aligned} \quad (13.60)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \tau^\mu (t-\tau)^{\nu+1} J_\mu(\tau) J_\nu(t-\tau) d\tau = \int_0^t (t-\tau)^\mu \tau^{\nu+1} J_\mu(t-\tau) J_\nu(\tau) d\tau \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(\mu+1/2) \Gamma(\nu+3/2)}{\Gamma(\mu+\nu+2)} t^{\mu+\nu+3/2} J_{\mu+\nu+1/2}(t), \end{aligned} \quad (13.61)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \tau^{\mu+1} (t-\tau)^{\nu+1} J_\mu(\tau) J_\nu(t-\tau) d\tau \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(\mu+3/2) \Gamma(\nu+3/2)}{\Gamma(\mu+\nu+2)} t^{\mu+\nu+3/2} J_{\mu+\nu+3/2}(t) \\ - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(\mu+3/2) \Gamma(\nu+3/2)}{\Gamma(\mu+\nu+3)} t^{\mu+\nu+5/2} J_{\mu+\nu+5/2}(t), \end{aligned} \quad (13.62)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \tau^{\mu+1} J_\mu(\tau) J_0(t-\tau) d\tau = \int_0^t (t-\tau)^{\mu+1} J_\mu(t-\tau) J_0(\tau) d\tau \\ = \frac{\Gamma(\mu+3/2)}{\sqrt{2}\Gamma(\mu+2)} t^{\mu+3/2} J_{\mu+1/2}(t), \end{aligned} \quad (13.63)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \tau^\mu (t-\tau) J_\mu(\tau) J_0(t-\tau) d\tau = \int_0^t (t-\tau)^\mu \tau J_\mu(t-\tau) J_0(\tau) d\tau \\ = \frac{\Gamma(\mu+1/2)}{2^{3/2}\Gamma(\mu+2)} t^{\mu+3/2} J_{\mu+1/2}(t), \end{aligned} \quad (13.64)$$

$$\int_0^t (t-\tau) J_0(\tau) J_0(t-\tau) d\tau = \int_0^t \tau J_0(t-\tau) J_0(\tau) d\tau = \frac{t}{2} \sin t, \quad (13.65)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \tau(t-\tau) J_0(\tau) J_0(t-\tau) d\tau = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[4t^{3/2} J_{3/2}(t) - t^{5/2} J_{5/2}(t) \right] \\ = \frac{1}{8} \left[(1+t^2) \sin t - t \cos t \right]. \end{aligned} \quad (13.66)$$

还可以计算 $\int_0^t J_\mu(\tau) J_\nu(t-\tau) d\tau$. 因为

$$\mathcal{L}\{J_\mu(t)\} \mathcal{L}\{J_\nu(t)\} = \frac{1}{1+p^2} \left(\sqrt{1+p^2} - p \right)^{\mu+\nu},$$

又, 直接计算可以证明恒等式

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{2(\sqrt{1+p^2}-p)}{1+(\sqrt{1+p^2}-p)^2},$$

所以

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{J_\mu(t)\} \mathcal{L}\{J_\nu(t)\} &= \frac{2}{\sqrt{1+p^2}} (\sqrt{1+p^2}-p)^{\mu+\nu} \frac{\sqrt{1+p^2}-p}{1+(\sqrt{1+p^2}-p)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+p^2}} (\sqrt{1+p^2}-p)^{\mu+\nu+1} \\ &\quad \times [1 - (\sqrt{1+p^2}-p)^2 + (\sqrt{1+p^2}-p)^4 - \cdots].\end{aligned}$$

这样就又能导出

$$\int_0^t J_\mu(\tau) J_\nu(t-\tau) d\tau = 2[J_{\mu+\nu+1}(t) - J_{\mu+\nu+3}(t) + J_{\mu+\nu+5}(t) - \cdots]. \quad (13.67)$$

将 $\sin t$, $\cos t$ 的 Laplace 换式 (见 (13.10b) 和 (13.12b) 两式) 与 (13.51) (13.54) 式集合起来, 还可以得到

$$\int_0^t \sin \tau \cdot (t-\tau)^\nu J_\nu(t-\tau) d\tau = \int_0^t \sin(t-\tau) \cdot \tau^\nu J_\nu(\tau) d\tau = \frac{t^{\nu+1}}{2\nu+1} J_{\nu+1}(t), \quad (13.68)$$

$$\int_0^t \sin \tau \cdot (t-\tau)^{\nu+1} J_\nu(t-\tau) d\tau = \int_0^t \sin(t-\tau) \cdot \tau^{\nu+1} J_\nu(\tau) d\tau = \frac{t^{\nu+2}}{2\nu+3} J_{\nu+1}(t), \quad (13.69)$$

$$\int_0^t \sin \tau \cdot J_0(t-\tau) d\tau = \int_0^t \sin(t-\tau) \cdot J_0(\tau) d\tau = tJ_1(t), \quad (13.70)$$

$$\int_0^t (t-\tau) \sin \tau \cdot J_0(t-\tau) d\tau = \int_0^t \tau \sin(t-\tau) \cdot J_0(\tau) d\tau = \frac{t^2}{3} J_1(t), \quad (13.71)$$

$$\int_0^t \cos \tau \cdot (t-\tau)^\nu J_\nu(t-\tau) d\tau = \int_0^t \cos(t-\tau) \cdot \tau^\nu J_\nu(\tau) d\tau = \frac{t^{\nu+1}}{2\nu+1} J_\nu(t), \quad (13.72)$$

$$\begin{aligned}\int_0^t \cos \tau \cdot (t-\tau)^{\nu+1} J_\nu(t-\tau) d\tau &= \int_0^t \cos(t-\tau) \cdot \tau^{\nu+1} J_\nu(\tau) d\tau \\ &= t^{\nu+1} J_{\nu+1}(t) - \frac{1}{2\nu+3} t^{\nu+2} J_{\nu+2}(t),\end{aligned} \quad (13.73)$$

$$\int_0^t \cos \tau \cdot J_0(t-\tau) d\tau = \int_0^t \cos(t-\tau) \cdot J_0(\tau) d\tau = tJ_0(t), \quad (13.74)$$

$$\int_0^t (t-\tau) \cos \tau \cdot J_0(t-\tau) d\tau = \int_0^t \tau \cos(t-\tau) \cdot J_0(\tau) d\tau = tJ_1(t) - \frac{t^2}{3} J_2(t). \quad (13.75)$$

本节中得到的这些积分, 大部分在《数学物理方法专题——数理方程与特殊函数》的第十四章中也有讨论, 但使用方法不同。

第十四章 Mellin 变换

§14.1 Mellin 变换的定义

Mellin 变换可以看成 Fourier 变换

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$
$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt$$

的一种变型. 若对于一定范围内的 σ 值, $e^{-\sigma t} g(t)$ 可积, 又定义变量 $\nu = \sigma + i\omega$, $x = e^t > 0$, 且令

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma t} g(t), \quad F(\nu) = G(\omega).$$

则可得到 Mellin 变换

$$f(x) \triangleq \mathcal{M}^{-1}\{F(\nu)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(\nu) x^{-\nu} d\nu, \quad \sigma > \sigma_0, \quad (14.1)$$

$$F(\nu) \triangleq \mathcal{M}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} f(x) x^{\nu-1} dx. \quad (14.2)$$

在此变换中, x 是实变量, $0 < x < \infty$; ν 是复变量, 以后将写成 $\nu = \sigma + i\tau$. 为了方便, 以后我们有时还把 $f(x)$ 的 Mellin 变换 (即 $F(\nu)$) 写成 $(\mathcal{M}f)(\nu)$. σ_0 类似于 Laplace 变换中的收敛横标 s_0 , 不妨称为 Mellin 变换的收敛横标.

定理 14.1 如果 $x^{\sigma-1} f(x) \in \mathcal{L}(0, \infty)$, 且 $f(y)$ 在 $y = x$ 的邻域内具有有限变差^①, 令

$$F(\nu) = \int_0^{\infty} f(x) x^{\nu-1} dx, \quad \nu = \sigma + i\tau.$$

则

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau} F(\nu) x^{-\nu} d\nu \right\} = \frac{1}{2} [f(x-i0) + f(x+i0)]. \quad (14.3)$$

判断 Mellin 变换存在的常用条件是积分 $\int_0^{\infty} f(x)^2 x^{-2\sigma-1} dx$ 收敛.

例 14.1 求 Poisson 分布函数

$$f_{n,\lambda}(x) = x^n e^{-\lambda x}, \quad n \in \mathbb{N}, \operatorname{Re} \lambda > 0, x > 0 \quad (14.4)$$

^① 定义见本书第 11 页注释 2.

的 Mellin 变换.

解 根据 (14.2) 式, $f_{n,-\lambda}(x)$ 的 Mellin 变换为

$$F_{n,-\lambda}(\nu) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{\nu+n-1} dx = \lambda^{-(\nu+n)} \Gamma(\nu+n), \quad \operatorname{Re}(\nu+n) > 0. \quad (14.5)$$

上面遇到的积分, 其形式与 Laplace 变换

$$t^{\nu+n-1} \equiv \int_0^\infty t^{\nu+n-1} e^{-pt} dt = \frac{\Gamma(\nu+n)}{p^{\nu+n}}$$

相同. Mellin 变换存在的条件亦即 $\sigma+n > 0$.

下面再验证一下 $F_{n,-\lambda}(\nu)$ 的 Mellin 逆变换

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{-1}\{\lambda^{-(\nu+n)} \Gamma(\nu+n)\} &\equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda^{-(\nu+n)} \Gamma(\nu+n) x^{-\nu} d\nu \\ &= \frac{x^n}{2\pi i} \int_{\sigma+n-i\infty}^{\sigma+n+i\infty} \Gamma(\nu) (\lambda x)^{-\nu} d\nu. \end{aligned}$$

其积分路线如图 14.1 所示. 可以用留数定理计算此积分. 当 $x > 0$ 时, 应当在复 ν 平面上补上半径 R 无穷大的左半圆, 因为当 $R \rightarrow \infty$ 时 (实际上, R 应当跳跃式地趋于 ∞ , 例如 $R = n + 1/2 \rightarrow \infty$), 沿此半圆的积分值趋于 0 (证明从略), 故上述积分即等于被积函数在奇点 $\nu = 0, -1, -2, \dots$ 处的留数和:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{-1}\{\lambda^{-(\nu+n)} \Gamma(\nu+n)\} &= \frac{x^n}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{res} \Gamma(z) \Big|_{z=-k} (\lambda x)^k \\ &= x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\lambda x)^k = x^n e^{-\lambda x}, \end{aligned} \quad (14.6)$$

正是原来的 $f_{n,-\lambda}(x)$.

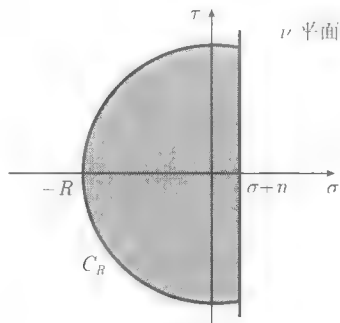


图 14.1 ν 平面上的积分围道

直接计算就能导出 Mellin 变换的基本性质. 例如

$$\mathcal{M}\{xf(x)\}(\nu) \equiv \int_0^\infty f(x)x^\nu dx = (\mathcal{M}f)(\nu+1), \quad (14.7)$$

若 $\mathcal{M}\{f'(x)\}(\nu)$ 存在, 则又有

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{f'(x)\}(\nu) &\equiv \int_0^\infty f'(x)x^{\nu-1} dx = x^{\nu-1}f(x)\Big|_0^\infty - (\nu-1) \int_0^\infty f(x)x^{\nu-2} dx \\ &= -(\nu-1)(\mathcal{M}f)(\nu-1), \end{aligned} \quad (14.8)$$

这里要求 $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\nu-1}f(x) = 0$. 把这两个结果组合起来, 又得到

$$\mathcal{M}\{xf'(x)\}(\nu) \equiv \int_0^\infty f'(x)x^\nu dx = -\nu(\mathcal{M}f)(\nu), \quad (14.9a)$$

$$\mathcal{M}\{x^2 f''(x)\}(\nu) \equiv \int_0^\infty f''(x)x^{\nu+1} dx = (\nu+1)\nu(\mathcal{M}f)(\nu), \quad (14.9b)$$

.....

$$\mathcal{M}\{x^n f^{(n)}(x)\}(\nu) \equiv \int_0^\infty f^{(n)}(x)x^{\nu+n-1} dx = \cdots = (-1)^n \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)} (\mathcal{M}f)(\nu). \quad (14.9c)$$

在得到 (14.9) 诸式时均要求

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\nu f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\nu+1} f'(x) = \cdots = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\nu+n-1} f^{(n-1)}(x) = 0.$$

表 14.1 和表 14.2 分别列出了 Mellin 变换的基本变换性质及部分初等函数的 Mellin 变换. 这些结果都可以直接由定义 (14.2) 求得.

表 14.1 Mellin 变换的基本性质

$g(x)$	$G(\nu) \equiv \mathcal{M}\{g\}(\nu)$
$\lambda f(x)$	$\lambda F(\nu)$
$f(ax), a > 0$	$a^{-\nu} F(\nu)$
$x^\alpha f(x)$	$F(\nu + \alpha)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$-(\nu-1) F(\nu-1)$
$f(x) \ln x$	$\frac{d}{d\nu} F(\nu)$
$f(x^\alpha), \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha} F(\nu/\alpha)$

表 14.2 部分初等函数的 Mellin 变换

$f(x)$	$F(\nu)$	成立条件
$\delta(x-a)$	$a^{\nu-1}$	
$\eta(x-a)$	$-\frac{1}{\nu}a^\nu$	
$\eta(a-x)$	$\frac{1}{\nu}a^\nu$	
$x^n \eta(x-a)$	$-\frac{1}{\nu+n}a^{\nu+n}$	
$x^n \eta(a-x)$	$\frac{1}{\nu+n}a^{\nu+n}$	$\operatorname{Re} \nu > 0$
$\ln \frac{a}{x} \eta(a-x)$	$\frac{1}{\nu^2}a^\nu$	$\operatorname{Re} \nu > 0$
e^{-ax}	$a^{-\nu} \Gamma(\nu)$	$\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$
$\sin x$	$\Gamma(\nu) \sin \frac{\pi \nu}{2}$	$-1 < \operatorname{Re} \nu < 1$
$\cos x$	$\Gamma(\nu) \cos \frac{\pi \nu}{2}$	$0 < \operatorname{Re} \nu < 1$
$\frac{1}{1+x}$	$\frac{\pi}{\sin \pi \nu}$	$0 < \operatorname{Re} \nu < 1$
$\frac{1}{1-x}$	$\pi \cot \pi \nu$	$0 < \operatorname{Re} \nu < 1$
$\frac{1}{(1+x)^a}$	$\frac{\Gamma(\nu) \Gamma(a-\nu)}{\Gamma(a)}$	$0 < \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} a$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin(\pi \nu/2)}$	$\operatorname{Re} \nu > 0$
$(1-x)^{a-1} \eta(1-x)$	$\frac{\Gamma(\nu) \Gamma(a)}{\Gamma(\nu+a)}$	$\operatorname{Re} a > 0$
$(b^2-x^2)^\mu \eta(b-x)$	$\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\mu+1) \Gamma(\nu/2)}{\Gamma(\mu+1+\nu/2)} b^{2\mu+\nu}$	
$(x-1)^{-a} \eta(x-1)$	$\frac{\Gamma(a-\nu) \Gamma(1-a)}{\Gamma(1-\nu)}$	$0 < \operatorname{Re} a < 1$
$(x-b)^\mu \eta(x-b)$	$\frac{\Gamma(\mu+1) \Gamma(-\nu-\mu)}{\Gamma(1-\nu)} b^{\nu+\mu}$	
$(x^2-1)^\mu \eta(x-1)$	$\frac{1}{2} \frac{\Gamma(\mu+1) \Gamma(-\mu-\nu/2)}{\Gamma(1-\nu/2)}$	
$[x(1-x)]^\mu \eta(1-x)$	$\frac{\Gamma(\nu+\mu) \Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\nu+2\mu+1)}$	

(续表)

$f(x)$	$F(\nu)$	成立条件
$\frac{1}{x} \ln(1+x)$	$\frac{\pi}{1-\nu} \frac{1}{\sin \pi \nu}$	$0 < \operatorname{Re} \nu < 1$
$\ln(1+x^2)$	$\frac{\pi}{\nu} \frac{1}{\sin(\pi \nu/2)}$	$-2 < \operatorname{Re} \nu < 0$
$\ln \left \frac{1+x}{1-x} \right $	$\frac{\pi}{\nu} \tan \frac{\nu \pi}{2}$	$-1 < \operatorname{Re} \nu < 1$
$\frac{1}{2} \pi - \arctan x$	$\frac{\pi}{2\nu} \frac{1}{\cos(\pi \nu/2)}$	$\operatorname{Re} \nu > 0$

例 14.2 设有平面角形区域 (即三维空间中的无穷长楔形体) $-\alpha < \theta < \alpha, r > 0$. 两边上 $r < a$ 的线段内温度为 1, 其余部分温度为 0. 求角形区域内的稳定温度分布.

解 设角形区域内 (r, θ) 处的温度为 $u(r, \theta)$, 它满足的定解问题为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad r > 0, -\alpha < \theta < \alpha, \quad (14.10a)$$

$$u|_{r=0} \text{ 有界}, \quad u|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad -\alpha \leq \theta \leq \alpha, \quad (14.10b)$$

$$u|_{\theta=\pm\alpha} = \eta(a-r), \quad 0 \leq r < \infty. \quad (14.10c)$$

其中 $\eta(x)$ 是 Heaviside 函数. 设 $u(r, \theta)$ 的 Mellin 变换存在, 即

$$U_M(\nu, \theta) = \int_0^\infty u(r, \theta) r^{\nu-1} dr, \quad (14.11)$$

并且将方程改写成

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad (14.10a')$$

则根据定解问题 (14.10), 即可求得 U_M 满足的方程

$$\frac{\partial^2 U_M}{\partial \theta^2} + \nu^2 U_M = 0. \quad (14.12a)$$

相应地, 由于

$$\int_0^\infty \eta(a-r) r^{\nu-1} dr = \int_0^a r^{\nu-1} dr = \frac{1}{\nu} a^\nu,$$

故 U_M 应满足边界条件

$$U_M|_{\theta=\pm\alpha} = \frac{1}{\nu} a^\nu. \quad (14.12b)$$

由此即可求出

$$U_M = \frac{1}{\nu} \frac{\cos \nu \theta}{\cos \nu \alpha} a^\nu.$$

求反演, 即得

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{U_M(\nu, \theta)}{r^\nu} d\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{\nu} \frac{\cos \nu \theta}{\cos \nu \alpha} \left(\frac{a}{r}\right)^\nu d\nu. \quad (14.13)$$

其中 $0 < \sigma < \pi/(2\alpha)$. 仍然采用留数定理来计算这个积分. 当 $r > a$ 时, 应补上 (半径为 ∞ 的) 右半圆. 积分围道内的奇点即为 $\cos \nu \alpha$ 的零点, $\nu_n = (2n+1)\pi/(2\alpha)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. 求出被积函数在这些奇点处的留数, 即得

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{(2n+1)\pi/2\alpha} \cos \frac{2n+1}{2\alpha} \pi \theta \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{a}{r} e^{i\theta} \right)^{\pi/2\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan \left[\frac{2(ar)^{\pi/2\alpha}}{r^{\pi/\alpha} - a^{\pi/\alpha}} \cos \frac{\pi\theta}{2\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (14.14a)$$

当 $r < a$ 时, 应补上 (半径为 ∞ 的) 左半圆, 此时在积分围道内的奇点, 除了 $\cos \nu \alpha$ 的零点

$$\nu_n = -\frac{2n+1}{2\alpha} \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

外, 还有 $\nu = 0$ 也是一阶极点. 求出被积函数在这些奇点处的留数, 又可得到

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{(2n+1)\pi/2\alpha} \cos \frac{2n+1}{2\alpha} \pi \theta \\ &= 1 - \frac{1}{\pi} \arctan \left[\frac{2(ar)^{\pi/2\alpha}}{a^{\pi/\alpha} - r^{\pi/\alpha}} \cos \frac{\pi\theta}{2\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (14.14b)$$

§14.2 Mellin 变换举例

本节再给出一些初等函数的 Mellin 变换. 部分结果也可以当成 B 函数的习题. 例 14.6 也可以作为留数定理的习题.

例 14.3 定义

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1, \\ 0 & |x| > 1, \end{cases}$$

求 $\Lambda(x-1)$ 的 Mellin 变换.

解 因为

$$\Lambda(x-1) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 2-x, & 1 < x < 2, \\ 0, & x > 2, \end{cases}$$

故有

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{\Lambda(x-1)\} &\equiv \int_0^\infty \Lambda(x-1) x^{\nu-1} dx = \int_0^1 x^\nu dx + \int_1^2 (2-x)x^{\nu-1} dx \\ &= \frac{2(2^\nu-1)}{\nu(\nu+1)}, \quad \operatorname{Re} \nu > -1, \nu \neq 0. \end{aligned} \quad (14.15a)$$

当 $\nu=0$ 时, 可以直接计算得

$$\mathcal{M}\{\Lambda(x-1)\}|_{\nu=0} = \int_0^\infty \Lambda(x-1) x^{-1} dx = \int_0^1 dx + \int_1^2 \frac{2-x}{x} dx = 2 \ln 2. \quad (14.15b)$$

由 (14.15a) 式按 l'Hôpital 法则求极限也得到相同的结果.

例 14.4 求 $\frac{\{\sqrt{x^2+1}-x\}^a}{\sqrt{x^2+1}}$ 的 Mellin 变换.

解 根据定义, 有

$$\mathcal{M}\left\{\frac{\{\sqrt{x^2+1}-x\}^a}{\sqrt{x^2+1}}\right\} \equiv \int_0^\infty \frac{\{\sqrt{x^2+1}-x\}^a}{\sqrt{x^2+1}} x^{\nu-1} dx.$$

作变换 $\sqrt{x^2+1}-x=t$, 则

$$x = \frac{1-t^2}{2t}, \quad \sqrt{x^2+1} = \frac{1+t^2}{2t}, \quad dx = -\frac{1+t^2}{2t^2},$$

容易看出, 当 $x=0$ 时, $t=1$; 当 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$t = \sqrt{x^2+1}-x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \rightarrow 0.$$

所以

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left\{\frac{\{\sqrt{x^2+1}-x\}^a}{\sqrt{x^2+1}}\right\} &= 2^{1-\nu} \int_0^1 t^{a-\nu} (1-t^2)^{\nu-1} dt = 2^{-\nu} \Gamma(\nu) \frac{\Gamma((1+a-\nu)/2)}{\Gamma((1+a+\nu)/2)} \\ &= \frac{2^{-\nu}}{\pi} \Gamma\left(\frac{1+a-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-a-\nu}{2}\right) \sin \frac{1-a-\nu}{2} \pi. \end{aligned} \quad (14.16)$$

此结果的成立条件是 $\operatorname{Re} \nu > 0$, $\operatorname{Re}(a-\nu) > -1$, 亦即 $0 < \operatorname{Re} \nu < 1 + \operatorname{Re} a$.

例 14.5 求 $f(x) = \frac{\{x - \sqrt{x^2 - 1}\}^a + \{x + \sqrt{x^2 - 1}\}^{-a}}{\sqrt{x^2 - 1}} \eta(x-1)$ 的 Mellin 变换.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad F(\nu) &\equiv \mathcal{M} \left\{ \frac{\{x - \sqrt{x^2 - 1}\}^a + \{x + \sqrt{x^2 - 1}\}^{-a}}{\sqrt{x^2 - 1}} \eta(x-1) \right\} \\ &= \int_1^\infty \frac{\{x - \sqrt{x^2 - 1}\}^a + \{x + \sqrt{x^2 - 1}\}^{-a}}{\sqrt{x^2 - 1}} x^{\nu-1} dx. \end{aligned}$$

作变换 $x - \sqrt{x^2 - 1} = t$, 则

$$x = \frac{1+t^2}{2t}, \quad \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1-t^2}{2t}, \quad dx = -\frac{1-t^2}{2t^2} dt.$$

同时, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 有

$$t = x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \rightarrow 0.$$

所以

$$F(\nu) = 2^{1-\nu} \int_0^1 (t^a + t^{-a}) (1+t^2)^{\nu-1} t^{-\nu} dt.$$

再令 $t = \tan \theta$, 则有

$$\begin{aligned} f(\nu) &= 2^{1-\nu} \int_0^{\pi/4} (\tan^a \theta + \tan^{-a} \theta) \tan^{-\nu} \theta \cos^{-2\nu} \theta d\theta \\ &= 2^{1-\nu} \int_0^{\pi/4} (\sin^{a-\nu} \theta \cos^{-a-\nu} \theta + \sin^{-a-\nu} \theta \cos^{a-\nu} \theta) d\theta \\ &= 2^{1-\nu} \int_0^{\pi/2} \sin^{a-\nu} \theta \cos^{-a-\nu} \theta d\theta. \end{aligned}$$

利用

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta, \quad \operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0,$$

即可求得

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ \frac{\{x - \sqrt{x^2 - 1}\}^a + \{x + \sqrt{x^2 - 1}\}^{-a}}{\sqrt{x^2 - 1}} \eta(x-1) \right\} &= B\left(\frac{1+a-\nu}{2}, \frac{1-a-\nu}{2}\right) \\ &= \frac{2^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} \Gamma\left(\frac{1+a-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-a-\nu}{2}\right). \end{aligned} \quad (14.17)$$

此结果的成立条件是 $\operatorname{Re}(1+a-\nu) > 0$, $\operatorname{Re}(1-a-\nu) > 0$, 亦即 $\operatorname{Re} \nu < 1 - |\operatorname{Re} a|$.

例 14.6 求 $\frac{1}{1+2x \cos \phi + x^2}$ 的 Mellin 变换

$$\mathcal{M} \left\{ \frac{1}{1+2x \cos \phi + x^2} \right\} \equiv \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{1+2x \cos \phi + x^2} dx.$$

其中 $0 < \phi < \pi$.

解 可以用留数定理计算这个积分. 为此计算围道积分 $\oint_C \frac{z^{\nu-1}}{1+2z\cos\phi+z^2} dz$, 积分围道 C 如图 14.2 所示. 在积分围道内, 被积函数有两个奇点 $z = e^{i(\pi\pm\phi)}$, 留数分别为

$$\mp(1/2i\sin\phi)e^{i(\nu-1)(\pi\pm\phi)}.$$

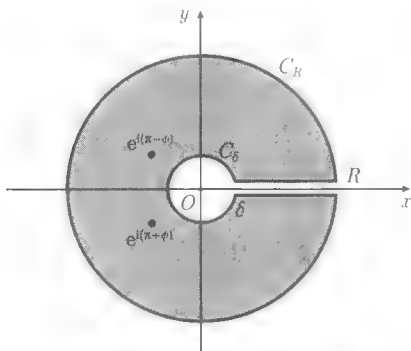


图 14.2 例 14.6 所用的积分围道

又因为当 $0 < \operatorname{Re} \nu < 2$ 时, 有

$$\lim_{|z| \rightarrow 0} z \cdot \frac{z^{\nu-1}}{1+2z\cos\phi+z^2} = 0, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} z \cdot \frac{z^{\nu-1}}{1+2z\cos\phi+z^2} = 0.$$

于是, 根据留数定理, 可以写出

$$(1 - e^{i2\pi\nu}) \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{1+2x\cos\phi+x^2} dx = \frac{\pi}{\sin\phi} e^{i(\nu-1)\pi} [-e^{i(\nu-1)\phi} + e^{-i(\nu-1)\phi}],$$

化简即得

$$\therefore \left\{ \frac{1}{1+2x\cos\phi+x^2} \right\} = \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{1+2x\cos\phi+x^2} dx = \frac{\pi \sin(\nu-1)\phi}{\sin\phi \sin(\nu-1)\pi},$$

$$0 < \phi < \pi, 0 < \operatorname{Re} \nu < 2. \quad (14.18)$$

讨论

1. 从以上计算过程可以看出, (14.18) 式在 $\phi = 0$ 或 π 时不成立.

2. 由 (14.18) 式立即可以导出^①

$$\therefore \left\{ \frac{1+x\cos\phi}{1+2x\cos\phi+x^2} \right\} \equiv \int_0^\infty \frac{1+x\cos\phi}{1+2x\cos\phi+x^2} x^{\nu-1} dx = \frac{\pi \cos\nu\phi}{\sin\nu\pi},$$

$$0 < \phi < \pi, 0 < \operatorname{Re} \nu < 1, \quad (14.19a)$$

^① 在 Kurt Bernardo Wolf 的 *Integral Transforms in Science and Engineering* (Plenum Press, New York, 1979) 一书中, 收录的公式有误.

$$\mathcal{M}\left\{\frac{x \sin \phi}{1+2x \cos \phi+x^2}\right\} \equiv \int_0^\infty \frac{x \sin \phi}{1+2x \cos \phi+x^2} x^{\nu-1} dx = \frac{\pi \sin \nu \phi}{\sin \nu \pi},$$

$$0 < \phi < \pi, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1. \quad (14.19b)$$

例 14.7 求 $\frac{1}{(x^2+1)^{\mu+1}}$ 的 Mellin 变换.

解 因为对于实数 α , 有

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{f(x^\alpha)\}(\nu) &= \int_0^\infty f(x^\alpha) x^{\nu-1} dx \\ &= \frac{1}{|\alpha|} \int_0^\infty f(y) y^{(\nu/\alpha)-1} dy = \frac{1}{|\alpha|} \mathcal{M}\{f(x)\}\left(\frac{\nu}{\alpha}\right), \end{aligned} \quad (14.20)$$

所以, 当 $0 < \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re}(2\mu+2)$ 时, 可以求得

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left\{\frac{1}{(x^2+1)^{\mu+1}}\right\}(\nu) &= \frac{1}{2} \mathcal{M}\left\{\frac{1}{(x+1)^{\mu+1}}\right\}(\nu/2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\nu/2) \Gamma(\mu+1-\nu/2)}{\Gamma(\mu+1)}. \end{aligned} \quad (14.21a)$$

在此基础上还能进一步计算出

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{(x^2+k^2)^{\mu+1}}\right\}(\nu) = \frac{k^{\nu-2\mu-2}}{2} \frac{\Gamma(\nu/2) \Gamma(\mu+1-\nu/2)}{\Gamma(\mu+1)}. \quad (14.21b)$$

例 14.8 求 $f(x) = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ 的 Mellin 变换.

解 因为

$$\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \begin{cases} \ln \frac{1+x}{1-x}, & 0 < x < 1, \\ \ln \frac{x+1}{x-1}, & x > 1, \end{cases}$$

所以

$$F(\nu) \equiv \mathcal{M}\left\{\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|\right\} = \int_0^1 \ln \frac{1+x}{1-x} x^{\nu-1} dx + \int_1^\infty \ln \frac{x+1}{x-1} x^{\nu-1} dx.$$

分别计算出上式中的两个积分. 对于第一个积分, 可将函数 $\ln \frac{1+x}{1-x}$ 在 $|x| < 1$ 内作展开, 而后逐项积分得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln \frac{1+x}{1-x} x^{\nu-1} dx &= 2 \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2n+1} \int_0^1 x^{2n+\nu} dx = 2 \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)(2n+\nu+1)} \\ &= \frac{2}{\nu} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+\nu+1} \right) = -\frac{1}{\nu} \left[\psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \right], \quad \operatorname{Re} \nu > -1, \end{aligned} \quad (14.22)$$

最后一步用到了公式^①

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{n + \alpha_k} \right\} = - \sum_{k=1}^m a_k \psi(\alpha_k).$$

同样, 有

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \ln \frac{x+1}{x-1} x^{\nu-1} dx &= \int_0^1 \ln \frac{1+t}{1-t} t^{-\nu-1} dt \\ &= \frac{1}{\nu} \left[\psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \right], \quad \operatorname{Re} \nu < 1. \end{aligned} \quad (14.23)$$

将二式合并, 即得

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| x^{\nu-1} dx &= \frac{1}{\nu} \left[\psi\left(\frac{1+\nu}{2}\right) - \psi\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \right] \\ &= \frac{\pi}{\nu} \cot \frac{\pi(1-\nu)}{2} = \frac{\pi}{\nu} \tan \frac{\pi\nu}{2}, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1. \end{aligned} \quad (14.24)$$

§14.3 特殊函数的 Mellin 变换

例 14.9 求余误差函数 $\operatorname{erfc} x$ 的 Mellin 变换.

解 $\mathscr{M}\{\operatorname{erfc} x\} \equiv \int_0^{\infty} (\operatorname{erfc} x) x^{\nu-1} dx = \int_0^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \right) x^{\nu-1} dx.$

交换积分次序, 即得

$$\begin{aligned} \mathscr{M}\{\operatorname{erfc} x\} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \left(\int_0^t x^{\nu-1} dx \right) dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{\nu} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\nu} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right), \quad \operatorname{Re} \nu > -1. \end{aligned} \quad (14.25)$$

例 14.10 求正弦积分 $\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ 的 Mellin 变换.

解 $\mathscr{M}\{\operatorname{Si}(x)\} \equiv \int_0^{\infty} \operatorname{Si}(x) x^{\nu-1} dx = \int_0^{\infty} \left(\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \right) x^{\nu-1} dx$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} \left(\int_t^{\infty} x^{\nu-1} dx \right) dt = -\frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} \sin t \cdot t^{\nu-1} dt \\ &= -\frac{1}{\nu} \Gamma(\nu) \sin \frac{\pi\nu}{2}, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 0. \end{aligned} \quad (14.26)$$

例 14.11 求 $\frac{1}{(1+x)^m} P_{\mu}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ 的 Mellin 变换, 其中 m 为正整数, $P_{\mu}(x)$ 是 Legendre 函数, $\mu \geq 0$.

^① 参见: 吴崇试, 数学物理方法, 第 2 版, 北京: 北京大学出版社, 2003: 105.

解 根据 Legendre 函数的定义知

$$P_{\mu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{\Gamma(\mu+n+1)}{\Gamma(\mu-n+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n,$$

即可求得

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ \frac{1}{(1+x)^m} P_{\mu} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right\} &\equiv \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)^m} P_{\mu} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) x^{\nu-1} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \frac{\Gamma(\mu+n+1)}{\Gamma(\mu-n+1)} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)^m} \left(\frac{x}{1+x} \right)^n x^{\nu-1} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \frac{\Gamma(\mu+n+1)}{\Gamma(\mu-n+1)} \int_0^{\infty} \frac{x^{n+\nu-1}}{(1+x)^{m+n}} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \frac{\Gamma(\mu+n+1)}{\Gamma(\mu-n+1)} \frac{(-1)^{m+n-1}}{(m+n-1)!} \frac{\Gamma(n+\nu)}{\Gamma(\nu-m+1)} \frac{\pi}{\sin \pi(n+\nu)} \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi \nu} \frac{1}{\Gamma(\nu-m+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{(-1)^{m+n-1}}{(m+n-1)!} \frac{\Gamma(\mu+n+1) \Gamma(n+\nu)}{\Gamma(\mu-n+1)}. \end{aligned}$$

再利用 Γ 函数的互余宗量定理, 即

$$\Gamma(\mu-n+1) \Gamma(n-\mu) = \frac{\pi}{\sin \pi(n-\mu)} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{\sin \pi \mu},$$

上式即可化为

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ \frac{1}{(1+x)^m} P_{\mu} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right\} &\equiv \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)^m} P_{\mu} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) x^{\nu-1} dx \\ &= (-1)^m \frac{\sin \pi \mu}{\sin \pi \nu} \frac{1}{\Gamma(\nu-m+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\mu+n+1) \Gamma(n-\mu) \Gamma(n+\nu)}{n! n! (m+n-1)!} \\ &= (-1)^m \frac{\sin \pi \mu}{\sin \pi \nu} \frac{1}{\Gamma(\nu-m+1)} \frac{\Gamma(\mu+1) \Gamma(-\mu) \Gamma(\nu)}{\Gamma(m)} {}_3F_2(\mu+1, -\mu, \nu; 1, m; 1) \\ &= \frac{\Gamma(m-\nu) \Gamma(\nu)}{\Gamma(m)} {}_3F_2(\mu+1, -\mu, \nu; 1, m; 1), \end{aligned} \quad (14.27)$$

其中 ${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; x)$ 是广义超几何函数:

$${}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\alpha_1+n)}{\Gamma(\alpha_1)} \frac{\Gamma(\alpha_2+n)}{\Gamma(\alpha_2)} \frac{\Gamma(\alpha_3+n)}{\Gamma(\alpha_3)} \frac{\Gamma(\beta_1)}{\Gamma(\beta_1+n)} \frac{\Gamma(\beta_2)}{\Gamma(\beta_2+n)} x^n.$$

(14.27) 式的成立条件是 $0 < \operatorname{Re} \nu < m$.

例 14.12 作为例 14.11 的特殊情形, 当 $\mu = m - 1$ 时, 广义超几何函数即退化为普通的超几何函数, 于是有

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ \frac{1}{(1+x)^m} P_{m-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right\} &= \frac{\Gamma(m-\nu) \Gamma(\nu)}{\Gamma(m)} F(1-m, \nu; 1; 1) \\ &= \left[\frac{\Gamma(m-\nu)}{\Gamma(m)} \right]^2 \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(1-\nu)}, \quad 0 < \operatorname{Re} \nu < m. \end{aligned} \quad (14.28)$$

以上用到了超几何函数的特殊值

$$F(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)}, \quad \operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0.$$

例 14.13 求超几何函数 $F(\alpha, \beta; \gamma; -x)$ 的 Mellin 变换

$$\mathcal{M}\{F(\alpha, \beta; \gamma; -x)\} \equiv \int_0^\infty F(\alpha, \beta; \gamma; -x) x^{\nu-1} dx, \quad 0 < \operatorname{Re} \nu < \min(\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta).$$

解 本题的关键在于正确选用超几何函数的表达式. 考虑到积分限的要求, 最方便的做法是采用超几何函数的积分表达式

$$F(\alpha, \beta; \gamma; -x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1+xt)^{-\alpha} dt.$$

代入, 并交换积分次序, 即得

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{F(\alpha, \beta; \gamma; -x)\} &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} \left[\int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{(1+xt)^\alpha} dx \right] dt \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-\nu-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} \left[\int_0^\infty \frac{\zeta^{\nu-1}}{(1+\zeta)^\alpha} d\zeta \right] dt \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \beta)} \frac{\Gamma(\nu) \Gamma(\alpha - \nu)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\beta-\nu-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} dt \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\nu) \Gamma(\alpha - \nu) \Gamma(\beta - \nu)}{\Gamma(\gamma - \nu)}. \end{aligned} \quad (14.29)$$

在计算过程中, 还要求 $\operatorname{Re}(\gamma - \beta) > 0$, 但这个限制可通过解析延拓的手段去掉.

例 14.14 求合流超几何函数 $F(\alpha; \gamma; -x)$ 的 Mellin 变换, 其中

$$F(\alpha; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)} x^n, \quad |x| < \infty.$$

解 上面给出的合流超几何函数的幂级数展开, 尽管在全平面收敛, 但不适合于逐项积分. 为了克服这一困难, 需要用到合流超几何函数的第一 Kummer 公式

$$F(\alpha; \gamma; x) = e^x F(\gamma - \alpha; \gamma; -x), \quad \text{即} \quad F(\alpha; \gamma; -x) = e^{-x} F(\gamma - \alpha; \gamma; x).$$

因此

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}\{F(\alpha; \gamma; -x)\} &\equiv \int_0^\infty F(\alpha; \gamma; -x) x^{\nu-1} dx = \int_0^\infty e^{-x} F(\gamma-\alpha; \gamma; x) x^{\nu-1} dx \\
 &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha+n)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty e^{-x} x^{\nu+n-1} dx \\
 &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\gamma-\alpha+n)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)} \Gamma(\nu+n) = \Gamma(\nu) F(\nu, \gamma-\alpha; \gamma; 1) \\
 &= \frac{\Gamma(\nu) \Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha-\nu)}{\Gamma(\gamma-\nu) \Gamma(\alpha)}. \tag{14.30}
 \end{aligned}$$

由上述计算过程可以看出, 此结果的成立条件是 $0 < \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \alpha$.

有关柱函数的 Mellin 变换, 可参见下一章.

§14.4 Mellin 变换的卷积公式

可以直接由 Mellin 变换的定义导出 Mellin 变换的一个卷积公式

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty u(x)v(x)x^{\nu-1} dx &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U(\mu)x^{-\mu} d\mu \right] v(x)x^{\nu-1} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U(\mu) \left[\int_0^\infty v(x)x^{\nu-\mu-1} dx \right] d\mu \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U(\mu)V(\nu-\mu) d\mu, \tag{14.31a}
 \end{aligned}$$

其中

$$U(\nu) = \mathcal{M}\{u(x)\} = \int_0^\infty u(x)x^{\nu-1} dx, \tag{14.31b}$$

$$V(\nu) = \mathcal{M}\{v(x)\} = \int_0^\infty v(x)x^{\nu-1} dx. \tag{14.31c}$$

由 Fourier 变换的卷积公式

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(y)g(x-y) dy\right\} &= F(k)G(k), \tag{14.32} \\
 F(k) &= \mathcal{F}\{f(x)\}, \quad G(k) = \mathcal{F}\{g(x)\},
 \end{aligned}$$

还能导出 Mellin 变换的另一个卷积公式

$$\mathcal{M}\left\{\int_0^\infty u(y)v\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dy}{y}\right\} = U(\nu)V(\nu) \tag{14.33a}$$

或

$$\mathcal{M}^{-1}\{U(\nu)V(\nu)\} = \int_0^\infty u(y)v\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y}. \quad (14.33b)$$

需要简要讨论一下卷积公式的成立条件. 以公式 (14.31a) 为例. 如果该式左端积分的收敛条件 (即乘积 $u(x)v(x)$ 的 Mellin 变换存在的条件) 是 $\alpha < \operatorname{Re} \nu < \beta$, 而 (14.31b) 和 (14.31c) 两式的成立条件 (即函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 的 Mellin 变换单独存在的条件) 分别为 $\alpha_1 < \operatorname{Re} \nu < \beta_1$ 和 $\alpha_2 < \operatorname{Re} \nu < \beta_2$, 则 (14.31a) 式右端的积分路径应该满足

$$\alpha_1 < \operatorname{Re} \mu < \beta_1, \quad \alpha_2 < \operatorname{Re} (\nu - \mu) < \beta_2.$$

卷积公式用于计算两函数乘积的 Mellin 变换或反演.

例 14.15 已知 $U(\nu) = \mathcal{M}\{u(x)\}$, $V(\nu) = \mathcal{M}\{v(x)\}$, 求 $\mathcal{M}\left\{u(x)v\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$.

解 作为 (14.20) 式的特殊情形 ($\alpha = -1$), 应当有

$$\mathcal{M}\left\{v\left(\frac{1}{x}\right)\right\} = \int_0^\infty v\left(\frac{1}{x}\right)x^{\nu-1}dx = V(-\nu),$$

所以, 由卷积公式 (14.31a), 立即可以推得

$$\mathcal{M}\left\{u(x)v\left(\frac{1}{x}\right)\right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U(\mu+\nu)V(\mu)d\mu. \quad (14.34)$$

除了用于计算两函数乘积的 Mellin 变换或反演外, Mellin 变换的卷积公式也还可以用于计算区间 $[0, \infty)$ 上的某些积分. 例如, 如果容易求得乘积 $U(\nu)V(\nu)$ 的反演, 则可以根据 (14.33a) 式计算出左端的积分 $\int_0^\infty u(y)v\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y}$.

例 14.16 若取

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad v(x) = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|,$$

由 (14.21a) 及 (14.24) 两式, 则有

$$U(\nu) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin(\nu\pi/2)}, \quad V(\nu) = \frac{\pi}{\nu} \tan \frac{\nu\pi}{2}.$$

此时就可以计算 (14.33a) 式左端的积分

$$\int_0^\infty u(y)v\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y} = \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} \ln \left| \frac{y+x}{y-x} \right| \frac{dy}{y}.$$

另一方面, 因为

$$U(\nu)V(\nu) = \frac{\pi^2}{2\nu \cos(\nu\pi/2)} = \pi \mathcal{M}\left\{\frac{\pi}{2} - \arctan x\right\},$$

所以就能计算得积分

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} \ln \left| \frac{y+x}{y-x} \right| \frac{dy}{y} = \pi \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right), \quad x > 0. \quad (14.35a)$$

如果将上面的 $u(x)$, $v(x)$ 对调, 或者将 (14.35a) 左端的积分作代换 $y = x/t$, 则有

$$\int_0^\infty \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \frac{t}{t^2+x^2} dt = \pi \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right), \quad x > 0. \quad (14.35b)$$

这正是第八章中得到的 (8.71) 式.

例 14.17 仿照例 14.16, 取

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|, & U(\nu) &= \frac{\pi}{\nu} \tan \frac{\nu\pi}{2}, \\ v(x) &= x \sin x, & V(\nu) &= \Gamma(\nu+1) \cos \frac{\nu\pi}{2}, \end{aligned}$$

于是, 根据 (14.33) 式, 可以求得积分

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| \frac{x}{y} \sin \frac{x}{y} \frac{dy}{y} &= x \int_0^\infty \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| \sin \frac{x}{y} \frac{dy}{y^2} \\ &= \mathcal{M}^{-1} \left\{ \frac{\pi}{\nu} \tan \frac{\nu\pi}{2} \cdot \Gamma(\nu+1) \cos \frac{\nu\pi}{2} \right\} \\ &= \mathcal{M}^{-1} \left\{ \pi \Gamma(\nu) \sin \frac{\nu\pi}{2} \right\} = \pi \sin x, \end{aligned}$$

亦即

$$\int_0^\infty \ln \left| \frac{1+y}{1-y} \right| \sin \frac{x}{y} \frac{dy}{y^2} = \frac{\pi}{x} \sin x. \quad (14.36a)$$

或者令 $y = 1/t$, 即得

$$\int_0^\infty \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \sin xt \, dt = \frac{\pi}{x} \sin x. \quad (14.36b)$$

此结果在第八章中也曾得到过, 见 (8.81) 式.

还可以在 (14.31) 式或 (14.34) 式中代入特定的 ν 值, 从而给出相应的定积分. 例如, 在此二式中取 $\nu = 1$, 即可得到

$$\int_0^\infty u(x)v(x) \, dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U(\mu)V(1-\mu) \, d\mu, \quad (14.37)$$

$$\int_0^\infty u(x)v\left(\frac{1}{x}\right) \, dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U(\mu)V(1+\mu) \, d\mu, \quad (14.38)$$

或者在 (14.34) 式中代入 $\nu = 0$, 得

$$\int_0^\infty u(x)v\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} U(\mu)V(\mu) \, d\mu. \quad (14.39)$$

这些公式将两个函数乘积的积分转化为它们的 Mellin 变换式乘积在复平面上的积分, 而后采用 Mellin 变换的反演 (在多数情形下就是与已知函数的 Mellin 变换式比对) 计算出积分值.

例 14.18 计算积分 $\int_0^\infty \sin x^2 \cos ax \, dx$ 与 $\int_0^\infty \cos x^2 \cos ax \, dx$, 其中 $a > 0$.

解 因为

$$\mathcal{M}\{\sin x^2\} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sin\frac{\nu\pi}{4}, \quad \mathcal{M}\{\cos x^2\} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\cos\frac{\nu\pi}{4}$$

以及

$$\mathcal{M}\{\cos ax\} = a^{-\nu}\Gamma(\nu)\cos\frac{\nu\pi}{2},$$

所以, 根据 (14.37) 式, 可知

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sin x^2 \cdot \cos ax \, dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} a^{-\nu}\Gamma(\nu)\cos\frac{\nu\pi}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\sin\frac{1-\nu}{4}\pi \, d\nu \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu-2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sin\frac{1-\nu}{4}\pi \frac{d\nu}{a^\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu-2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\left(\cos\frac{\nu\pi}{4} - \sin\frac{\nu\pi}{4}\right) \frac{d\nu}{a^\nu} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\frac{a^2}{4} - \sin\frac{a^2}{4}\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin\frac{\pi-a^2}{4}, \end{aligned} \quad (14.40)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \cos x^2 \cdot \cos ax \, dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} a^{-\nu}\Gamma(\nu)\cos\frac{\nu\pi}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\cos\frac{1-\nu}{4}\pi \, d\nu \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu-2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\cos\frac{1-\nu}{4}\pi \frac{d\nu}{a^\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu-2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\left(\cos\frac{\nu\pi}{4} + \sin\frac{\nu\pi}{4}\right) \frac{d\nu}{a^\nu} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\frac{a^2}{4} + \sin\frac{a^2}{4}\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin\frac{\pi+a^2}{4}. \end{aligned} \quad (14.41)$$

例 14.19 运用公式 (14.20), 可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{e^{-p^2x^2}\} &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)p^{-\nu}, \\ \mathcal{M}\{xe^{i(2a^2x^2)}\} &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)a^{-(\nu+1)}(1-i)^{-(\nu+1)}. \end{aligned}$$

由此就能计算出

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty e^{-p^2/x^2} e^{i(2a^2x^2)} dx \\
&= \frac{1}{8\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) p^{-\nu} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) a^{-(\nu+1)} (1-i)^{-(\nu+1)} d\nu \\
&= \frac{1}{4\pi i} \frac{\sqrt{\pi}}{a(1-i)} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \frac{1}{(1-i)^\nu} \frac{d\nu}{(2ap)^\nu} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2a(1-i)} e^{-2ap(1-i)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4a} (1+i) e^{-2ap} (\cos 2ap + i \sin 2ap). \quad (14.42)
\end{aligned}$$

分别比较等式两端的实部和虚部, 就得到

$$\int_0^\infty e^{-p^2/x^2} \cos(2a^2x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a} e^{-2ap} (\cos 2ap - \sin 2ap), \quad (14.43)$$

$$\int_0^\infty e^{-p^2/x^2} \sin(2a^2x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a} e^{-2ap} (\cos 2ap + \sin 2ap). \quad (14.44)$$

例 14.20 类似于例 14.19, 并且根据

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\left\{\frac{1}{x} \sin(2a^2x^2)\right\} &= \frac{1}{2} (\sqrt{2}a)^{-\nu+1} \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) \sin \frac{\nu-1}{4} \pi, \\
\mathcal{M}\left\{\frac{1}{x} \cos(2a^2x^2)\right\} &= \frac{1}{2} (\sqrt{2}a)^{-\nu+1} \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) \cos \frac{\nu-1}{4} \pi,
\end{aligned}$$

也能推出

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty e^{-p^2/x^2} \sin(2a^2x^2) \frac{dx}{x^2} \\
&= \frac{1}{8\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) p^{-\nu} \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) (\sqrt{2}a)^{-\nu+1} \sin \frac{\nu-1}{4} \pi d\nu \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}a}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{-\nu} \Gamma(\nu-1) \sin \frac{\nu-1}{4} \pi \frac{d\nu}{(\sqrt{2}ap)^\nu}, \\
& \int_0^\infty e^{-p^2/x^2} \cos(2a^2x^2) \frac{dx}{x^2} \\
&= \frac{1}{8\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) p^{-\nu} \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) (\sqrt{2}a)^{-\nu+1} \cos \frac{\nu-1}{4} \pi d\nu \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}a}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{-\nu} \Gamma(\nu-1) \cos \frac{\nu-1}{4} \pi \frac{d\nu}{(\sqrt{2}ap)^\nu}.
\end{aligned}$$

作变换 $\nu-1 = \nu'$, 就得到

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty e^{-p^2/x^2} \sin(2a^2x^2) \frac{dx}{x^2} &= \frac{1}{\pi i} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{4pi} \Gamma(\nu') \left(e^{i\nu'\pi/4} - e^{-i\nu'\pi/4} \right) \frac{d\nu'}{(2\sqrt{2}ap)^{\nu'}} \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2p} \frac{1}{2i} \left[e^{-2ap(1-i)} - e^{-2ap(1+i)} \right] \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2p} e^{-2ap} \sin(2ap), \tag{14.45}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty e^{-p^2/x^2} \cos(2a^2x^2) \frac{dx}{x^2} &= \frac{1}{\pi i} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{4p} \Gamma(\nu') \left(e^{i\nu'\pi/4} + e^{-i\nu'\pi/4} \right) \frac{d\nu'}{(2\sqrt{2}ap)^{\nu'}} \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2p} \frac{1}{2} \left[e^{-2ap(1-i)} + e^{-2ap(1+i)} \right] \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2p} e^{-2ap} \cos(2ap). \tag{14.46}
 \end{aligned}$$

下面介绍几个 Γ 函数在复平面的无穷积分. 其计算思路正和例 14.18 14.20 相反: 这时是将复平面上的无穷线积分转化为实积分. 由于指数函数的 Mellin 变换是 Γ 函数, 所以导出的实积分是含有指数函数的积分, 较易计算. 《数学物理方法专题——数理方程与特殊函数》一书中还要用这里得到的结果.

例 14.21 在 (14.37) 式中, 令 $u(x) = x^a e^{-x}$, $v(x) = e^{-x}$, 于是

$$U(\nu) = \Gamma(a + \nu), \quad V(\nu) = \Gamma(\nu).$$

此时可取 $\sigma = 0$, 即得

$$\int_0^\infty (x^a e^{-x})(e^{-x}) x^{\nu-1} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(a + \mu) \Gamma(\nu - \mu) d\mu,$$

亦即

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(a + \mu) \Gamma(\nu - \mu) d\mu = \frac{\Gamma(a + \nu)}{2^{a+\nu}}. \tag{14.47a}$$

令 $\mu = i\tau$, 即得

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(a + i\tau) \Gamma(\nu - i\tau) d\tau = \frac{\Gamma(a + \nu)}{2^{a+\nu}}. \tag{14.47b}$$

特别是 $a = \nu$ 时, 有

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Gamma(a + i\tau) \Gamma(a - i\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |\Gamma(a + i\tau)|^2 d\tau = \frac{\Gamma(2a)}{2^{2a}}. \tag{14.48}$$

例 14.22 在 (14.37) 式中取 $u(x) = \frac{x^b}{(1+x)^a}$, $v(x) = \frac{x^d}{(1+x)^c}$, 因此

$$U(\nu) = \frac{\Gamma(b + \nu) \Gamma(a - b - \nu)}{\Gamma(a)}, \quad V(\nu) = \frac{\Gamma(d + \nu) \Gamma(c - d - \nu)}{\Gamma(c)}.$$

由此即得

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{x^{b+d}}{(1+x)^{a+c}} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(b+\nu) \Gamma(a-b-\nu) \Gamma(d+1-\nu) \Gamma(c-d-1+\nu)}{\Gamma(a) \Gamma(c)} d\nu, \end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(b+\nu) \Gamma(a-b-\nu) \Gamma(d+1-\nu) \Gamma(c-d-1+\nu) d\nu \\ &= \frac{\Gamma(a) \Gamma(c)}{\Gamma(a+c)} \Gamma(b+d+1) \Gamma(a+c-b-d-1), \end{aligned} \quad (14.49a)$$

其中 σ 应使右端被积函数中 Γ 函数的宗量均为正, 即

$$a-b-\sigma > 0, \quad b+\sigma > 0, \quad 1+d-\sigma > 0, \quad c-d-1+k > 0.$$

或者令 $c-d-1=\alpha$, $b=\beta$, $1+d=\gamma$, $a-b=\delta$, 则有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\alpha+\nu) \Gamma(\beta+\nu) \Gamma(\gamma-\nu) \Gamma(\delta-\nu) d\nu \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\gamma) \Gamma(\alpha+\delta) \Gamma(\beta+\gamma) \Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}, \end{aligned} \quad (14.49b)$$

其中 $\alpha+\sigma > 0$, $\beta+\sigma > 0$, $\gamma-\sigma > 0$, $\delta-\sigma > 0$.

更可以将 $\alpha+\sigma$, $\beta+\sigma$ 和 $\gamma-\sigma$, $\delta-\sigma$ 直接写成 α , β 和 γ , δ , 从而有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\alpha+i\tau) \Gamma(\beta+i\tau) \Gamma(\gamma-i\tau) \Gamma(\delta-i\tau) d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\gamma) \Gamma(\alpha+\delta) \Gamma(\beta+\gamma) \Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}, \end{aligned} \quad (14.49c)$$

其中 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$.

例 14.23 如果在 (14.37) 式中取

$$u(x) = x^b(1-x)^{a-1}\eta(1-x), \quad v(x) = x^d(1-x)^{c-1}\eta(1-x),$$

其中 $\eta(x)$ 是 Heaviside 函数, 则

$$U(\nu) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b+\nu)}{\Gamma(a+b+\nu)}, \quad V(\nu) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(d+\nu)}{\Gamma(c+d+\nu)}.$$

于是又有

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{b+d}(1-x)^{a+c-2} dx &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(a) \Gamma(b+\nu) \Gamma(c) \Gamma(d+\nu)}{\Gamma(a+b+\nu) \Gamma(c+d+\nu)} d\nu \\ &= \frac{\Gamma(b+d+1) \Gamma(a+c-1)}{\Gamma(a+b+c+d)}. \end{aligned} \quad (14.50a)$$

或者令 $b = \alpha'$, $a + b = \beta'$, $1 + d = \gamma'$, $1 + c + d = \delta'$, 则

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(\alpha' + \nu) \Gamma(\gamma' - \nu)}{\Gamma(\beta' + \nu) \Gamma(\delta' - \nu)} d\nu \\ &= \frac{\Gamma(\alpha' + \gamma') \Gamma(\beta' + \delta' - \alpha' - \gamma')}{\Gamma(\beta' - \alpha') \Gamma(\delta' - \gamma') \Gamma(\beta' + \delta' - 1)}, \end{aligned} \quad (14.50b)$$

其中 $\alpha' + \sigma > 0$, $\beta' + \sigma > 0$, $\gamma' - \sigma > 0$, $\delta' - \sigma > 0$.

也可以引进 $\alpha = \alpha' + \sigma$, $\beta = \beta' + \sigma$, $\gamma = \gamma' - \sigma$, $\delta = \delta' - \sigma$, 从而将 (14.50b) 式改写成

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + i\tau) \Gamma(\gamma - i\tau)}{\Gamma(\beta + i\tau) \Gamma(\delta - i\tau)} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \gamma) \Gamma(\beta + \delta - \alpha - \gamma)}{\Gamma(\beta - \alpha) \Gamma(\delta - \gamma) \Gamma(\beta + \delta - 1)}, \end{aligned} \quad (14.50c)$$

其中 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$.

例 14.24 若取 $u(x) = x^b(1-x)^{a-1}\eta(1-x)$, $v(x) = \frac{x^d}{(1+x)^c}$, 相应地, 有

$$U(\nu) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b + \nu)}{\Gamma(a + b + \nu)}, \quad V(\nu) = \frac{\Gamma(d + \nu) \Gamma(c - d - \nu)}{\Gamma(c)},$$

则根据 (14.37) 式, 可以写出

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(a) \Gamma(b + \nu) \Gamma(d + 1 - \nu) \Gamma(c - d - 1 + \nu)}{\Gamma(a + b + \nu) \Gamma(c)} d\nu \\ &= \int_0^1 \frac{x^{b+d}(1-x)^{a-1}}{(1+x)^c} dx. \end{aligned} \quad (14.51)$$

当 c 取某些特殊值时, 可以方便地求得 (14.51) 式右端积分的有限形式. 例如, 当 $c = 1 - a$ 时, (14.51) 式右端可化为

$$\int_0^1 x^{b+d}(1-x^2)^{a-1} dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma((b+d+1)/2) \Gamma(a)}{\Gamma(a + (b+d+1)/2)}.$$

因此, 如果令 $b = \alpha$, $a + d = -\beta$, $d + 1 = \gamma$, 则有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(\alpha + \nu) \Gamma(\beta + \nu) \Gamma(\gamma - \nu)}{\Gamma(1 + \alpha - \beta - \gamma + \nu)} d\nu \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma((\alpha + \gamma)/2) \Gamma(\beta + \gamma)}{\Gamma(1 - \beta + (\alpha - \gamma)/2)}, \end{aligned} \quad (14.52a)$$

其中

$$\alpha + \sigma > 0, \quad \beta + \sigma > 0, \quad \gamma - \sigma > 0, \quad 1 + \alpha - \beta - \gamma + \sigma > 0.$$

仿照例 14.22 和例 14.23 的办法, 也能将 (14.52a) 式改写成

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + i\tau) \Gamma(\beta + i\tau) \Gamma(\gamma - i\tau)}{\Gamma(1 + \alpha - \beta - \gamma + i\tau)} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma((\alpha + \gamma)/2) \Gamma(\beta + \gamma)}{\Gamma(1 - \beta + (\alpha - \gamma)/2)}, \end{aligned} \quad (14.52b)$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, 且 $1 + \alpha - \beta - \gamma > 0$.

另一方面, 如果作变换

$$t = \frac{1-x}{1+x}, \quad \text{即} \quad x = \frac{1-t}{1+t}.$$

则 (14.51) 式右端又可化为

$$\int_0^1 \frac{x^{b+d}(1-x)^{a-1}}{(1+x)^c} dx = 2^{a-c} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b+d}(1+t)^{c-a-b-d-1} dt.$$

因此当 $c - a - b - d$ 为正整数时, 又可计算出积分值. 特别是, 当 $c = a + b + d + 1$ 时, 又将得到 (14.51) 式的结果.

第十五章 柱函数的 Mellin 变换

作为上一章的继续, 本章集中讨论涉及柱函数的 Mellin 变换, 包括原函数或像函数中含有柱函数的两种情形.

§15.1 柱函数的 Mellin 变换

例 15.1 求函数 $x^{-\mu} J_{\mu}(ax)$ 的 Mellin 变换

$$\mathcal{M}\{x^{-\mu} J_{\mu}(ax)\} \equiv \int_0^{\infty} x^{-\mu} J_{\mu}(ax) x^{\nu-1} dx, \quad a > 0, 0 < \operatorname{Re} \nu < 1.$$

解 本题的关键在于正确选用 Bessel 函数的表达式. 考虑到积分收敛性的要求, 应采用 Bessel 函数的积分表达式

$$J_{\mu}(z) = \frac{2}{\Gamma(\mu+1/2)\Gamma(1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\mu} \int_0^1 (1-\zeta^2)^{\mu-1/2} \cos z\zeta d\zeta$$

代入, 并交换积分次序, 即得

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{x^{-\mu} J_{\mu}(ax)\} &= \frac{2}{\Gamma(\mu+1/2)\Gamma(1/2)} \left(\frac{a}{2}\right)^{\mu} \int_0^1 (1-\zeta^2)^{\mu-1/2} \left[\int_0^{\infty} x^{\nu-1} \cos(ax\zeta) dx \right] d\zeta \\ &= \frac{2}{\Gamma(\mu+1/2)\Gamma(1/2)} \frac{a^{\mu-\nu}}{2^{\mu}} \Gamma(\nu) \cos \frac{\pi\nu}{2} \int_0^1 (1-\zeta^2)^{\mu-1/2} \zeta^{-\nu} d\zeta \\ &= \frac{a^{\mu-\nu}}{2^{\mu}} \frac{\Gamma(\nu) \Gamma((1-\nu)/2)}{\Gamma(1/2) \Gamma(\mu+1-\nu/2)} \cos \frac{\pi\nu}{2} \end{aligned} \quad (15.1a)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^{\mu-\nu} \frac{\Gamma(\nu/2)}{\Gamma(\mu+1-\nu/2)} \quad (15.1b)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{a}{2}\right)^{\mu-\nu} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) \sin\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right)\pi. \quad (15.1c)$$

在化简到最后结果时用到了 Γ 函数的互余宗量定理及倍乘公式

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}\right) &= \frac{\pi}{\sin \pi(1-\nu)/2} = \frac{\pi}{\cos \pi\nu/2}, \\ \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2}\right) &= 2^{1-\nu} \Gamma(\nu) \Gamma(1/2). \end{aligned}$$

从 (15.1) 式出发, 结合 Mellin 变换的基本性质 (见表 14.1), 就可以导出各类柱函数以及柱函数与幂函数乘积的 Mellin 变换.

例 15.2 令 (15.1) 式中 $a = 1$, 得

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{x^{-\mu}J_{\mu}(x)\} &= \int_0^{\infty} x^{-\mu}J_{\mu}(x)x^{\nu-1}dx \\ &= \frac{2^{\nu-\mu-1}}{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right)\sin\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right)\pi\end{aligned}\quad (15.2a)$$

$$= 2^{\nu-\mu-1}\frac{\Gamma(\nu/2)}{\Gamma(\mu+1-\nu/2)}, \quad 0 < \operatorname{Re} \nu < \mu + \frac{3}{2}. \quad (15.2b)$$

同时, 根据 Mellin 变换的基本性质 (见表 14.1), 就可以直接推出

$$\mathcal{M}\{J_{\mu}(x)\} = \frac{2^{\nu-1}}{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\sin\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\pi \quad (15.3a)$$

$$= 2^{\nu-1}\frac{\Gamma((\mu+\nu)/2)}{\Gamma(1+(\mu-\nu)/2)}, \quad -\mu < \operatorname{Re} \nu < \frac{3}{2} \quad (15.3b)$$

以及

$$\mathcal{M}\{x^{\mu}J_{\mu}(x)\} = \frac{2^{\nu+\mu-1}}{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right)\sin\frac{\nu\pi}{2} \quad (15.4a)$$

$$= 2^{\nu+\mu-1}\frac{\Gamma(\mu+\nu/2)}{\Gamma(1-\nu/2)}, \quad -2\mu < \operatorname{Re} \nu < -\mu + \frac{3}{2}. \quad (15.4b)$$

或者更一般地, 有

$$\mathcal{M}\{x^{\lambda}J_{\mu}(x)\} = \frac{2^{\nu+\lambda-1}}{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu+\lambda+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\right)\sin\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\pi \quad (15.5a)$$

$$= 2^{\nu+\lambda-1}\frac{\Gamma((\nu+\lambda+\mu)/2)}{\Gamma(1+(\mu-\lambda-\nu)/2)}, \quad -\lambda-\mu < \operatorname{Re} \nu < -\lambda+\frac{3}{2}. \quad (15.5b)$$

特别是, 当 $\lambda = -1/2$ 时, 就有

$$\mathcal{M}\{x^{-1/2}J_{\mu}(x)\} = \frac{2^{\nu-3/2}}{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}-\frac{1}{4}\right)\sin\left(\frac{\nu-\mu}{2}-\frac{1}{4}\right)\pi \quad (15.6a)$$

$$= 2^{\nu-3/2}\frac{\Gamma((\nu+\mu)/2-1/4)}{\Gamma((\mu-\nu)/2+5/4)}, \quad -\mu+1/2 < \operatorname{Re} \nu < 2 \quad (15.6b)$$

以及

$$\mathcal{M}\{j_{\mu}(x)\} = \frac{2^{\nu-2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}-\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\nu-\mu}{2}\pi \quad (15.7a)$$

$$= 2^{\nu-2}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma((\nu+\mu)/2)}{\Gamma((\mu-\nu)/2+3/2)} \quad -\mu+1/2 < \operatorname{Re} \nu < 2. \quad (15.7b)$$

由 (15.3b) 式还能导出

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}\{J_\mu(x) + J_{-\mu}(x)\} &= \frac{2^{\nu-1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \left[\sin\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\pi + \sin\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\pi \right] \\
 &= \frac{2^\nu}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \sin \frac{\nu\pi}{2} \cos \frac{\mu\pi}{2}, \quad |\mu| < \operatorname{Re} \nu < \frac{3}{2},
 \end{aligned}
 \tag{15.8a}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}\{J_\mu(x) - J_{-\mu}(x)\} &= \frac{2^{\nu-1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \left[\sin\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\pi - \sin\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right)\pi \right] \\
 &= -\frac{2^\nu}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \cos \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{\mu\pi}{2}, \quad |\mu| < \operatorname{Re} \nu < \frac{3}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{15.8b}$$

例 15.3 对于 Neumann 函数, 有

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}\{N_\mu(x)\} &= \frac{\cos \mu\pi}{\sin \mu\pi} \mathcal{M}\{J_\mu(x)\} - \frac{1}{\sin \mu\pi} \mathcal{M}\{J_{-\mu}(x)\} \\
 &= -\frac{2^{\nu-1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \cos \frac{\nu-\mu}{2}\pi, \quad |\mu| < \operatorname{Re} \nu < \frac{3}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{15.9}$$

再利用表 14.1 中给出的基本性质, 得

$$\mathcal{M}\{x^\mu N_\mu(x)\} = -\frac{2^{\nu+\mu-1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right) \cos \frac{\nu\pi}{2}, \quad |\mu| - \mu < \operatorname{Re} \nu < \frac{3}{2} - \mu,
 \tag{15.10a}$$

$$\mathcal{M}\{x^{-\mu} N_\mu(x)\} = -\frac{2^{\nu-\mu-1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) \cos \left(\frac{\nu}{2}-\mu\right)\pi, \quad |\mu| + \mu < \operatorname{Re} \nu < \mu + \frac{3}{2}.
 \tag{15.10b}$$

例 15.4 将 (15.3) 与 (15.9) 两式组合, 又能得到 Hankel 函数

$$H_\mu^{(1)}(x) = J_\mu(x) + iN_\mu(x) \quad \text{及} \quad H_\mu^{(2)}(x) = J_\mu(x) - iN_\mu(x)$$

的 Mellin 变换:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}\{H_\mu^{(1)}(x)\} &= \frac{2^{\nu-1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \left(\sin \frac{\nu-\mu}{2}\pi - i \cos \frac{\nu-\mu}{2}\pi \right) \\
 &= \frac{2^{\nu-1}}{\pi i} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) e^{i(\nu-\mu)\pi/2}, \quad |\mu| < \operatorname{Re} \nu < \frac{3}{2},
 \end{aligned}
 \tag{15.11}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}\{H_\mu^{(2)}(x)\} &= \frac{2^{\nu-1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \left(\sin \frac{\nu-\mu}{2}\pi + i \cos \frac{\nu-\mu}{2}\pi \right) \\
 &= -\frac{2^{\nu-1}}{\pi i} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) e^{-i(\nu-\mu)\pi/2}, \quad |\mu| < \operatorname{Re} \nu < \frac{3}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{15.12}$$

将 (15.2) 与 (15.10b) 两式组合, 或者直接由 (15.11) 和 (15.12) 两式, 又可推出

$$\mathcal{M}\left\{x^{-\mu}H_{\mu}^{(1)}(x)\right\} = \frac{1}{\pi i} 2^{\nu-\mu-1} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) e^{-i\pi(\mu-\nu/2)}, \quad |\mu|+\mu < \operatorname{Re} \nu < \mu + \frac{3}{2}, \quad (15.13)$$

$$\mathcal{M}\left\{x^{-\mu}H_{\mu}^{(2)}(x)\right\} = -\frac{1}{\pi i} 2^{\nu-\mu-1} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) e^{i\pi(\mu-\nu/2)}, \quad |\mu|+\mu < \operatorname{Re} \nu < \mu + \frac{3}{2}. \quad (15.14)$$

在以上的计算中均取 x 为实变数. 当然相关的计算结果, 不排除对一定辐角范围内的 x 也成立. 特别是, 通过解析延拓的办法, 可以将实变数 x 延拓为纯虚数 $xe^{i\pi/2}$ (x 仍为实数), 从而又可得到一些新的性质.

以下我们纯粹形式地作解析延拓, 关键性的有关积分解析性的证明从略. 解析延拓的办法即是直接将 x 换成 $xe^{i\pi/2}$, 即相当于假设沿正实轴的积分和沿正虚轴的积分相等, 亦即

$$\int_0^{\infty} f(xe^{i\pi/2}) (xe^{i\pi/2})^{\nu-1} e^{i\pi/2} dx = \int_0^{\infty} f(x) x^{\nu-1} dx,$$

因此

$$\mathcal{M}\{f(xe^{i\pi/2})\} = e^{-i\pi\nu/2} \mathcal{M}\{f(x)\}. \quad (15.15)$$

当然, 也可以由 Mellin 变换的逆变换作解析延拓.

例 15.5 按照这样的做法, 我们就可以将 (15.13) 式作解析延拓:

$$\mathcal{M}\left\{(xe^{i\pi/2})^{-\mu}H_{\mu}^{(1)}(xe^{i\pi/2})\right\} = e^{-i\pi\nu/2} \left[-\frac{i}{\pi} 2^{\nu-\mu-1} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) e^{-i\pi(\mu-\nu/2)}\right].$$

但对于实变量 x , 有

$$\frac{\pi i}{2} e^{i\pi\mu/2} H_{\mu}^{(1)}(xe^{i\pi/2}) = K_{\mu}(x), \quad (15.16)$$

其中 $K_{\mu}(x)$ 为第二类虚宗量 Bessel 函数, 所以这正好给出了 $K_{\mu}(x)$ 的 Mellin 变换:

$$\mathcal{M}\{x^{-\mu}K_{\mu}(x)\} = 2^{\nu-\mu-2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right), \quad \operatorname{Re} \nu > \max(0, 2\mu). \quad (15.17)$$

由 $K_{\mu}(x)$ 和第一类虚宗量 Bessel 函数

$$I_{\mu}(x) \equiv e^{-i\mu\pi/2} J_{\mu}(xe^{i\pi/2}) \quad (15.18)$$

的关系

$$K_{\mu}(x) = \frac{\pi}{2 \sin \mu\pi} [I_{-\mu}(x) - I_{\mu}(x)], \quad (15.19)$$

能够看出 $K_{\mu}(x)$ 是 ν 的偶函数, 所以又有

$$\mathcal{M}\{x^{\mu}K_{\mu}(x)\} = 2^{\nu+\mu-2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right), \quad \operatorname{Re} \nu > \max(0, -2\mu). \quad (15.20)$$

由 (15.17) 式或 (15.20) 式还可以导出

$$\mathcal{M}\{K_\mu(x)\} = 2^{\nu-2} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right). \quad (15.21)$$

§15.2 柱函数乘积的 Mellin 变换

例 15.6 从例 15.2 中的 (15.2) 式出发, 利用卷积公式 (14.31a), 就可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left\{\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} \frac{J_\mu(x)}{x^\mu}\right\} &= \frac{2^{\nu-\lambda-\mu-2}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(w/2)}{\Gamma(1+\lambda-w/2)} \frac{\Gamma((\nu-w)/2)}{\Gamma(1+\mu-(\nu-w)/2)} dw \\ &= \frac{2^{\nu-\lambda-\mu-1}}{2\pi i} \int_{2\sigma-i\infty}^{2\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(w)}{\Gamma(1+\lambda-w)} \frac{\Gamma((\nu/2)-w)}{\Gamma(1+\mu+w-\nu/2)} dw. \end{aligned}$$

计算出上式右端的积分 (见第十四章中的例 14.23, (14.50b) 式), 就得到

$$\mathcal{M}\left\{\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} \frac{J_\mu(x)}{x^\mu}\right\} = \frac{2^{\nu-\lambda-\mu-1} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma(1+\lambda+\mu-\nu)}{\Gamma\left(1+\lambda-\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(1+\mu-\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(1+\lambda+\mu-\frac{\nu}{2}\right)} \quad (15.22a)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2^{\nu-\lambda-\mu-1}}{\pi^3} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\lambda\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\lambda-\mu\right) \Gamma(1+\lambda+\mu-\nu) \\ &\quad \times \sin\left(\frac{\nu}{2}-\lambda\right) \pi \sin\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) \pi \sin\left(\frac{\nu}{2}-\lambda-\mu\right) \pi. \end{aligned} \quad (15.22b)$$

特别是取 $\nu=1$, 得

$$\int_0^\infty \frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} \frac{J_\mu(x)}{x^\mu} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\lambda+\mu}} \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda+\mu+\frac{1}{2}\right)}. \quad (15.22c)$$

又当 $\nu=2$ 时, 有

$$\int_0^\infty \frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} \frac{J_\mu(x)}{x^\mu} x dx = \frac{1}{2^{\lambda+\mu-1}} \frac{\Gamma(\lambda+\mu-1)}{\Gamma(\lambda) \Gamma(\mu) \Gamma(\lambda+\mu)}. \quad (15.22d)$$

例 15.7 由 (15.27) 式可以导出

$$\mathcal{M}\{J_\lambda(x) J_\mu(x)\} = \frac{2^{\nu-1} \Gamma\left(\frac{\nu+\lambda+\mu}{2}\right) \Gamma(1-\nu)}{\Gamma\left(1-\frac{\lambda-\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{\mu-\lambda+\nu}{2}\right) \Gamma\left(1+\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}\right)} \quad (15.23a)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2^{\nu-1}}{\pi^3} \Gamma(1-\nu) \Gamma\left(\frac{\nu+\lambda-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\lambda+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\lambda-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+\lambda+\nu}{2}\right) \\ &\quad \times \sin \frac{\nu+\lambda-\nu}{2} \pi \sin \frac{\nu-\lambda+\nu}{2} \pi \sin \frac{\nu-\lambda-\nu}{2} \pi. \end{aligned} \quad (15.23b)$$

特别是, 当 $\lambda = \pm\mu$ 时, 有

$$\mathcal{M}\{J_\mu(x)J_\mu(x)\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\mu + \frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(1 + \mu - \frac{\nu}{2}\right)} \quad (15.24a)$$

$$= \frac{1}{2\pi^{5/2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \sin\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \pi \sin \frac{\nu\pi}{2}, \quad (15.24b)$$

$$\mathcal{M}\{J_\mu(x)J_{-\mu}(x)\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \mu - \frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(1 - \mu - \frac{\nu}{2}\right)} \quad (15.25a)$$

$$= \frac{1}{2\pi^{5/2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \sin\left(\frac{\nu}{2} + \mu\right) \pi \sin\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \pi. \quad (15.25b)$$

在以上化简过程中, 需要用到 Γ 函数的互余宗量定理以及倍乘公式.

例 15.8 由 (15.24) 与 (15.25) 两式又能推出

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{J_\mu(x)N_\mu(x)\} &= \frac{\cos \mu\pi}{\sin \mu\pi} \mathcal{M}\{J_\mu(x)J_\mu(x)\} - \frac{1}{\sin \mu\pi} \mathcal{M}\{J_\mu(x)J_{-\mu}(x)\} \\ &= -\frac{1}{2\pi^{5/2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \sin\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \pi \cos \frac{\nu\pi}{2}, \end{aligned} \quad (15.26)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{J_{-\mu}(x)N_\mu(x)\} &= \frac{\cos \mu\pi}{\sin \mu\pi} \mathcal{M}\{J_{-\mu}(x)J_\mu(x)\} - \frac{1}{\sin \mu\pi} \mathcal{M}\{J_{-\mu}(x)J_{-\mu}(x)\} \\ &= -\frac{1}{2\pi^{5/2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \sin\left(\frac{\nu}{2} + \mu\right) \pi \cos\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \pi, \end{aligned} \quad (15.27)$$

因此

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{N_\mu(x)N_\mu(x)\} &= \frac{\cos \mu\pi}{\sin \mu\pi} \mathcal{M}\{J_\mu(x)N_\mu(x)\} - \frac{1}{\sin \mu\pi} \mathcal{M}\{J_{-\mu}(x)N_\mu(x)\} \\ &= \frac{1}{\pi^{5/2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \left[\cos \mu\pi - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \pi \sin \frac{\nu\pi}{2} \right]. \end{aligned} \quad (15.28)$$

例 15.9 结合 (15.24b) 和 (15.26) 两式, 即得

$$\mathcal{M}\{J_\mu(x)H_\mu^{(1)}(x)\} = -\frac{i e^{i\pi\nu/2}}{2\pi^{5/2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \sin\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \pi. \quad (15.29)$$

将 (15.24b) 和 (15.28) 两式相加、减, 又能得出

$$\mathcal{M}\{H_\mu^{(1)}(x)H_\mu^{(2)}(x)\} \equiv \mathcal{M}\{J_\mu(x)J_\mu(x) + N_\mu(x)N_\mu(x)\}$$

$$= \frac{1}{\pi^{5/2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \cos \mu\pi, \quad (15.30)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}\{J_\mu(x)J_\mu(x) - N_\mu(x)N_\mu(x)\} \\ &= -\frac{1}{\pi^{5/2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \left[\cos \mu\pi - \sin\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right)\pi \sin \frac{\nu\pi}{2}\right] \end{aligned} \quad (15.31a)$$

$$= -\frac{1}{\pi^{5/2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \cos\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right)\pi \cos \frac{\nu\pi}{2}. \quad (15.31b)$$

例 15.10 考虑到

$$\sin x = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{1/2}(x), \quad \cos x = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} J_{-1/2}(x),$$

所以, 在 (15.22) 式中分别令 $\lambda = \pm 1/2$, 则有

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left\{\frac{J_{1/2}(x)}{x^{1/2}} \frac{J_\mu(x)}{x^\mu}\right\} &= 2^{\nu-\mu-3/2} \frac{\Gamma(\nu/2) \Gamma(\mu-\nu+3/2)}{\Gamma((3-\nu)/2) \Gamma(1+\mu-\nu/2) \Gamma(\mu+(3-\nu)/2)}, \\ \mathcal{M}\left\{\frac{J_{-1/2}(x)}{x^{-1/2}} \frac{J_\mu(x)}{x^\mu}\right\} &= 2^{\nu-\mu-1/2} \frac{\Gamma(\nu/2) \Gamma(\mu-\nu+1/2)}{\Gamma((1-\nu)/2) \Gamma(1+\mu-\nu/2) \Gamma(\mu+(1-\nu)/2)}, \end{aligned}$$

从而就可以推出

$$\mathcal{M}\{\sin x J_\mu(x)\} = 2^{\nu-1} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right) \Gamma\left(1+\frac{\mu-\nu}{2}\right)} \quad (15.32a)$$

$$= \frac{2^{-\nu}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\mu+\nu) \Gamma(-\nu+1/2)}{\Gamma(1+\mu-\nu)} \sin \frac{\mu+\nu}{2} \pi \quad (15.32b)$$

$$= \frac{2^{-\nu}}{\pi^{3/2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right) \Gamma(\nu+\mu) \Gamma(\nu-\mu) \sin \frac{\mu+\nu}{2} \pi \sin(\nu-\mu)\pi, \quad (15.32c)$$

$$\mathcal{M}\{\cos x J_\mu(x)\} = 2^{\nu-1} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right) \Gamma\left(1+\frac{\mu-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right)} \quad (15.33a)$$

$$= \frac{2^{-\nu}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\mu+\nu) \Gamma(-\nu+1/2)}{\Gamma(1+\mu-\nu)} \cos \frac{\mu+\nu}{2} \pi \quad (15.33b)$$

$$= \frac{2^{-\nu}}{\pi^{3/2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right) \Gamma(\nu+\mu) \Gamma(\nu-\mu) \cos \frac{\mu+\nu}{2} \pi \sin(\nu-\mu)\pi. \quad (15.33c)$$

进一步作线性组合, 即得

$$\mathcal{M}\{e^{ix} J_\mu(x)\} = \frac{2^{-\nu}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\mu+\nu) \Gamma(-\nu+1/2)}{\Gamma(1+\mu-\nu)} e^{i(\mu+\nu)\pi/2} \quad (15.34a)$$

$$= \frac{2^{-\nu}}{\pi^{3/2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \Gamma(\nu + \mu) \Gamma(\nu - \mu) e^{i(\mu + \nu)\pi/2} \sin(\nu - \mu)\pi. \quad (15.34b)$$

类似地, 可以求得

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{\sin x N_\mu(x)\} &= \frac{\cos \mu\pi}{\sin \mu\pi} \mathcal{M}\{\sin x J_\mu(x)\} - \frac{1}{\sin \mu\pi} \mathcal{M}\{\sin x J_{-\mu}(x)\} \\ &= \frac{2^{-\nu}}{\pi^{3/2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \Gamma(\nu + \mu) \Gamma(\nu - \mu) \sin^2 \frac{\nu - \mu}{2} \pi \sin \frac{\nu + \mu}{2} \pi. \end{aligned} \quad (15.35)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{\cos x N_\mu(x)\} &= \frac{\cos \mu\pi}{\cos \mu\pi} \mathcal{M}\{\cos x J_\mu(x)\} - \frac{1}{\sin \mu\pi} \mathcal{M}\{\sin x J_{-\mu}(x)\} \\ &= -\frac{2^{-\nu}}{\pi^{3/2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \Gamma(\nu + \mu) \Gamma(\nu - \mu) \cos^2 \frac{\nu - \mu}{2} \pi \cos \frac{\nu + \mu}{2} \pi. \end{aligned} \quad (15.36)$$

在此基础上又可以推出

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{\sin x J_\mu(x) + \cos x N_\mu(x)\} \\ = -\frac{2^{1-\nu}}{\pi^{3/2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \Gamma(\nu + \mu) \Gamma(\nu - \mu) \cos \nu\pi \cos \frac{\nu - \mu}{2} \pi, \end{aligned} \quad (15.37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{\sin x J_\mu(x) - \cos x N_\mu(x)\} \\ = \frac{2^{1-\nu}}{\pi^{3/2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \Gamma(\nu + \mu) \Gamma(\nu - \mu) \cos \mu\pi \cos \frac{\nu - \mu}{2} \pi, \end{aligned} \quad (15.38)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{\sin x N_\mu(x) + \cos x J_\mu(x)\} \\ = \frac{2^{1-\nu}}{\pi^{3/2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \Gamma(\nu + \mu) \Gamma(\nu - \mu) \cos \mu\pi \sin \frac{\nu - \mu}{2} \pi, \end{aligned} \quad (15.39)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{\sin x N_\mu(x) - \cos x J_\mu(x)\} \\ = -\frac{2^{1-\nu}}{\pi^{3/2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \Gamma(\nu + \mu) \Gamma(\nu - \mu) \cos \nu\pi \sin \frac{\nu - \mu}{2} \pi. \end{aligned} \quad (15.40)$$

例 15.11 由 (15.32b) 和 (15.33b) 两式, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{e^{-ix} J_\mu(x)\} &= \frac{2^{-\nu}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(-\nu + 1/2) \Gamma(\nu + \mu)}{\Gamma(1 - \nu + \mu)} e^{-i(\nu + \mu)\pi/2} \\ &= \frac{2^{-\nu}}{\pi^{3/2}} \Gamma(-\nu + 1/2) \Gamma(\nu + \mu) \Gamma(\nu - \mu) e^{-i(\nu + \mu)\pi/2} \sin(\nu - \mu)\pi, \end{aligned} \quad (15.41)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{e^{-ix}J_{-\mu}(x)\} &= \frac{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1/2)\Gamma(\nu-\mu)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1-\nu-\mu)}e^{-i(\nu-\mu)\pi/2} \\ &= \frac{2^{-\nu}}{\pi^{3/2}}\Gamma(-\nu+1/2)\Gamma(\nu+\mu)\Gamma(\nu-\mu)e^{-i(\nu-\mu)\pi/2}\sin(\nu+\mu)\pi.\end{aligned}\quad (15.42)$$

再由

$$H_{\mu}^{(1)}(x) = J_{\mu}(x) + i \frac{\cos \mu\pi J_{\mu}(x) - J_{-\mu}(x)}{\sin \mu\pi} = \frac{i}{\sin \mu\pi} [e^{-i\mu\pi}J_{\mu}(x) - J_{-\mu}(x)],$$

所以

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{e^{-ix}H_{\mu}^{(1)}(x)\} &= \frac{i}{\sin \mu\pi} \frac{2^{-\nu}}{\pi^{3/2}}\Gamma(-\nu+1/2)\Gamma(\nu+\mu)\Gamma(\nu-\mu) \\ &\quad \times [e^{-i\mu\pi}e^{-i(\nu+\mu)\pi/2}\sin(\nu-\mu)\pi - e^{-i(\nu-\mu)\pi/2}\sin(\nu+\mu)\pi] \\ &= \frac{i}{\sin \mu\pi} \frac{2^{-\nu}}{\pi^{3/2}}e^{i(\nu-\mu)\pi/2}\Gamma(-\nu+1/2)\Gamma(\nu+\mu)\Gamma(\nu-\mu) \\ &\quad \times [e^{-i(\nu+\mu)\pi}\sin(\nu-\mu)\pi - e^{-i(\nu-\mu)\pi}\sin(\nu+\mu)\pi] \\ &= -\frac{i2^{1-\nu}}{\pi^{3/2}}e^{i(\nu-\mu)\pi/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma(\nu+\mu)\Gamma(\nu-\mu)\cos \mu\pi.\end{aligned}\quad (15.43)$$

例 15.12 更进一步, 根据 Mellin 变换的卷积公式, 由 (15.17) 式还可得到

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left\{\frac{K_{\lambda}(x)}{x^{\lambda}}\frac{K_{\mu}(x)}{x^{\mu}}\right\} &= \frac{2^{\nu-\lambda-\mu-4}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{w}{2}\right)\Gamma\left(-\lambda+\frac{w}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-w}{2}\right)\Gamma\left(-\mu+\frac{\nu-w}{2}\right)dw \\ &= \frac{2^{\nu-\lambda-\mu-3}}{2\pi i} \int_{2\sigma-i\infty}^{2\sigma+i\infty} \Gamma(w)\Gamma(-\lambda+w)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-w\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu-w\right)dw.\end{aligned}$$

计算出上式右端的积分 (见第十四章例 14.22 中的 (14.49b) 式), 即得

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left\{\frac{K_{\lambda}(x)}{x^{\lambda}}\frac{K_{\mu}(x)}{x^{\mu}}\right\} &= \frac{2^{\nu-\lambda-\mu-3}}{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\lambda\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\lambda-\mu\right) \\ &\quad \times \Gamma(1-\nu+\lambda+\mu)\sin(\nu-\lambda-\mu)\pi.\end{aligned}\quad (15.44)$$

由此式还能进一步推出

$$\mathcal{M}\{K_{\lambda}(x)K_{\mu}(x)\} = \frac{2^{\nu-3}}{\Gamma(\nu)}\Gamma\left(\frac{\nu+\lambda+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\lambda+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\lambda-\mu}{2}\right),\quad (15.45)$$

$$\mathcal{M}\{K_{\mu}(x)K_{\mu}(x)\} = \frac{2^{\nu-3}}{\Gamma(\nu)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right)\quad (15.46a)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) \cos \frac{\nu\pi}{2}. \quad (15.46b)$$

在 (15.44) — (15.46) 式中特别可以取 $\nu = 1$, 从而得到积分

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{K_\lambda(x)}{x^\lambda} \frac{K_\mu(x)}{x^\mu} dx \\ &= 2^{-(\lambda+\mu+2)} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(-\lambda+1/2) \Gamma(-\mu+1/2) \Gamma(-\lambda-\mu+1/2)}{\Gamma(1-\lambda-\mu)}, \end{aligned} \quad (15.47)$$

$$\int_0^\infty K_\lambda(x) K_\mu(x) dx = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\cos(\lambda+\mu)\pi/2 \cos(\lambda-\mu)\pi/2}, \quad (15.48)$$

$$\int_0^\infty K_\mu(x) K_\mu(x) dx = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\cos \mu\pi}. \quad (15.49)$$

例 15.13 同样, 由 (15.2a) 和 (15.17) 两式, 又可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ \frac{J_\mu(x)}{x^\mu} \frac{K_\mu(x)}{x^\mu} \right\} &= \frac{2^{\nu-2\mu-3}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{w}{2}\right) \Gamma\left(\frac{w}{2}-\mu\right) \frac{\Gamma((\nu-w)/2)}{\Gamma(1+\mu-(\nu-w)/2)} dw \\ &= \frac{2^{\nu-2\mu-2}}{2\pi i} \int_{2\sigma-i\infty}^{2\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(w) \Gamma(w-\mu) \Gamma((\nu/2)-w)}{\Gamma(1+\mu-(\nu/2)+w)} dw \\ &= 2^{\nu-2\mu-3} \frac{\Gamma(\nu/4) \Gamma(-\mu+\nu/2)}{\Gamma(1+\mu-\nu/4)} \end{aligned} \quad (15.50a)$$

$$= \frac{2^{\nu-2\mu-3}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4}-\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) \sin\left(\frac{\nu}{4}-\mu\right)\pi. \quad (15.50b)$$

在上面的计算中, 用到了上一章的 (14.52) 式.

由 (15.50) 式可以得到

$$\mathcal{M} \{J_\mu(x) K_\mu(x)\} = 2^{\nu-3} \frac{\Gamma((\nu+2\mu)/4) \Gamma(\nu/2)}{\Gamma(1-(\nu-2\mu)/4)} \quad (15.51a)$$

$$= \frac{2^{\nu-3}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4}+\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4}-\frac{\mu}{2}\right) \sin\left(\frac{\nu}{4}-\frac{\mu}{2}\right)\pi \quad (15.51b)$$

以及

$$\mathcal{M} \{x^\mu J_\mu(x) \cdot x^\mu K_\mu(x)\} = 2^{\nu+2\mu-3} \frac{\Gamma(\mu+\nu/4) \Gamma(\mu+\nu/2)}{\Gamma(1-\nu/4)} \quad (15.52a)$$

$$= \frac{2^{\nu+2\mu-3}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4}+\mu\right) \sin \frac{\nu\pi}{4}. \quad (15.52b)$$

由此式出发, 又能导出

$$\begin{aligned}
& \mathscr{M} \{x^\mu N_\mu(x) \cdot x^\mu K_\mu(x)\} \\
&= \frac{\cos \mu\pi}{\sin \mu\pi} \mathscr{M} \{x^\mu J_\mu(x) \cdot x^\mu K_\mu(x)\} - \frac{1}{\sin \mu\pi} \mathscr{M} \{x^\mu J_{-\mu}(x) \cdot x^\mu K_\mu(x)\} \\
&= \frac{\cos \mu\pi}{\sin \mu\pi} \mathscr{M} \{x^\mu J_\mu(x) \cdot x^\mu K_\mu(x)\} - \frac{1}{\sin \mu\pi} \mathscr{M} \{x^\mu J_{-\mu}(x) \cdot x^\mu K_{-\mu}(x)\} \\
&= \frac{\cos \mu\pi}{\sin \mu\pi} \mathscr{M} \{x^\mu J_\mu(x) \cdot x^\mu K_\mu(x)\} - \frac{1}{\sin \mu\pi} \mathscr{M} \left\{ \frac{J_{-\mu}(x)}{x^{-\mu}} \frac{K_{-\mu}(x)}{x^{-\mu}} \right\} \\
&= -\frac{2^{\nu+2\mu-3}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4} + \mu\right) \cos \frac{\nu\pi}{4}. \quad (15.53)
\end{aligned}$$

更进一步, 还能推出

$$\mathscr{M} \{N_\mu(x) K_\mu(x)\} = -\frac{2^{\nu-3}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4} + \frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4} - \frac{\mu}{2}\right) \cos\left(\frac{\nu}{4} - \frac{\mu}{2}\right)\pi. \quad (15.54)$$

$$\mathscr{M} \left\{ \frac{N_\mu(x)}{x^\mu} \frac{K_\mu(x)}{x^\mu} \right\} = -\frac{2^{\nu-2\mu-3}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4} - \mu\right) \cos\left(\frac{\nu}{4} - \mu\right)\pi. \quad (15.55)$$

将 (15.51b) 和 (15.54) 两式组合, 又给出

$$\mathscr{M} \left\{ H_\mu^{(1)}(x) K_\mu(x) \right\} = \frac{2^{\nu-3}}{\pi i} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4} + \frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4} - \frac{\mu}{2}\right) e^{i\nu\pi/4} e^{-i\mu\pi/2}. \quad (15.56)$$

例 15.14 也可将 (15.34) 式作解析延拓,

$$\mathscr{M} \left\{ e^{-x} J_\mu(x e^{i\pi/2}) \right\} = e^{-i\pi\nu/2} \left[\frac{2^{-\nu} \Gamma(\mu + \nu) \Gamma(-\nu + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1 + \mu - \nu)} e^{i(\mu + \nu)\pi/2} \right].$$

利用 (15.18) 式, 就得到 $e^{-x} I_\mu(x)$ 的 Mellin 变换,

$$\mathscr{M} \{e^{-x} I_\mu(x)\} = \frac{2^{-\nu}}{\pi^{3/2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \Gamma(\nu + \mu) \Gamma(\nu - \mu) \sin(\nu - \mu)\pi. \quad (15.57)$$

再对 (15.29) 式作解析延拓,

$$\begin{aligned}
& \mathscr{M} \left\{ J_\mu(x e^{i\pi/2}) H_\mu^{(1)}(x e^{i\pi/2}) \right\} \\
&= e^{-i\pi\nu/2} \left[-\frac{i}{2\pi^{3/2}} e^{i\pi\nu/2} \frac{\Gamma(\mu + \nu/2) \Gamma(\nu/2) \Gamma((1 - \nu)/2)}{\Gamma(1 + \mu - \nu/2)} \right].
\end{aligned}$$

根据 (15.16) 及 (15.18) 两式, 就可以将此结果改记为 $I_\mu(x) K_\mu(x)$ 的 Mellin 变换

$$\mathscr{M} \{I_\mu(x) K_\mu(x)\} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\mu + \nu/2) \Gamma(\nu/2) \Gamma((1 - \nu)/2)}{\Gamma(1 + \mu - \nu/2)} \quad (15.58a)$$

$$= \frac{1}{4\pi^{3/2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \sin\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right)\pi. \quad (15.58b)$$

还可以对 (15.43) 式作解析延拓, 即

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ e^x H_\mu^{(1)}(xe^{i\pi/2}) \right\} \\ = e^{-i\pi\nu/2} \left[-\frac{i \cos \mu\pi}{\pi^{3/2}} 2^{1-\nu} e^{i(\nu-\mu)\pi/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right) \Gamma(\nu+\mu) \Gamma(\nu-\mu) \right]. \end{aligned}$$

利用 (15.16) 式即可化为 $e^x K_\mu(x)$ 的 Mellin 变换

$$\mathcal{M} \{ e^x K_\mu(x) \} = \frac{2^{-\nu}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right) \Gamma(\nu+\mu) \Gamma(\nu-\mu) \cos \mu\pi. \quad (15.59)$$

例 15.15 也可对 (15.56) 式作解析延拓, 得

$$\mathcal{M} \left\{ K_\mu(xe^{i\pi/4}) H_\mu^{(1)}(xe^{i\pi/4}) \right\} = \frac{2^{\nu-3}}{\pi i} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4}+\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4}-\frac{\mu}{2}\right) e^{-i\mu\pi/2}. \quad (15.60)$$

又因为

$$K_\mu(xe^{-i\pi/4}) = \frac{\pi i}{2} e^{i\mu\pi/2} H_\mu^{(1)}(xe^{i\pi/4}),$$

所以

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ K_\mu(xe^{i\pi/4}) K_\mu(xe^{-i\pi/4}) \right\} &= \frac{\pi i}{2} e^{i\mu\pi/2} \mathcal{M} \left\{ K_\mu(xe^{i\pi/4}) H_\mu^{(1)}(xe^{i\pi/4}) \right\} \\ &= 2^{\nu-4} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4}+\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4}-\frac{\mu}{2}\right). \end{aligned} \quad (15.61)$$

再介绍两个涉及柱函数的积分, 它们实际上也是给出了相应的 Mellin 变换.

例 15.16 计算积分 $I = \int_0^\infty \frac{J_\mu(\alpha\sqrt{x^2+z^2})}{(x^2+z^2)^{\mu/2}} x^{2\lambda+1} dx.$

解 令 $x^2+z^2=t^2$, 则原积分化为

$$I = \int_z^\infty \frac{J_\mu(\alpha t)}{t^\mu} (t^2-z^2)^\lambda t dt = z^{2\lambda+2-\mu} \int_1^\infty x^{1-\mu} J_\mu(\alpha z x) (x^2-1)^\lambda dx.$$

在表 14.2 中可以查得

$$\mathcal{M} \left\{ (x^2-1)^\lambda \eta(x-1) \right\} = \frac{1}{2\pi} \Gamma(\lambda+1) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\nu}{2}-\lambda\right) \sin \frac{\nu\pi}{2}.$$

另一方面, 由 (15.1c) 式, 结合 Mellin 变换的基本性质 (见表 14.1), 又能求得

$$\mathcal{M} \left\{ x^{1-\mu} J_\mu(\alpha z x) \right\} = (\alpha z)^{\mu-\nu-1} \frac{2^{\nu-\mu}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\mu\right) \sin\left(\frac{\nu+1}{2}-\mu\right) \pi.$$

所以有

$$I = \frac{z^{2\lambda+2-\mu}}{2\pi i} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(-\frac{1-\nu}{2}-\lambda\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \sin \frac{1-\nu}{2} \pi$$

$$\begin{aligned}
& \times (\alpha z)^{\mu-\nu-1} \frac{2^{\nu-\mu}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\mu\right) \sin\left(\frac{\nu+1}{2}-\mu\right) \pi d\nu \\
& = \Gamma(\lambda+1) \frac{z^{2\lambda+2-\mu}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2^{\nu-\mu-1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}-\lambda\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\mu\right) \\
& \quad \times \sin\left(\frac{\nu+1}{2}-\mu\right) \pi \frac{d\nu}{(\alpha z)^{\nu+1-\mu}}.
\end{aligned}$$

作代换 $\nu' = \nu+1-\mu$, 即得

$$\begin{aligned}
I &= \Gamma(\lambda+1) \frac{z^{2\lambda+2-\mu}}{2\pi i} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \frac{2^{\nu'-2}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu'+\mu}{2}-\lambda-1\right) \Gamma\left(\frac{\nu'-\mu}{2}\right) \sin \frac{\nu'-\mu}{2} \pi \frac{d\nu'}{(\alpha z)^{\nu'}} \\
&= 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) z^{2\lambda+2-\mu} (\alpha z)^{-\lambda-1} J_{\mu-\lambda-1}(\alpha z). \quad (15.62)
\end{aligned}$$

可以将这个积分看成函数 $\frac{J_\mu(\alpha\sqrt{x^2+z^2})}{(x^2+z^2)^{\mu/2}}$ 的 Mellin 变换:

$$\mathcal{M}\left\{\frac{J_\mu(\alpha\sqrt{x^2+z^2})}{(x^2+z^2)^{\mu/2}}\right\} = \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \frac{z^{-\mu}}{2} \left(\frac{2z}{\alpha}\right)^{\nu/2} J_{\mu-\nu/2}(\alpha z). \quad (15.63)$$

例 15.17 计算积分 $I = \int_0^\infty \frac{K_\mu(\alpha\sqrt{x^2+z^2})}{(x^2+z^2)^{\mu/2}} x^{2\lambda+1} dx$.

解 完全类似于例 15.16, 可将原积分化为

$$\begin{aligned}
I &= z^{2\mu+2-\lambda} \int_1^\infty x^{1-\mu} K_\mu(\alpha z x) (x^2-1)^\lambda dx \\
&= \frac{z^{2\lambda+2-\mu}}{2\pi i} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(-\frac{1-\nu}{2}-\lambda\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \sin \frac{1-\nu}{2} \pi \\
& \quad \times (\alpha z)^{\mu-\nu-1} 2^{\nu-\mu-1} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\mu\right) d\nu \\
&= \Gamma(\lambda+1) \frac{z^{2\lambda+2-\mu}}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu-\mu-2} \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}-\lambda\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\mu\right) \frac{d\nu}{(\alpha z)^{\nu+1-\mu}}.
\end{aligned}$$

作代换 $\nu' = \nu+1-\mu$, 即得

$$\begin{aligned}
I &= \Gamma(\lambda+1) \frac{z^{2\lambda+2-\mu}}{2\pi i} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} 2^{\nu'-3} \Gamma\left(\frac{\nu'+\mu}{2}-\lambda-1\right) \Gamma\left(\frac{\nu'-\mu}{2}\right) \frac{d\nu'}{(\alpha z)^{\nu'}} \\
&= 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) z^{2\lambda+2-\mu} (\alpha z)^{-\lambda-1} K_{\mu-\lambda-1}(\alpha z). \quad (15.64)
\end{aligned}$$

在以上计算中用到了

$$\mathcal{M}\{x^{1-\mu} K_\mu(\alpha z x)\} = (\alpha z)^{\mu-\nu-1} 2^{\nu-\mu-1} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\mu\right).$$

同样可以将 (15.64) 式看成是函数 $\frac{K_\mu(\alpha\sqrt{x^2+z^2})}{(x^2+z^2)^{\mu/2}}$ 的 Mellin 变换:

$$\mathcal{M}\left\{\frac{K_\mu(\alpha\sqrt{x^2+z^2})}{(x^2+z^2)^{\mu/2}}\right\} = \frac{z^{-\mu}}{2} \left(\frac{2z}{\alpha}\right)^{\nu/2} K_{\mu-\nu/2}(\alpha z). \quad (15.65)$$

再计算一个同时含有 Legendre 多项式及 Bessel 函数的积分.

例 15.18 计算积分 $\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^n} P_{n-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) J_0(ax) dx$.

解 利用 (15.3a) 式以及上一章的 (14.28) 式, 再结合表 14.1 中给出的 Mellin 变换基本性质, 即可写出

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{x J_0(ax)\} &= 2^\nu a^{-\nu-1} \frac{\Gamma((1+\nu)/2)}{\Gamma((1-\nu)/2)}, \\ \mathcal{M}\left\{\frac{1}{(1+x^2)^n} P_{n-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right\} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\Gamma(n-\nu/2)}{\Gamma(n)}\right]^2 \frac{\Gamma(\nu/2)}{\Gamma(1-\nu/2)}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^n} P_{n-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) J_0(ax) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{\Gamma(n)}\right]^2 \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu-1} a^{-\nu-1} \Gamma\left(n-\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(n-\frac{1-\nu}{2}\right) d\nu. \end{aligned}$$

作变换 $\nu+2n-1=\nu'$, 就能得到

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^n} P_{n-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) J_0(ax) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{\Gamma(n)}\right]^2 \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} 2^{\nu'-n} a^{2n-2} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}\right) \frac{d\nu'}{a^{\nu'}} \\ &= \left[\frac{1}{\Gamma(n)}\right]^2 \left(\frac{a}{2}\right)^{2n-2} K_0(a). \end{aligned} \quad (15.66)$$

§15.3 导致柱函数的初等函数 Mellin 变换

例 15.19 求 $\mathcal{M}\{e^{-b^2x}e^{-a^2/x}\}$.

解 由表 14.2 可以检得 $\mathcal{M}\{e^{-b^2x}\} = b^{-2\nu} \Gamma(\nu)$, 所以, 根据 (14.34) 式, 有

$$\mathcal{M}\{e^{-b^2x}e^{-a^2/x}\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} a^{-2\mu} \Gamma(\mu) \cdot b^{-2\mu-2\nu} \Gamma(\mu+\nu) d\mu.$$

作变换 $2\mu = \mu' - \nu$, 即可得到

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left\{e^{-b^2x}e^{-a^2/x}\right\} &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{a}{b}\right)^\nu \frac{1}{2} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\mu'-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu'+\nu}{2}\right) \frac{d\mu'}{(ab)^{\mu'}} \\ &= 2\left(\frac{a}{b}\right)^\nu K_\nu(2ab).\end{aligned}\quad (15.67)$$

例 15.20 求 $\mathcal{M}\left\{e^{ib^2x}e^{\pm ia^2/x}\right\}$.

解 因为 $\mathcal{M}\left\{e^{\pm ib^2x}\right\} = b^{-2\nu} \Gamma(\nu) e^{\pm i\nu\pi/2}$, 所以仿照例 15.19 的做法, 就能求得

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left\{e^{ib^2x}e^{ia^2/x}\right\} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} a^{-2\mu} \Gamma(\mu) e^{i\mu\pi/2} \cdot b^{-2\mu-2\nu} \Gamma(\mu+\nu) e^{i(\mu+\nu)\pi/2} d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{a}{b}\right)^\nu \frac{1}{2} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\mu'-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu'+\nu}{2}\right) e^{i\mu'\pi/2} \frac{d\mu'}{(ab)^{\mu'}} \\ &= \pi i \left(\frac{a}{b}\right)^\nu e^{i\nu\pi/2} H_\nu^{(1)}(2ab),\end{aligned}\quad (15.68)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left\{e^{ib^2x}e^{-ia^2/x}\right\} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} a^{-2\mu} \Gamma(\mu) e^{i\mu\pi/2} \cdot b^{-2\mu-2\nu} \Gamma(\mu+\nu) e^{-i(\mu+\nu)\pi/2} d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{a}{b}\right)^\nu \frac{1}{2} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\mu'-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu'+\nu}{2}\right) e^{-i\mu'\pi/2} \frac{d\mu'}{(ab)^{\mu'}} \\ &= 2\left(\frac{a}{b}\right)^\nu e^{-i\nu\pi/2} K_\nu(2ab).\end{aligned}\quad (15.69)$$

例 15.21 在作 Mellin 变换时, 当然可以先将 ν 看成实变量, 计算出积分后再作解析延拓. 按照这一做法, 我们就能根据例 15.20 的结果导出

$$\mathcal{M}\left\{\sin\left(\frac{a^2}{x} + b^2x\right)\right\} = \pi \left(\frac{a}{b}\right)^\nu \left[J_\nu(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{2} - N_\nu(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{2}\right], \quad (15.70)$$

$$\mathcal{M}\left\{\sin\left(\frac{a^2}{x} - b^2x\right)\right\} = -2\left(\frac{a}{b}\right)^\nu K_\nu(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{2}, \quad (15.71)$$

$$\mathcal{M}\left\{\cos\left(\frac{a^2}{x} + b^2x\right)\right\} = -\pi \left(\frac{a}{b}\right)^\nu \left[J_\nu(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{2} + N_\nu(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{2}\right], \quad (15.72)$$

$$\mathcal{M}\left\{\cos\left(\frac{a^2}{x} - b^2x\right)\right\} = 2\left(\frac{a}{b}\right)^\nu K_\nu(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{2}. \quad (15.73)$$


由此还可以进一步得到

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left\{\sin \frac{a^2}{x} \sin b^2x\right\} &= \left(\frac{a}{b}\right)^\nu \left\{K_\nu(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \left[J_\nu(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{2} + N_\nu(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{2}\right]\right\},\end{aligned}\quad (15.74)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ \sin \frac{a^2}{x} \cos b^2 x \right\} \\ = \left(\frac{a}{b} \right)^\nu \left\{ K_\nu(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \left[J_\nu(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{2} - N_\nu(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (15.75)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ \cos \frac{a^2}{x} \sin b^2 x \right\} \\ = \left(\frac{a}{b} \right)^\nu \left\{ -K_\nu(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \left[J_\nu(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{2} - N_\nu(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (15.76)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ \cos \frac{a^2}{x} \cos b^2 x \right\} \\ = \left(\frac{a}{b} \right)^\nu \left\{ K_\nu(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \left[J_\nu(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{2} + N_\nu(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (15.77)$$

 **讨论** 在 (15.70) (15.77) 式中代入一些特殊的 ν 值, 还可以得到一些有意思的积分. 例如, 令 $\nu = 1$, 就能得到

$$\int_0^\infty \sin \left(\frac{a^2}{x} + b^2 x \right) dx = -\pi \left(\frac{a}{b} \right) N_1(2ab), \quad (15.78)$$

$$\int_0^\infty \sin \left(\frac{a^2}{x} - b^2 x \right) dx = -2 \left(\frac{a}{b} \right) K_1(2ab), \quad (15.79)$$

$$\int_0^\infty \cos \left(\frac{a^2}{x} + b^2 x \right) dx = -\pi \left(\frac{a}{b} \right) J_1(2ab), \quad (15.80)$$

$$\int_0^\infty \cos \left(\frac{a^2}{x} - b^2 x \right) dx = 0; \quad (15.81)$$

$$\int_0^\infty \sin \frac{a^2}{x} \sin b^2 x dx = \frac{\pi a}{2b} J_1(2ab), \quad (15.82)$$

$$\int_0^\infty \cos \frac{a^2}{x} \cos b^2 x dx = -\frac{\pi a}{2b} J_1(2ab), \quad (15.83)$$

$$\int_0^\infty \sin \frac{a^2}{x} \cos b^2 x dx = -\frac{a}{b} \left[K_1(2ab) + \frac{\pi}{2} N_1(2ab) \right], \quad (15.84)$$

$$\int_0^\infty \cos \frac{a^2}{x} \sin b^2 x dx = \frac{a}{b} \left[K_1(2ab) - \frac{\pi}{2} N_1(2ab) \right]. \quad (15.85)$$

或者令 $\nu = 0$, 则有

$$\int_0^\infty \sin \left(\frac{a^2}{x} + b^2 x \right) \frac{dx}{x} = \pi J_0(2ab), \quad (15.86)$$

$$\int_0^\infty \sin \left(\frac{a^2}{x} - b^2 x \right) \frac{dx}{x} = 0, \quad (15.87)$$

$$\int_0^\infty \cos \left(\frac{a^2}{x} + b^2 x \right) \frac{dx}{x} = -\pi N_0(2ab), \quad (15.88)$$

$$\int_0^\infty \cos \left(\frac{a^2}{x} - b^2 x \right) \frac{dx}{x} = 2K_0(2ab); \quad (15.89)$$

$$\int_0^\infty \sin \frac{a^2}{x} \sin b^2 x \frac{dx}{x} = K_0(2ab) + \frac{\pi}{2} N_0(2ab), \quad (15.90)$$

$$\int_0^\infty \sin \frac{a^2}{x} \cos b^2 x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} J_0(2ab), \quad (15.91)$$

$$\int_0^\infty \cos \frac{a^2}{x} \sin b^2 x \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} J_0(2ab), \quad (15.92)$$

$$\int_0^\infty \cos \frac{a^2}{x} \cos b^2 x \frac{dx}{x} = K_0(2ab) - \frac{\pi}{2} N_0(2ab). \quad (15.93)$$

例 15.22 从 (15.70) — (15.73) 式出发, 应用 Mellin 变换的基本性质 (见表 14.1), 又可导出

$$\mathcal{M} \left\{ \sin \left(\frac{a^2}{x^\alpha} + b^2 x^\alpha \right) \right\} = \frac{\pi}{\alpha} \left(\frac{a}{b} \right)^{\nu/\alpha} \left[J_{\nu/\alpha}(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{2\alpha} - N_{\nu/\alpha}(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{2\alpha} \right], \quad (15.94)$$

$$\mathcal{M} \left\{ \sin \left(\frac{a^2}{x^\alpha} - b^2 x^\alpha \right) \right\} = -\frac{2}{\alpha} \left(\frac{a}{b} \right)^{\nu/\alpha} K_{\nu/\alpha}(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{2\alpha}, \quad (15.95)$$

$$\mathcal{M} \left\{ \cos \left(\frac{a^2}{x^\alpha} + b^2 x^\alpha \right) \right\} = -\frac{\pi}{\alpha} \left(\frac{a}{b} \right)^{\nu/\alpha} \left[J_{\nu/\alpha}(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{2\alpha} + N_{\nu/\alpha}(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{2\alpha} \right], \quad (15.96)$$

$$\mathcal{M} \left\{ \cos \left(\frac{a^2}{x^\alpha} - b^2 x^\alpha \right) \right\} = \frac{2}{\alpha} \left(\frac{a}{b} \right)^{\nu/\alpha} K_{\nu/\alpha}(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{2\alpha}. \quad (15.97)$$

同样, 由 (15.74) — (15.77) 式也可得到

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ \sin \frac{a^2}{x^\alpha} \sin b^2 x^\alpha \right\} &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{a}{b} \right)^{\nu/\alpha} \left\{ K_{\nu/\alpha}(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{2\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{2} \left[J_{\nu/\alpha}(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{2\alpha} + N_{\nu/\alpha}(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{2\alpha} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (15.98)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ \sin \frac{a^2}{x^\alpha} \cos b^2 x^\alpha \right\} &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{a}{b} \right)^{\nu/\alpha} \left\{ K_{\nu/\alpha}(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{2\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{2} \left[J_{\nu/\alpha}(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{2\alpha} - N_{\nu/\alpha}(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{2\alpha} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (15.99)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ \cos \frac{a^2}{x^\alpha} \sin b^2 x^\alpha \right\} &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{a}{b} \right)^{\nu/\alpha} \left\{ -K_{\nu/\alpha}(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{2\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{2} \left[J_{\nu/\alpha}(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{2\alpha} - N_{\nu/\alpha}(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{2\alpha} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (15.100)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ \cos \frac{a^2}{x^\alpha} \cos b^2 x^\alpha \right\} &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{a}{b} \right)^{\nu/\alpha} \left\{ K_{\nu/\alpha}(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{2\alpha} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{2} \left[J_{\nu/\alpha}(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{2\alpha} + N_{\nu/\alpha}(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{2\alpha} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (15.101)$$

这些结果也可由 (15.94) — (15.97) 式相加、减而得。

在 (15.94) (15.101) 式中还可以代入特殊的 α 值. 例如, 令 $\alpha = 2$, 就得到

$$\mathcal{M} \left\{ \sin \left(\frac{a^2}{x^2} + b^2 x^2 \right) \right\} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^{\nu/2} \left[J_{\nu/2}(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{4} - N_{\nu/2}(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{4} \right], \quad (15.102)$$

$$\mathcal{M} \left\{ \sin \left(\frac{a^2}{x^2} - b^2 x^2 \right) \right\} = - \left(\frac{a}{b} \right)^{\nu/2} K_{\nu/2}(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{4}, \quad (15.103)$$

$$\mathcal{M} \left\{ \cos \left(\frac{a^2}{x^2} + b^2 x^2 \right) \right\} = - \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^{\nu/2} \left[J_{\nu/2}(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{4} + N_{\nu/2}(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{4} \right]. \quad (15.104)$$

$$\mathcal{M} \left\{ \cos \left(\frac{a^2}{x^2} - b^2 x^2 \right) \right\} = \left(\frac{a}{b} \right)^{\nu/2} K_{\nu/2}(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{4}; \quad (15.105)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ \sin \frac{a^2}{x^2} \sin b^2 x^2 \right\} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^{\nu/2} \left\{ K_{\nu/2}(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{2} \left[J_{\nu/2}(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{4} + N_{\nu/2}(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{4} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (15.106)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ \sin \frac{a^2}{x^2} \cos b^2 x^2 \right\} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^{\nu/2} \left\{ K_{\nu/2}(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{2} \left[J_{\nu/2}(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{4} - N_{\nu/2}(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{4} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (15.107)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ \cos \frac{a^2}{x^2} \sin b^2 x^2 \right\} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^{\nu/2} \left\{ -K_{\nu/2}(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{2} \left[J_{\nu/2}(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{4} - N_{\nu/2}(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{4} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (15.108)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ \cos \frac{a^2}{x^2} \cos b^2 x^2 \right\} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} \right)^{\nu/2} \left\{ K_{\nu/2}(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{2} \left[J_{\nu/2}(2ab) \sin \frac{\nu\pi}{4} + N_{\nu/2}(2ab) \cos \frac{\nu\pi}{4} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (15.109)$$

 讨论 在 (15.102) — (15.109) 式中代入 $\nu = 0$, 就能得到

$$\int_0^\infty \sin \left(\frac{a^2}{x^2} + b^2 x^2 \right) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2} J_0(2ab), \quad (15.110)$$

$$\int_0^\infty \sin \left(\frac{a^2}{x^2} - b^2 x^2 \right) \frac{dx}{x} = 0, \quad (15.111)$$

$$\int_0^\infty \cos \left(\frac{a^2}{x^2} + b^2 x^2 \right) \frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2} N_0(2ab), \quad (15.112)$$

$$\int_0^\infty \cos \left(\frac{a^2}{x^2} - b^2 x^2 \right) \frac{dx}{x} = K_0(2ab); \quad (15.113)$$

$$\int_0^\infty \sin \frac{a^2}{x^2} \sin b^2 x^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} K_0(2ab) + \frac{\pi}{4} N_0(2ab), \quad (15.114)$$

$$\int_0^\infty \sin \frac{a^2}{x^2} \cos b^2 x^2 \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4} J_0(2ab), \quad (15.115)$$

$$\int_0^\infty \cos \frac{a^2}{x^2} \sin b^2 x^2 \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4} J_0(2ab), \quad (15.116)$$

$$\int_0^\infty \cos \frac{a^2}{x^2} \cos b^2 x^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} K_0(2ab) - \frac{\pi}{4} N_0(2ab). \quad (15.117)$$

例 15.23 在 (15.102) – (15.109) 式中代入 $\nu = 1$, 得到的结果中将出现 $\pm 1/2$ 阶柱函数及虚宗量柱函数, 且均为初等函数:

$$\int_0^\infty \sin \left(a^2 x^2 + \frac{b^2}{x^2} \right) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4a} (\cos 2ab + \sin 2ab), \quad (15.118)$$

$$\int_0^\infty \cos \left(a^2 x^2 + \frac{b^2}{x^2} \right) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4a} (\cos 2ab - \sin 2ab), \quad (15.119)$$

$$\int_0^\infty \sin \left(a^2 x^2 - \frac{b^2}{x^2} \right) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4a} e^{-2ab}, \quad (15.120)$$

$$\int_0^\infty \cos \left(a^2 x^2 - \frac{b^2}{x^2} \right) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4a} e^{-2ab}, \quad (15.121)$$

$$\int_0^\infty \sin \frac{a^2}{x^2} \sin b^2 x^2 dx = \frac{1}{4b} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\sin 2ab - \cos 2ab + e^{-2ab}), \quad (15.122)$$

$$\int_0^\infty \sin \frac{a^2}{x^2} \cos b^2 x^2 dx = \frac{1}{4b} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\sin 2ab + \cos 2ab - e^{-2ab}), \quad (15.123)$$

$$\int_0^\infty \cos \frac{a^2}{x^2} \sin b^2 x^2 dx = \frac{1}{4b} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\sin 2ab + \cos 2ab + e^{-2ab}), \quad (15.124)$$

$$\int_0^\infty \cos \frac{a^2}{x^2} \cos b^2 x^2 dx = \frac{1}{4b} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\cos 2ab - \sin 2ab + e^{-2ab}). \quad (15.125)$$

将 (15.122) – (15.125) 式加以组合, 又可以给出一些新的积分公式:

$$\int_0^\infty \sin \left(a^2 x^2 - 2ab + \frac{b^2}{x^2} \right) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4a}, \quad (15.126)$$

$$\int_0^\infty \cos \left(a^2 x^2 - 2ab + \frac{b^2}{x^2} \right) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4a}, \quad (15.127)$$

$$\int_0^\infty \sin \left(a^2 x^2 + 2ab + \frac{b^2}{x^2} \right) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4a} [\cos 4ab + \sin 4ab], \quad (15.128)$$

$$\int_0^\infty \cos \left(a^2 x^2 + 2ab + \frac{b^2}{x^2} \right) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4a} [\cos 4ab - \sin 4ab]. \quad (15.129)$$

例 15.24 将例 15.23 中的结果作变量变换 $x = 1/t$, 同时将 a 和 b 对换, 或者

在 (15.94) — (15.101) 诸式中代入 $\nu = -1$, 就得到下列诸式:

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{a^2}{x^2} + b^2 x^2\right) \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\sin 2ab + \cos 2ab), \quad (15.130)$$

$$\int_0^\infty \cos\left(\frac{a^2}{x^2} + b^2 x^2\right) \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\cos 2ab - \sin 2ab), \quad (15.131)$$

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{a^2}{x^2} - b^2 x^2\right) \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-2ab}, \quad (15.132)$$

$$\int_0^\infty \cos\left(\frac{a^2}{x^2} - b^2 x^2\right) \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-2ab}, \quad (15.133)$$

$$\int_0^\infty \sin \frac{a^2}{x^2} \sin b^2 x^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\sin 2ab - \cos 2ab + e^{-2ab}), \quad (15.134)$$

$$\int_0^\infty \cos \frac{a^2}{x^2} \cos b^2 x^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\cos 2ab - \sin 2ab + e^{-2ab}), \quad (15.135)$$

$$\int_0^\infty \sin \frac{a^2}{x^2} \cos b^2 x^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\sin 2ab + \cos 2ab - e^{-2ab}), \quad (15.136)$$

$$\int_0^\infty \cos \frac{a^2}{x^2} \sin b^2 x^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\sin 2ab + \cos 2ab + e^{-2ab}), \quad (15.137)$$

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{a^2}{x^2} - 2ab + b^2 x^2\right) \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (15.138)$$

$$\int_0^\infty \cos\left(\frac{a^2}{x^2} - 2ab + b^2 x^2\right) \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (15.139)$$

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{a^2}{x^2} + 2ab + b^2 x^2\right) \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\sin 4ab + \cos 4ab), \quad (15.140)$$

$$\int_0^\infty \cos\left(\frac{a^2}{x^2} + 2ab + b^2 x^2\right) \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\cos 4ab - \sin 4ab). \quad (15.141)$$

§15.4 导致柱函数的初等函数积分

Mellin 变换, 原则上当然就是定积分计算. 但也不排除有这样的情况, 对于给定的函数 $f(x)$, 其 Mellin 变换

$$F(\nu) = \int_0^\infty f(x) x^{\nu-1} dx$$

不易求出, 但对于取某些特定的 ν 值, 上述积分却可以简单地计算出. 例如, 我们可以重复上一章中例 14.18 例 14.20 的做法, 来计算两个函数乘积的积分.

例 15.25 计算积分

$$\int_0^1 [x(1-x)]^{\mu-1/2} \sin 2\alpha x \, dx \quad \text{和} \quad \int_0^1 [x(1-x)]^{\mu-1/2} \cos 2\alpha x \, dx.$$

解 已知 $\sin 2\alpha x$ 和 $\cos 2\alpha x$ 的 Mellin 变换 (见表 14.2) 为

$$\mathcal{M}\{\sin 2\alpha x\} = \frac{\Gamma(\nu)}{(2\alpha)^\nu} \sin \frac{\nu\pi}{2}, \quad \mathcal{M}\{\cos 2\alpha x\} = \frac{\Gamma(\nu)}{(2\alpha)^\nu} \cos \frac{\nu\pi}{2},$$

直接计算又可以求得

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left\{[x(1-x)]^{\mu-1/2} \eta(1-x)\right\} &= \int_0^1 x^{\nu+\mu-3/2} (1-t)^{\mu-1/2} dx \\ &= \frac{\Gamma(\nu+\mu-1/2) \Gamma(\mu+1/2)}{\Gamma(\nu+2\mu)}, \end{aligned}$$

所以, 根据 (14.37) 式就能得到

$$\begin{aligned} \int_0^1 [x(1-x)]^{\mu-1/2} \sin 2\alpha x dx &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(-\nu+\mu+1/2) \Gamma(\mu+1/2)}{\Gamma(1-\nu+2\mu)} \Gamma(\nu) \sin \frac{\nu\pi}{2} \frac{d\nu}{(2\alpha)^\nu}, \\ \int_0^1 [x(1-x)]^{\mu-1/2} \cos 2\alpha x dx &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(-\nu+\mu+1/2) \Gamma(\mu+1/2)}{\Gamma(1-\nu+2\mu)} \Gamma(\nu) \cos \frac{\nu\pi}{2} \frac{d\nu}{(2\alpha)^\nu}. \end{aligned}$$

作变量变换 $\nu = \nu' + \mu$, 并对照公式 (15.32b) 及 (15.33b), 就计算得积分

$$\begin{aligned} \int_0^1 [x(1-x)]^{\mu-1/2} \sin 2\alpha x dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(\mu+1/2)}{(2\alpha)^\mu} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{-\nu'} \frac{\Gamma(-\nu'+1/2) \Gamma(\nu'+\mu)}{\Gamma(1-\nu'+\mu)} \sin \frac{\nu'+\mu}{2} \pi \frac{d\nu'}{(2\alpha)^{\nu'}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{(2\alpha)^\mu} \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) J_\mu(\alpha) \sin \alpha, \end{aligned} \quad (15.142)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 [x(1-x)]^{\mu-1/2} \cos 2\alpha x dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(\mu+1/2)}{(2\alpha)^\mu} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{-\nu'} \frac{\Gamma(-\nu'+1/2) \Gamma(\nu'+\mu)}{\Gamma(1-\nu'+\mu)} \cos \frac{\nu'+\mu}{2} \pi \frac{d\nu'}{(2\alpha)^{\nu'}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{(2\alpha)^\mu} \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) J_\mu(\alpha) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (15.143)$$

例 15.26 计算积分 $\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2 + \alpha^2)^{\mu+1}} dx$, 其中 $\alpha > 0, \mu > -1$.

解 由表 14.2 可以检得 $\mathcal{M}\{\cos x\}$, 同时, 由

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{(1+x)^{\mu+1}}\right\} = \frac{\Gamma(\nu) \Gamma(\mu-\nu+1)}{\Gamma(\mu+1)}, \quad 0 < \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re}(\mu+1),$$

结合 Mellin 变换的基本性质 (见表 14.1), 能够写出

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{(x^2+\alpha^2)^{\mu+1}}\right\}=\frac{\alpha^{\nu-2\mu-2}}{2\Gamma(\mu+1)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\mu+1-\frac{\nu}{2}\right), \quad (15.144)$$

所以, 根据 (14.37) 式, 有

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+\alpha^2)^{\mu+1}} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu-1} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu/2)}{\Gamma((1-\nu)/2)} \frac{\alpha^{-\nu-2\mu-1}}{2\Gamma(\mu+1)} \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\mu+1-\frac{1-\nu}{2}\right) d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{\pi}\alpha^{-2\mu-1}}{\Gamma(\mu+1)} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu-2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu+\frac{1}{2}\right) \frac{d\nu}{\alpha^\nu}. \end{aligned}$$

和 (15.20) 式相比较, 即得

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+\alpha^2)^{\mu+1}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\mu+1)} (2\alpha)^{-\mu-1/2} K_{\mu+1/2}(\alpha). \quad (15.145)$$

作为它的特殊情形: $\mu = \mp 1/2$, 有

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+\alpha^2)^{1/2}} dx = K_0(\alpha), \quad (15.146)$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+\alpha^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{\alpha} K_1(\alpha). \quad (15.147)$$

类似地, 由

$$\mathcal{M}\{x \sin x\} = \Gamma(\nu+1) \sin \frac{\nu+1}{2} \pi = 2^\nu \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1+\nu/2)}{\Gamma((1-\nu)/2)},$$

还能得到

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x \sin x}{(x^2+\alpha^2)^{\mu+1}} dx &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^\nu \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1+\nu/2)}{\Gamma((1-\nu)/2)} \\ &\quad \times \frac{1}{2} \alpha^{-\nu-2\mu-1} \frac{\Gamma((1-\nu)/2) \Gamma(\mu+1-(1-\nu)/2)}{\Gamma(\mu+1)} d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{\pi}\alpha^{-2\mu-1}}{\Gamma(\mu+1)} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu-1} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu+\frac{1}{2}\right) \frac{d\nu}{\alpha^\nu}. \end{aligned}$$

令 $\nu' = \nu + 2$, 就计算得

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x \sin x}{(x^2+\alpha^2)^{\mu+1}} dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{\pi}\alpha^{-2\mu+1}}{\Gamma(\mu+1)} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} 2^{\nu'-3} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}+\mu-\frac{1}{2}\right) \frac{d\nu'}{\alpha^{\nu'}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\mu+1)} 2^{-\mu-1/2} \alpha^{-\mu+1/2} K_{\mu-1/2}(\alpha). \end{aligned} \quad (15.148)$$

作为它的特例: $\mu = 1/2$, 也有

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{(x^2 + \alpha^2)^{3/2}} dx = K_0(\alpha). \quad (15.149)$$

例 15.27 计算积分 $\int_1^\infty e^{-\alpha x} (x^2 - 1)^{\mu-1/2} dx$, 其中 $\operatorname{Re} \mu > -1/2$.

解 考虑到

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ (x^2 - 1)^{\mu-1/2} \eta(x-1) \right\} &= \int_1^\infty (x^2 - 1)^{\mu-1/2} x^{\nu-1} dx \quad (\text{作变换 } x = 1/t) \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^{-\mu-1/2} t^{-2\mu-\nu} d\nu \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\mu+1/2) \Gamma(-\mu+(1-\nu)/2)}{\Gamma(1-\nu/2)}. \end{aligned}$$

同时, 由表 14.2 可知 $\mathcal{M}\{e^{\alpha x}\} = \alpha^{-\nu} \Gamma(\nu)$, 因此可得

$$\begin{aligned} \int_1^\infty e^{-\alpha x} (x^2 - 1)^{\mu-1/2} dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(\mu+1/2)}{2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(-\mu+\nu/2) \Gamma(\nu)}{\Gamma((1+\nu)/2)} \frac{d\nu}{\alpha^\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(\mu+1/2)}{\sqrt{\pi}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu-2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \frac{d\nu}{\alpha^\nu} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1/2)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^\mu K_\mu(\alpha). \end{aligned} \quad (15.150)$$

以上计算原则上只适用于 $\operatorname{Re} \mu < 0$. 在 $\operatorname{Re} \mu \geq 0$ 的条件下, $\mathcal{M}\{(x^2 - 1)^{\mu-1/2}\}$ 并不存在, 但不妨采用公式 (14.39), 其中

$$\begin{aligned} u(x) &= x^{2\mu} e^{-\alpha x}, & U(\nu) &= \alpha^{-\nu-2\mu} \Gamma(\nu+2\mu), \\ v(x) &= (1-x^2)^{\mu-1/2} \eta(1-x), & V(\nu) &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\mu+1/2) \Gamma(\nu/2)}{\Gamma(\mu+(\nu+1)/2)}. \end{aligned}$$

容易看出

$$v(1/x) = x^{1-2\mu} (x^2 - 1)^{\mu-1/2} \eta(x-1),$$

因此也能得到

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u(x) v\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x} &= \int_1^\infty e^{-\alpha x} (x^2 - 1)^{\mu-1/2} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(\mu+1/2)}{2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \alpha^{-\nu-2\mu} \Gamma(\nu+2\mu) \frac{\Gamma(\nu/2)}{\Gamma(\mu+(\nu+1)/2)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(\mu+1/2)}{\sqrt{\pi}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu+2\mu-2} \alpha^{-\nu-2\mu} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \mu\right) d\nu \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1/2)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^\mu K_\mu(\alpha). \end{aligned}$$

例 15.28 计算积分 $\int_1^\infty \frac{\sin \alpha x}{(x^2-1)^{\mu+1/2}} dx$ 和 $\int_1^\infty \frac{\cos \alpha x}{(x^2-1)^{\mu+1/2}} dx$.

解 $\mathcal{M}\{(x^2-1)^{\mu-1/2}\}$ 可由例 15.27 得到 (需将该处的 μ 换为 $-\mu$), 同时由表 14.2 可以检得 $\sin \alpha x$ 和 $\cos \alpha x$ 的 Mellin 变换, 因此, 根据 (14.37) 式, 有

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\sin \alpha x}{(x^2-1)^{\mu+1/2}} dx &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \frac{\Gamma(-\mu+1/2) \Gamma(\mu+\nu/2)}{2 \Gamma((1+\nu)/2)} \sin \frac{\nu\pi}{2} \frac{d\nu}{a^\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2^{\nu-2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(-\mu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right) \sin \frac{\nu\pi}{2} \frac{d\nu}{a^\nu}, \end{aligned}$$

对照 (15.3a) 式, 就求得

$$\int_1^\infty \frac{\sin \alpha x}{(x^2-1)^{\mu+1/2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\mu+1}} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right) a^\mu J_\mu(a). \quad (15.151)$$

类似地, 还可得到

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\cos \alpha x}{(x^2-1)^{\mu+1/2}} dx &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \frac{\Gamma(-\mu+1/2) \Gamma(\mu+\nu/2)}{2 \Gamma((1+\nu)/2)} \cos \frac{\nu\pi}{2} \frac{d\nu}{a^\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2^{\nu-2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(-\mu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right) \cos \frac{\nu\pi}{2} \frac{d\nu}{a^\nu} \\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\mu+1}} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right) a^\mu N_\mu(a). \end{aligned} \quad (15.152)$$

这里需要用到 (15.10a) 式的结果.

将 (15.151) 及 (15.152) 两式组合起来, 又可得到

$$\int_1^\infty \frac{e^{i\alpha x}}{(x^2-1)^{\mu+1/2}} dx = \frac{i\sqrt{\pi}}{2^{\mu+1}} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right) a^\mu H_\mu^{(1)}(a), \quad (15.153)$$

$$\int_1^\infty \frac{e^{-i\alpha x}}{(x^2-1)^{\mu+1/2}} dx = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2^{\mu+1}} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right) a^\mu H_\mu^{(2)}(a). \quad (15.154)$$

例 15.29 计算积分

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sin x^4 \sin ax^2 dx, & \quad \int_0^\infty \cos x^4 \sin ax^2 dx, \\ \int_0^\infty \sin x^4 \cos ax^2 dx, & \quad \int_0^\infty \cos x^4 \cos ax^2 dx. \end{aligned}$$

解 由表 14.2 可以检得 $\mathcal{M}\{\sin x\}$ 与 $\mathcal{M}\{\cos x\}$, 结合 Mellin 变换的基本性质 (见表 14.1), 就能得到

$$\mathcal{M}\{\sin x^4\} = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{\nu}{4}\right) \sin \frac{\nu\pi}{8}, \quad \mathcal{M}\{\sin ax^2\} = \frac{a^{-\nu/2}}{2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sin \frac{\nu\pi}{4},$$

$$\mathcal{M}\{\cos x^4\} = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\nu}{4}\right)\cos\frac{\nu\pi}{8}, \quad \mathcal{M}\{\cos ax^2\} = \frac{a^{-\nu/2}}{2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\cos\frac{\nu\pi}{4},$$

所以, 根据 (14.37) 式, 有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sin x^4 \sin ax^2 dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{8} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sin\frac{\nu\pi}{4} \Gamma\left(\frac{1-\nu}{4}\right) \sin\frac{1-\nu}{8}\pi \frac{d\nu}{a^{\nu/2}}, \\ \int_0^\infty \cos x^4 \sin ax^2 dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{8} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sin\frac{\nu\pi}{4} \Gamma\left(\frac{1-\nu}{4}\right) \cos\frac{1-\nu}{8}\pi \frac{d\nu}{a^{\nu/2}}, \\ \int_0^\infty \sin x^4 \cos ax^2 dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{8} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \cos\frac{\nu\pi}{4} \Gamma\left(\frac{1-\nu}{4}\right) \sin\frac{1-\nu}{8}\pi \frac{d\nu}{a^{\nu/2}}, \\ \int_0^\infty \cos x^4 \cos ax^2 dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{8} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \cos\frac{\nu\pi}{4} \Gamma\left(\frac{1-\nu}{4}\right) \cos\frac{1-\nu}{8}\pi \frac{d\nu}{a^{\nu/2}}.\end{aligned}$$

作变换 $\nu = 4\nu' - 1$, 并且应用公式

$$\Gamma\left(2\nu' - \frac{1}{2}\right) = \frac{2^{2\nu'-3/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\nu' - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\nu' + \frac{1}{4}\right),$$

则可得到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sin x^4 \sin ax^2 dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \left(\frac{a^2}{4}\right)^{-\nu'} \Gamma\left(\nu' - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\nu' + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu'\right) \\ &\quad \times \sin\left(\nu' - \frac{1}{4}\right) \pi \cos\left(\nu' + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} d\nu' \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \left(\frac{a^2}{4}\right)^{-\nu'} \Gamma\left(\nu' - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\nu' + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu'\right) \sin\left(\nu' - \frac{1}{4}\right) \pi \\ &\quad \times \left[\cos\frac{\pi}{8} \cos\left(\nu' + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{8} \sin\left(\nu' + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{2} \right] d\nu', \\ \int_0^\infty \cos x^4 \sin ax^2 dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \left(\frac{a^2}{4}\right)^{-\nu'} \Gamma\left(\nu' - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\nu' + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu'\right) \\ &\quad \times \sin\left(\nu' - \frac{1}{4}\right) \pi \sin\left(\nu' + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} d\nu' \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \left(\frac{a^2}{4}\right)^{-\nu'} \Gamma\left(\nu' - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\nu' + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu'\right) \sin\left(\nu' - \frac{1}{4}\right) \pi \\ &\quad \times \left[\sin\frac{\pi}{8} \cos\left(\nu' + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{8} \sin\left(\nu' + \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{2} \right] d\nu' .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \cos x^4 \cos ax^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \left(\frac{a^2}{4}\right)^{-\nu'} \Gamma\left(\nu' - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\nu' + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu'\right) \\
&\quad \times \sin\left(\nu' + \frac{1}{4}\right) \pi \cos\left(\nu' - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} d\nu' \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \left(\frac{a^2}{4}\right)^{-\nu'} \Gamma\left(\nu' - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\nu' + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu'\right) \sin\left(\nu' + \frac{1}{4}\right) \pi \\
&\quad \times \left[\cos \frac{\pi}{8} \cos\left(\nu' - \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{8} \sin\left(\nu' - \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{2} \right] d\nu', \\
& \int_0^\infty \sin x^4 \cos ax^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \left(\frac{a^2}{4}\right)^{-\nu'} \Gamma\left(\nu' - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\nu' + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu'\right) \\
&\quad \times \sin\left(\nu' + \frac{1}{4}\right) \pi \cos\left(\nu' + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} d\nu' \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \left(\frac{a^2}{4}\right)^{-\nu'} \Gamma\left(\nu' - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\nu' + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu'\right) \sin\left(\nu' + \frac{1}{4}\right) \pi \\
&\quad \times \left[\sin \frac{\pi}{8} \cos\left(\nu' - \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{8} \sin\left(\nu' - \frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{2} \right] d\nu'.
\end{aligned}$$

这里出现的积分正相当于 (15.32) 和 (15.33) 两式 $\mu = \pm 1/4$ 的情形, 于是就计算得

$$\int_0^\infty \sin x^4 \sin ax^2 dx = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{a^2}{8}\right) J_{1/4}\left(\frac{a^2}{8}\right), \quad (15.155)$$

$$\int_0^\infty \cos x^4 \sin ax^2 dx = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{a^2}{8}\right) J_{1/4}\left(\frac{a^2}{8}\right), \quad (15.156)$$

$$\int_0^\infty \cos x^4 \cos ax^2 dx = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{a^2}{8}\right) J_{-1/4}\left(\frac{a^2}{8}\right), \quad (15.157)$$

$$\int_0^\infty \sin x^4 \cos ax^2 dx = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{a^2}{8}\right) J_{-1/4}\left(\frac{a^2}{8}\right). \quad (15.158)$$

将这几个积分重新组合, 还能写成

$$\int_0^\infty \sin(x^4 + \alpha) \sin ax^2 dx = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{a^2}{8} - \alpha\right) J_{1/4}\left(\frac{a^2}{8}\right). \quad (15.159)$$

$$\int_0^\infty \cos(x^4 + \alpha) \sin ax^2 dx = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{a^2}{8} - \alpha\right) J_{1/4}\left(\frac{a^2}{8}\right), \quad (15.160)$$

$$\int_0^\infty \cos(x^4 + \alpha) \cos ax^2 dx = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{a^2}{8} + \alpha\right) J_{-1/4}\left(\frac{a^2}{8}\right), \quad (15.161)$$

$$\int_0^\infty \sin(x^4 + \alpha) \cos ax^2 dx = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{a^2}{8} + \alpha\right) J_{-1/4}\left(\frac{a^2}{8}\right). \quad (15.162)$$

我们更可以代入 α 的某些特殊值, 例如, 取 $\alpha = \pm\pi/8$, 有

$$\int_0^\infty \sin\left(x^4 + \frac{\pi}{8}\right) \sin ax^2 dx = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a}{2}} \cos \frac{a^2}{8} J_{1/4}\left(\frac{a^2}{8}\right), \quad (15.163)$$

$$\int_0^\infty \cos\left(x^4 + \frac{\pi}{8}\right) \sin ax^2 dx = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a}{2}} \sin \frac{a^2}{8} J_{1/4}\left(\frac{a^2}{8}\right), \quad (15.164)$$

$$\int_0^\infty \cos\left(x^4 - \frac{\pi}{8}\right) \cos ax^2 dx = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a}{2}} \cos \frac{a^2}{8} J_{-1/4}\left(\frac{a^2}{8}\right), \quad (15.165)$$

$$\int_0^\infty \sin\left(x^4 - \frac{\pi}{8}\right) \cos ax^2 dx = -\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a}{2}} \sin \frac{a^2}{8} J_{-1/4}\left(\frac{a^2}{8}\right). \quad (15.166)$$

类似的结果还有

$$\int_0^\infty \sin\left(x^4 + \frac{a^2}{8}\right) \sin ax^2 dx = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a}{2}} \cos \frac{\pi}{8} J_{1/4}\left(\frac{a^2}{8}\right), \quad (15.167)$$

$$\int_0^\infty \cos\left(x^4 + \frac{a^2}{8}\right) \sin ax^2 dx = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a}{2}} \sin \frac{\pi}{8} J_{1/4}\left(\frac{a^2}{8}\right), \quad (15.168)$$

$$\int_0^\infty \cos\left(x^4 + \frac{a^2}{8}\right) \cos ax^2 dx = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a}{2}} \cos \frac{\pi}{8} J_{-1/4}\left(\frac{a^2}{8}\right), \quad (15.169)$$

$$\int_0^\infty \sin\left(x^4 + \frac{a^2}{8}\right) \cos ax^2 dx = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a}{2}} \sin \frac{\pi}{8} J_{-1/4}\left(\frac{a^2}{8}\right), \quad (15.170)$$

$$\int_0^\infty \sin\left(x^4 + \frac{\pi}{8} + \frac{a^2}{8}\right) \sin ax^2 dx = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a}{2}} J_{1/4}\left(\frac{a^2}{8}\right), \quad (15.171)$$

$$\int_0^\infty \cos\left(x^4 + \frac{\pi}{8} + \frac{a^2}{8}\right) \sin ax^2 dx = 0, \quad (15.172)$$

$$\int_0^\infty \cos\left(x^4 + \frac{a^2}{8} - \frac{\pi}{8}\right) \cos ax^2 dx = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{a}{2}} J_{-1/4}\left(\frac{a^2}{8}\right), \quad (15.173)$$

$$\int_0^\infty \sin\left(x^4 + \frac{a^2}{8} - \frac{\pi}{8}\right) \cos ax^2 dx = 0. \quad (15.174)$$

例 15.30 计算积分

$$\int_0^\infty \sin x^3 \cos 3b^2 x dx \quad \text{与} \quad \int_0^\infty \cos x^3 \sin 3b^2 x dx,$$

其中 $a > 0$.

解 因为

$$\mathcal{M}\{\sin x^3\} = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{\nu}{3}\right) \sin \frac{\nu\pi}{6}, \quad \mathcal{M}\{\cos x^3\} = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{\nu}{3}\right) \cos \frac{\nu\pi}{6}$$

以及

$$\mathcal{M}\{\cos ax\} = a^{-\nu} \Gamma(\nu) \cos \frac{\nu\pi}{2},$$

所以, 根据 (14.37) 式, 有

$$\int_0^\infty \sin x^3 \sin 3b^2 x \, dx = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{3} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \sin \frac{\nu\pi}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1-\nu}{3}\right) \sin \frac{1-\nu}{6} \pi \frac{d\nu}{(3b^2)^\nu},$$

$$\int_0^\infty \cos x^3 \cos 3b^2 x \, dx = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{3} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \cos \frac{\nu\pi}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1-\nu}{3}\right) \cos \frac{1-\nu}{6} \pi \frac{d\nu}{(3b^2)^\nu}.$$

利用 Γ 函数的乘积公式^①

$$\Gamma(3z) = \frac{3^{3z-1/2}}{2\pi} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(z + \frac{2}{3}\right)$$

及互余宗量定理, 即可将上面的积分化为

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \sin x^3 \sin 3b^2 x \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{6\sqrt{3}\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{3}\right) \\ & \quad \times \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{1-\nu}{6} \pi \frac{d\nu}{b^{2\nu}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{12\sqrt{3}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{3}\right) \csc \frac{1-\nu}{3} \pi \\ & \quad \times \left[\sin \frac{2}{3}(1-\nu)\pi - \sin \frac{1-\nu}{3} \pi \right] \frac{d\nu}{b^{2\nu}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{12\sqrt{3}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{3}\right) \left[2 \cos \frac{1-\nu}{3} \pi - 1 \right] \frac{d\nu}{b^{2\nu}}, \\ & \int_0^\infty \cos x^3 \cos 3b^2 x \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{6\sqrt{3}\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{3}\right) \\ & \quad \times \cos \frac{\nu\pi}{2} \cos \frac{1-\nu}{6} \pi \frac{d\nu}{b^{2\nu}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{12\sqrt{3}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{3}\right) \csc \frac{1-\nu}{3} \pi \\ & \quad \times \left[\sin \frac{2}{3}(1-\nu)\pi + \sin \frac{1-\nu}{3} \pi \right] \frac{d\nu}{b^{2\nu}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{12\sqrt{3}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{3}\right) \left(2 \cos \frac{1-\nu}{3} \pi + 1 \right) \frac{d\nu}{b^{2\nu}}. \end{aligned}$$

① 参见文献: 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论. 北京: 北京大学出版社, 2000: 96.

作代换 $\nu = (3\nu' - 1)/2$, 对照 (15.8a) 式, 即可计算出

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{3}\right) \cos \frac{1-\nu}{3} \pi \frac{d\nu}{b^{2\nu}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{3b}{2} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2} - \frac{1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{2} + \frac{1}{6}\right) \cos \frac{1-\nu'}{2} \pi \frac{d\nu'}{b^{3\nu'}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{3b}{2} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2} - \frac{1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{2} + \frac{1}{6}\right) \sin \frac{\nu'\pi}{2} \frac{d\nu'}{b^{3\nu'}} \\ &= \sqrt{3}\pi b \left[J_{1/3}(2b^3) + J_{-1/3}(2b^3) \right]. \end{aligned}$$

而作代换 $\nu = 3\nu'/2$, 对照 (15.20) 式, 又可计算出

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{3}\right) \frac{d\nu}{b^{2\nu}} = \frac{1}{2\pi i} \frac{3}{2} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{d\nu'}{b^{3\nu'}} \\ &= \frac{3}{2} \cdot 2^{5/3} (2b^3)^{1/3} K_{1/3}(2b^3) = 6b K_{1/3}(2b^3). \end{aligned}$$

综合以上结果, 最后就得到

$$\int_0^\infty \sin x^3 \sin 3b^2 x \, dx = \frac{\pi b}{6} \left[J_{1/3}(2b^3) + J_{-1/3}(2b^3) \right] - \frac{\sqrt{3}b}{6} K_{1/3}(2b^3), \quad (15.175)$$

$$\int_0^\infty \cos x^3 \cos 3b^2 x \, dx = \frac{\pi b}{6} \left[J_{1/3}(2b^3) + J_{-1/3}(2b^3) \right] + \frac{\sqrt{3}b}{6} K_{1/3}(2b^3). \quad (15.176)$$

由此还可以进一步导出 Airy 积分

$$\int_0^\infty \cos(x^3 - 3b^2 x) \, dx = \frac{\pi b}{3} \left[J_{1/3}(2b^3) + J_{-1/3}(2b^3) \right], \quad (15.177)$$

$$\int_0^\infty \cos(x^3 + 3b^2 x) \, dx = \frac{b}{\sqrt{3}} K_{1/3}(2b^3). \quad (15.178)$$

例 15.31 类似地, 由

$$\mathcal{M} \left\{ e^{-p^2 x} \right\} = \Gamma(\nu) p^{-2\nu},$$

$$\mathcal{M} \left\{ x^\mu \sin a^2 x \right\} = a^{-2\nu-2\mu} \Gamma(\nu+\mu) \sin \frac{\nu+\mu}{2} \pi,$$

$$\mathcal{M} \left\{ x^\mu \cos a^2 x \right\} = a^{-2\nu-2\mu} \Gamma(\nu+\mu) \cos \frac{\nu+\mu}{2} \pi.$$

根据 (14.39) 式也能导出

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-p^2/x} \sin a^2 x \, dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \Gamma(\nu+\mu) \sin \frac{\nu+\mu}{2} \pi \cdot a^{-2\mu} \frac{d\nu}{(ap)^{2\nu}},$$

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-p^2/x} \cos a^2 x \, dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \Gamma(\nu+\mu) \cos \frac{\nu+\mu}{2} \pi \cdot a^{-2\mu} \frac{d\nu}{(ap)^{2\nu}}.$$

作变换 $2\nu+\mu=\nu'$, 即可得出

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-p^2/x} \sin a^2 x \, dx \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'-\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'+\mu}{2}\right) \sin \frac{\nu'+\mu}{4} \pi \left(\frac{p}{a}\right)^\mu \frac{d\nu'}{(ap)^{\nu'}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2i} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'-\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'+\mu}{2}\right) \left[e^{i(\nu'+\mu)\pi/4} - e^{-i(\nu'+\mu)\pi/4}\right] \left(\frac{p}{a}\right)^\mu \frac{d\nu'}{(ap)^{\nu'}} \\ &= \frac{1}{i} \left(\frac{p}{a}\right)^\mu \left[e^{i\mu\pi/4} K_\mu(ap e^{-i\pi/4}) - e^{-i\mu\pi/4} K_\mu(ap e^{i\pi/4})\right], \end{aligned} \quad (15.179)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-p^2/x} \cos a^2 x \, dx \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'-\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'+\mu}{2}\right) \cos \frac{\nu'+\mu}{4} \pi \left(\frac{p}{a}\right)^\mu \frac{d\nu'}{(ap)^{\nu'}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'-\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'+\mu}{2}\right) \left[e^{i(\nu'+\mu)\pi/4} + e^{-i(\nu'+\mu)\pi/4}\right] \left(\frac{p}{a}\right)^\mu \frac{d\nu'}{(ap)^{\nu'}} \\ &= \left(\frac{p}{a}\right)^\mu \left[e^{i\mu\pi/4} K_\mu(ap e^{-i\pi/4}) + e^{-i\mu\pi/4} K_\mu(ap e^{i\pi/4})\right]. \end{aligned} \quad (15.180)$$

此二式也可看成函数 $e^{-p^2/x} \sin a^2 x$ 和 $e^{-p^2/x} \cos a^2 x$ 的 Mellin 变换.

例 15.32 因为

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ (b^2 - x^2)^{\mu-1/2} \eta(b-x) \right\} &= \int_0^b (b^2 - x^2)^{\mu-1/2} x^{\nu-1} \, dx \\ &= b^{2\mu+\nu-1} \int_0^1 (1-x^2) x^{\nu-1} \, dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\mu+1/2) \Gamma(\nu/2)}{\Gamma(\mu+(\nu+1)/2)} b^{2\mu+\nu-1}, \end{aligned}$$

所以, 根据 (14.39) 式, 有

$$\begin{aligned} & \int_0^b x^{-2\mu-1} (b^2 - x^2)^{\mu-1/2} \sin \frac{a}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(\mu+1/2) \Gamma(\nu/2)}{\Gamma(\mu+(\nu+1)/2)} \Gamma(\nu+2\mu) \sin \frac{\nu+2\mu}{2} \pi \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu+2\mu} \frac{d\nu}{b} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\mu+\frac{\nu+1}{2}\right) \sin \frac{\nu+2\mu}{2} \pi \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu+2\mu} \frac{d\nu}{b}, \\ & \int_0^b x^{-2\mu-1} (b^2 - x^2)^{\mu-1/2} \cos \frac{a}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(\mu+1/2) \Gamma(\nu/2)}{\Gamma(\mu+(\nu+1)/2)} \Gamma(\nu+2\mu) \cos \frac{\nu+2\mu}{2} \pi \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu+2\mu} \frac{d\nu}{b} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\mu+\frac{\nu+1}{2}\right) \cos \frac{\nu+2\mu}{2} \pi \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu+2\mu} \frac{d\nu}{b}.$$

作变量变换 $\nu+\mu = \nu'$, 分别对照 (15.3a) 与 (15.9) 两式, 则可以求得

$$\begin{aligned} & \int_0^b x^{-2\mu-1} (b^2-x^2)^{\mu-1/2} \sin \frac{a}{x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(\mu+1/2)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{b} \\ & \quad \times \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} 2^{\nu'+\mu-2} \Gamma\left(\frac{\nu'-\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'+\mu}{2}\right) \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu'+\mu} \sin \frac{\nu'+\mu}{2} \pi d\nu' \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2b} \left(\frac{2b}{a}\right)^{\mu} \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) J_{-\mu}\left(\frac{a}{b}\right), \end{aligned} \quad (15.181)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^b x^{-2\mu-1} (b^2-x^2)^{\mu-1/2} \cos \frac{a}{x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(\mu+1/2)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{b} \\ & \quad \times \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} 2^{\nu'+\mu-2} \Gamma\left(\frac{\nu'-\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'+\mu}{2}\right) \left(\frac{b}{a}\right)^{\nu'+\mu} \cos \frac{\nu'+\mu}{2} \pi d\nu' \\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2b} \left(\frac{2b}{a}\right)^{\mu} \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) N_{-\mu}\left(\frac{a}{b}\right). \end{aligned} \quad (15.182)$$

事实上, 如果作变换 $x = b/t$, 则还能将 (15.181) 及 (15.182) 二式改写为

$$\int_1^{\infty} (t^2-1)^{\mu-1/2} \sin \frac{at}{b} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2b}{a}\right)^{\mu} \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) J_{-\mu}\left(\frac{a}{b}\right), \quad (15.181')$$

$$\int_1^{\infty} (t^2-1)^{\mu-1/2} \cos \frac{at}{b} dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2b}{a}\right)^{\mu} \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) N_{-\mu}\left(\frac{a}{b}\right). \quad (15.182')$$

这正是例 15.28 中得到的结果.

例 15.33 和例 15.32 类似的积分还有

$$\int_b^{\infty} x^{-2\mu-1} (x-b)^{\mu-1/2} \sin \frac{2a}{x} dx \quad \text{和} \quad \int_b^{\infty} x^{-2\mu-1} (x-b)^{\mu-1/2} \cos \frac{2a}{x} dx.$$

因为

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ (x-b)^{\mu-1/2} \eta(x-b) \right\} &= \int_b^{\infty} (x-b)^{\mu-1/2} x^{\nu-1} dx \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1/2) \Gamma(-\nu-\mu+1/2)}{\Gamma(1-\nu)} b^{\mu-\nu-1/2}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_b^\infty x^{-2\mu-1}(x-b)^{\mu-1/2} \sin \frac{2a}{x} dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{1}{a^\mu} \\
&\times \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(\mu+1/2) \Gamma(-\nu-\mu+1/2)}{\Gamma(1-\nu)} \Gamma(\nu+2\mu) \sin \frac{\nu+2\mu}{2} \pi \left(\frac{b}{2a}\right)^{\nu+\mu} d\nu, \\
\int_b^\infty x^{-2\mu-1}(x-b)^{\mu-1/2} \cos \frac{2a}{x} dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{1}{a^\mu} \\
&\times \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(\mu+1/2) \Gamma(-\nu-\mu+1/2)}{\Gamma(1-\nu)} \Gamma(\nu+2\mu) \cos \frac{\nu+2\mu}{2} \pi \left(\frac{b}{2a}\right)^{\nu+\mu} d\nu.
\end{aligned}$$

作变换 $\nu' = \nu + \mu$, 分别对照 (15.32b) 与 (15.33b) 两式, 则有

$$\begin{aligned}
&\int_b^\infty x^{-2\mu-1}(x-b)^{\mu-1/2} \sin \frac{2a}{x} dx \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{1}{(2a)^\mu} \\
&\quad \times \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma(-\nu'+1/2) \Gamma(\nu'+\mu)}{\Gamma(1+\mu-\nu')} \sin \frac{\nu'+\mu}{2} \pi \left(\frac{b}{2a}\right)^{\nu'} d\nu' \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{b}} \frac{1}{(2a)^\mu} \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{a}{b}\right) J_\mu\left(\frac{a}{b}\right). \tag{15.183}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_b^\infty x^{-2\mu-1}(x-b)^{\mu-1/2} \cos \frac{2a}{x} dx \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{1}{(2a)^\mu} \\
&\quad \times \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma(-\nu'+1/2) \Gamma(\nu'+\mu)}{\Gamma(1+\mu-\nu')} \cos \frac{\nu'+\mu}{2} \pi \left(\frac{b}{2a}\right)^{\nu'} d\nu' \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{b}} \frac{1}{(2a)^\mu} \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{a}{b}\right) J_\mu\left(\frac{a}{b}\right). \tag{15.184}
\end{aligned}$$

第十六章 应用 Mellin 变换计算含柱函数的定积分

现在继续上一章的讨论, 利用 Mellin 变换的方法计算含柱函数的定积分. 在被积函数可以分拆为两个更简单函数之积时, 需要使用 Mellin 变换的卷积公式在 ν 取特定值的特殊形式 (14.37) 和 (14.39) 两式. 计算中还要用到柱函数的 Mellin 变换, 它们在上一章中也都可以找到.

§16.1 柱函数与初等函数乘积的积分

本节首先讨论 $\int_0^\infty f(x)g(x)dx$ 型的积分, 需要用到公式 (14.37).

例 16.1 由 (15.4a) 式以及表 14.2 中列出的 $\mathcal{M}\{e^{-\alpha x}\}$, 就可以得到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^\mu J_\mu(x) dx &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\mu-\nu} \Gamma(\nu) \frac{\Gamma(\mu+(1-\nu)/2)}{\Gamma((1+\nu)/2)} \frac{d\nu}{\alpha^\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\mu+\frac{1-\nu}{2}\right) \frac{d\nu}{\alpha^\nu} \\ &= \frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) (1+\alpha^2)^{-\mu-1/2}.\end{aligned}\quad (16.1)$$

类似地, 也有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_\mu(x) dx &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{-\nu} \Gamma(\nu) \frac{\Gamma((\mu-\nu+1)/2)}{\Gamma((\mu+\nu+1)/2)} \frac{d\nu}{\alpha^\nu} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \left(\sqrt{1+\alpha^2} - \alpha\right)^\mu.\end{aligned}\quad (16.2)$$

(16.1) 与 (16.2) 两式也可以分别看成 $x^\mu J_\mu(x)$ 与 $J_\mu(x)$ 的 Laplace 变换.

例 16.2 指数函数 e^{-bx^2} 与 Bessel 函数乘积的积分.

将 Mellin 变换的基本性质 (见表 14.1) 应用于 $\mathcal{M}\{e^{-\alpha x}\}$, 从而有

$$\mathcal{M}\{e^{-bx^2}\} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) b^{-\nu/2}.$$

再利用 (15.4b) 式写出 $\mathcal{M}\{x^{\mu+1} J_\mu(2ax)\}$, 根据公式 (14.37), 就得到

$$\int_0^\infty e^{-bx^2} x^{\mu+1} J_\mu(2ax) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{a^{\nu+\mu-1}} \Gamma\left(\mu+\frac{1+\nu}{2}\right) b^{(\nu-1)/2} d\nu.$$

令 $\nu' = \mu + (\nu+1)/2$, 即得

$$\int_0^\infty e^{-bx^2} x^{\mu+1} J_\mu(2ax) dx = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2b} \left(\frac{a}{b}\right)^\mu \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma(\nu') \left(\frac{a^2}{b}\right)^{-\nu'} d\nu' - \frac{1}{2b} \left(\frac{a}{b}\right)^\mu e^{-a^2/b}. \quad (16.3)$$

同样

$$\int_0^\infty e^{-bx^2} J_{2\mu}(ax) dx = \frac{1}{8\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(\mu+\nu/2)}{\Gamma(1+\mu-\nu/2)} \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \left(\frac{a}{2}\right)^{-\nu} b^{(\nu-1)/2} d\nu.$$

作变换 $\nu = 2\nu'$, 则可得

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-bx^2} J_{2\mu}(ax) dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\sqrt{b}} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} 2^{-\nu'} \frac{\Gamma(\mu+\nu') \Gamma(-\nu'+1/2)}{\Gamma(1+\mu-\nu')} \left(\frac{a^2}{8b}\right)^{-\nu'} d\nu' \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-a^2/8b} I_\mu\left(\frac{a^2}{8b}\right). \end{aligned} \quad (16.4)$$

如果说例 16.1 与例 16.2 中的一些积分还可以用其他方法计算, 例如直接代入 Bessel 函数的级数表达式再逐项积分 (尽管可能略显麻烦), 那么至少对于下面例 16.3 例 16.12 中的积分, 采用 Mellin 变换的方法可能就是比较方便的选择.

例 16.3 由例 15.27 以及 (15.3a) 和 (15.9) 两式, 可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left\{\frac{\eta(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}\right\} &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(\nu/2)}{\Gamma((\nu+1)/2)}, \\ \mathcal{M}\{J_{2\mu}(2\alpha x)\} &= \frac{\alpha^{-\nu}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) \sin\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right)\pi, \\ \mathcal{M}\{N_0(2\alpha x)\} &= -\frac{\alpha^{-\nu}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \cos\frac{\nu\pi}{2}, \end{aligned}$$

因此就能求得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{J_{2\mu}(2\alpha x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4\pi^{3/2}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) \sin\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right)\pi \frac{\Gamma((1-\nu)/2)}{\Gamma(1-\nu/2)} \frac{d\nu}{\alpha^\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4\pi^{3/2}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) \sin\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right)\pi \sin\frac{\nu\pi}{2} \frac{d\nu}{\alpha^\nu} \\ &= \frac{\pi}{2} J_\mu^2(\alpha), \end{aligned} \quad (16.5)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{N_0(2\alpha x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4\pi^{3/2}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \cos\frac{\nu\pi}{2} \frac{\Gamma((1-\nu)/2)}{\Gamma(1-\nu/2)} \frac{d\nu}{\alpha^\nu} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4\pi^{3/2}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \cos\frac{\nu\pi}{2} \sin\frac{\nu\pi}{2} \frac{d\nu}{\alpha^\nu} \\ &= \frac{\pi}{2} J_0(\alpha) N_0(\alpha). \end{aligned} \quad (16.6)$$

例 16.4 类似于例 16.3, 并利用

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left\{\frac{\eta(x-1)}{\sqrt{x^2-1}}\right\} &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\sin\frac{\nu\pi}{2}, \\ \mathcal{M}\{N_{2\mu}(2\alpha x)\} &= -\frac{\alpha^{-\nu}}{2\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right)\cos\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right)\pi,\end{aligned}$$

又能求得

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{J_{2\mu}(2\alpha x)}{\sqrt{x^2-1}} dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4\pi^{3/2}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right)\sin\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right)\pi \\ &\quad \times \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sin\frac{1-\nu}{2}\pi \frac{d\nu}{\alpha^\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4\pi^{3/2}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) \\ &\quad \times \sin\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right)\pi \cos\frac{\nu\pi}{2} \frac{d\nu}{\alpha^\nu} \\ &= -\frac{\pi}{2} J_\mu(\alpha) N_\mu(\alpha),\end{aligned}\quad (16.7)$$

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{N_{2\mu}(2\alpha x)}{\sqrt{x^2-1}} dx &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4\pi^{3/2}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right)\cos\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right)\pi \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \\ &\quad \times \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sin\frac{1-\nu}{2}\pi \frac{d\nu}{\alpha^\nu} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4\pi^{3/2}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) \\ &\quad \times \cos\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right)\pi \cos\frac{\nu\pi}{2} \frac{d\nu}{\alpha^\nu} \\ &= \frac{\pi}{4} [J_\mu^2(\alpha) - N_\mu^2(\alpha)].\end{aligned}\quad (16.8)$$

作变换 $t = \sqrt{x^2-1}$, 还能将 (16.7) 和 (16.8) 两式化为

$$\int_0^\infty \frac{J_{2\mu}(2\alpha\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} dx = -\frac{\pi}{2} J_\mu(\alpha) N_\mu(\alpha), \quad (16.7')$$

$$\int_0^\infty \frac{N_{2\mu}(2\alpha\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{\pi}{4} [J_\mu^2(\alpha) - N_\mu^2(\alpha)]. \quad (16.8')$$

例 16.5 由 (15.5b) 式和 (15.144) 式, 就能有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{\lambda+1} J_\lambda(\alpha x)}{(1+x^2)^{\mu+1}} dx \\ = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu+\lambda-1} \Gamma\left(\lambda+\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\mu+\frac{\nu+1}{2}\right) \frac{d\nu}{\alpha^{\nu+\lambda+1}}.\end{aligned}$$

作变换 $\nu+2\lambda+1 = \nu'$, 即得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^{\lambda+1} J_\lambda(\alpha x)}{(1+x^2)^{\mu+1}} dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} 2^{\nu'-\lambda-2} \alpha^\lambda \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\lambda+\mu\right) \frac{d\nu'}{\alpha^{\nu'}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^\mu K_{\mu-\lambda}(\alpha).\end{aligned}\quad (16.9)$$

例 16.6 利用例 15.26 中给出的 $\mathcal{M}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right\}$ (见 (15.144) 式, 取 $\mu = -1/2$) 以及例 16.3 中给出的 $\mathcal{M}\{J_{2\mu}(2bx)\}$, 还可以计算出

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{J_{2\mu}(2bx)}{\sqrt{x^2+a^2}} dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4\pi^{3/2}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) \frac{d\nu}{(ab)^\nu} \\ &= I_\mu(ab) K_\mu(ab).\end{aligned}\quad (16.10)$$

在此基础上, 又能导出

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{N_{2\mu}(2bx)}{\sqrt{x^2+a^2}} dx &= \int_0^\infty \frac{\cos 2\mu\pi J_{2\mu}(2bx) - J_{-2\mu}(2bx)}{\sin 2\mu\pi} \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \\ &= \frac{\cos 2\mu\pi I_\mu(ab) K_\mu(ab) - I_{-\mu}(ab) K_{-\mu}(ab)}{\sin 2\mu\pi} \\ &= \frac{K_\mu(ab)}{\sin 2\mu\pi} [\cos 2\mu\pi I_\mu(ab) - I_{-\mu}(ab)] \\ &= -\frac{K_\mu(ab)}{\sin \mu\pi} \left[\sin \mu\pi I_\mu(ab) + \frac{1}{\pi} K_\mu(ab)\right].\end{aligned}\quad (16.11)$$

再由

$$\mathcal{M}\{K_{2\mu}(2bx)\} = \frac{b^{-\nu}}{4} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right),$$

又可以计算出

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{K_{2\mu}(2bx)}{\sqrt{x^2+a^2}} dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) \frac{d\nu}{(ab)^\nu} \\ &= \frac{\pi^2}{8\cos \mu\pi} [J_\mu^2(ab) + N_\mu^2(ab)].\end{aligned}\quad (16.12)$$

例 16.7 根据 $\mathcal{M}\left\{\frac{1}{x^2+k^2}\right\}$ (见 (15.144) 式, 取 $\mu = 0$) 以及 $\mathcal{M}\{N_0(ax)\}$ (见例 16.3), 也可求得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{N_0(ax)}{x^2+k^2} dx &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2^{\nu-1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \cos \frac{\nu\pi}{2} \cdot \frac{1}{2k} \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \frac{d\nu}{(ka)^\nu} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{k} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu-2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \frac{d\nu}{(ka)^\nu} = -\frac{1}{k} K_0(ka).\end{aligned}\quad (16.13)$$

类似地, 还有

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \frac{x J_0(ax)}{x^2 + k^2} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2^\nu}{\pi} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \sin \frac{1+\nu}{2} \pi \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \frac{d\nu}{(ka)^{\nu+1}} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu-1} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \frac{d\nu}{(ka)^{\nu+1}} = K_0(ka). \quad (16.14)
 \end{aligned}$$

例 16.8 由 $\mathcal{M}\left\{\frac{1}{1-x}\right\}$ (见表 14.2) 及 Mellin 变换的基本性质 (见表 14.1), 有

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{x^2 - k^2}\right\} = -\frac{k^{\nu-2}}{2} \pi \cot \frac{\nu\pi}{2},$$

因此

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \frac{x J_0(ax)}{x^2 - k^2} dx \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2^{\nu-1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \sin \frac{1+\nu}{2} \pi \cdot \cot \frac{1-\nu}{2} \pi \frac{d\nu}{(ka)^{\nu+1}} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu-1} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \cos \frac{1+\nu}{2} \pi \frac{d\nu}{(ka)^{\nu+1}} \\
 &= -\frac{\pi}{2} N_0(ka). \quad (16.15)
 \end{aligned}$$

将上式和 (16.14) 式相加、减, 又能得到

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \frac{x J_0(ax)}{x^4 - k^4} dx &= \frac{1}{2k^2} \left[\int_0^{\infty} \frac{x J_0(ax)}{x^2 - k^2} dx - \int_0^{\infty} \frac{x J_0(ax)}{x^2 + k^2} dx \right] \\
 &= -\frac{1}{2k^2} \left[K_0(ka) + \frac{\pi}{2} N_0(ka) \right], \quad (16.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \frac{x^3 J_0(ax)}{x^4 - k^4} dx &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{\infty} \frac{x J_0(ax)}{x^2 - k^2} dx - \int_0^{\infty} \frac{x J_0(ax)}{x^2 + k^2} dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[K_0(ka) - \frac{\pi}{2} N_0(ka) \right]. \quad (16.17)
 \end{aligned}$$

例 16.9 应用 Mellin 变换的基本性质 (见表 14.1), 即可由 $\mathcal{M}\{1/(x+1)\}$ 导出

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}\left\{\frac{x}{x^4 + a^4}\right\} &= \frac{a^{\nu-3}}{4} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3-\nu}{4}\right), \\
 \mathcal{M}\left\{\frac{x^3}{x^4 + a^4}\right\} &= \frac{a^{\nu-1}}{4} \Gamma\left(\frac{1-\nu}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3+\nu}{4}\right),
 \end{aligned}$$

也能够求得

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \frac{x J_0(ax)}{x^4 + a^4} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{a^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2^{\nu-3}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sin \frac{\nu\pi}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{4}\right) \frac{d\nu}{a^\nu} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{a^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu-2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sin \frac{\nu\pi}{4} \frac{d\nu}{a^\nu} \\
 &= \frac{i}{2a^2} \left[K_0(ae^{i\pi/4}) - K_0(ae^{-i\pi/4}) \right], \tag{16.18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \frac{x^3 J_0(ax)}{x^4 + a^4} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2^{\nu-3}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sin \frac{\nu\pi}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{\nu}{4}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\nu}{4}\right) \frac{d\nu}{a^\nu} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu-2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \cos \frac{\nu\pi}{4} \frac{d\nu}{a^\nu} \\
 &= \frac{1}{2} \left[K_0(ae^{i\pi/4}) + K_0(ae^{-i\pi/4}) \right]. \tag{16.19}
 \end{aligned}$$

例 16.10 模仿例 16.9 的做法, 可以写出

$$\mathcal{M} \left\{ \frac{x}{x^2 + a^2} \right\} = \frac{a^{\nu-1}}{2} \frac{\pi}{\cos(\nu\pi/2)},$$

同时引用 (15.24b) 式的结果, 就能计算出

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \frac{x}{x^2 + a^2} J_\mu^2(x) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4\pi^{3/2}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \\
 &\quad \times \sin\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \pi \sin \frac{\nu\pi}{2} \cdot \frac{1}{\cos(1-\nu)\pi/2} \frac{d\nu}{a^\nu} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4\pi^{3/2}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \sin\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \pi \frac{d\nu}{a^\nu} \\
 &= I_\mu(a) K_\mu(a). \tag{16.20}
 \end{aligned}$$

例 16.11 类似地, 还可以计算积分 $\int_0^\infty \frac{x^{\mu+1}}{(x^4 + 4)^{\mu+1/2}} J_\mu(ax) dx$. 这时首先要模仿例 16.9 的做法计算出

$$\mathcal{M} \left\{ \frac{1}{(x^4 + 4)^{\mu+1/2}} \right\} = \frac{2^{(\nu/2)-2\mu-2}}{\Gamma(\mu+1/2)} \Gamma\left(\frac{\nu}{4}\right) \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2} - \frac{\nu}{4}\right).$$

因此

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu+1}}{(x^4+4)^{\mu+1/2}} J_{\mu}(ax) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\Gamma(\mu+1/2)} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{-\mu+(\nu-5)/2} \frac{\Gamma(\mu+(\nu+1)/2)}{\Gamma((1-\nu)/2)} \\
 & \quad \times \Gamma\left(\frac{1-\nu}{4}\right) \Gamma\left(\mu+\frac{\nu+1}{4}\right) \frac{d\nu}{a^{\nu+\mu+1}} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\mu+1/2)} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu-\mu-2} \frac{\Gamma(\mu+(\nu+1)/2)}{\Gamma((3-\nu)/4)} \Gamma\left(\mu+\frac{\nu+1}{4}\right) \frac{d\nu}{a^{\nu+\mu+1}}.
 \end{aligned}$$

作平移 $\nu' = \nu + 1$, 即得

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu+1}}{(x^4+4)^{\mu+1/2}} J_{\mu}(ax) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\mu+1/2)} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} 2^{\nu'-\mu-3} \frac{\Gamma(\mu+\nu'/2)}{\Gamma(1-\nu'/4)} \Gamma\left(\mu+\frac{\nu'}{4}\right) \frac{d\nu'}{a^{\nu'+\mu}} \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\mu+1/2)} \left(\frac{a}{8}\right)^{\mu} J_{\mu}(a) K_{\mu}(a). \quad (16.21)
 \end{aligned}$$

下面讨论 $\int_0^{\infty} f(x)g\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x}$ 型的积分, 这时需要用到关系式 (14.39).

例 16.12 由表 14.2 及 (15.3) 式可以查得 $\mathcal{H}\{e^{-a^2x}\}$ 与 $\mathcal{H}\{J_{\mu}(2x)\}$, 所以

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x} J_{\mu}\left(\frac{2}{x}\right) \frac{dx}{x} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \sin \frac{\nu+\mu}{2} \pi \frac{d\nu}{a^{2\nu}}.$$

作变换 $\nu = \nu'/2$, 即得^①

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} e^{-a^2x} J_{\mu}\left(\frac{2}{x}\right) \frac{dx}{x} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{4}+\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{4}-\frac{\mu}{2}\right) \sin\left(\frac{\nu'}{4}+\frac{\mu}{2}\right) \pi \frac{d\nu'}{a^{\nu'}} \\
 &= 2J_{\mu}(2a) K_{\mu}(2a). \quad (16.22)
 \end{aligned}$$

^① 本书得到的 (16.22) 式, 与《运算微积手册》(科学出版社, 1958) 中 219 页上所载结果

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} J_{\mu}\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t} = 2J_{\mu}(2\sqrt{p}) K_{\mu}(2\sqrt{p})$$

不一致.

类似地, 还有^①

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-a^2 x} N_\mu \left(\frac{2}{x} \right) \frac{dx}{x} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \cos \frac{\nu+\mu}{2} \pi \frac{d\nu}{a^{2\nu}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{4} + \frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{4} - \frac{\mu}{2}\right) \cos\left(\frac{\nu'}{4} + \frac{\mu}{2}\right) \pi \frac{d\nu'}{a^{\nu'}} \\ &= 2 N_\mu(2a) K_\mu(2a), \end{aligned} \quad (16.23)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-a^2 x} H_\mu^{(1,2)} \left(\frac{2}{x} \right) \frac{dx}{x} &\equiv \int_0^\infty e^{-a^2 x} \left[J_\mu \left(\frac{2}{x} \right) \pm i N_\mu \left(\frac{2}{x} \right) \right] \frac{dx}{x} \\ &= 2 H_\mu^{(1,2)}(2a) K_\mu(2a). \end{aligned} \quad (16.24)$$

例 16.13 计算积分 $\int_0^\infty e^{-b^2 x} e^{-a^2/8x} K_\mu \left(\frac{a^2}{8x} \right) \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

解 根据 (15.57) 式以及 $K_\mu(x)$ 的定义 (15.19), 有

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \{ e^{-x} K_\mu(x) \} &= \frac{2^{-\nu}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right) \Gamma(\nu+\mu) \Gamma(\nu-\mu) \frac{\sin(\nu+\mu)\pi - \sin(\nu-\mu)\pi}{2 \sin \mu \pi} \\ &= \frac{2^{-\nu}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right) \Gamma(\nu+\mu) \Gamma(\nu-\mu) \cos \nu \pi. \end{aligned} \quad (16.25)$$

由此即可导出

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-b^2 x} e^{-a^2/8x} K_\mu \left(\frac{a^2}{8x} \right) \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-b^2 x} e^{-a^2/8x} K_\mu \left(\frac{a^2}{8x} \right) \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right) \Gamma(\nu+\mu) \Gamma(\nu-\mu) \cos \nu \pi \cdot \left(\frac{ab}{2}\right)^{-2\nu} d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{\pi}}{b} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{2\nu} \Gamma(\nu+\mu) \Gamma(\nu-\mu) \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}}. \end{aligned}$$

作变换 $\nu = \nu'/2$, 即得

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-b^2 x} e^{-a^2/8x} K_\mu \left(\frac{a^2}{8x} \right) \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{\pi}}{b} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} 2^{\nu'-1} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}-\mu\right) \frac{d\nu'}{(ab)^{\nu'}} \\ &= \frac{2}{b} K_{2\mu}(ab). \end{aligned} \quad (16.26)$$

^① 此处的 (16.23) 式与 I. S. Gradshteyn & I. M. Ryzhik 的 *Table of Integrals, Series, and Products* 一致, 在该书 (第 7 版) 709 页上为公式 6.642 1. 但 (16.24) 式与该书的公式 6.642 2 不同. 公式 6.642 2 与公式 6.642 1 存在明显矛盾.

同样,也可以求出

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty e^{-b^2 x} e^{-a^2/2x} K_\mu\left(\frac{a^2}{2x}\right) \frac{dx}{x} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma(\nu) \Gamma(\nu) \Gamma(-\nu+1/2)}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \frac{\Gamma(\nu'/2) \Gamma(\nu'/2) \Gamma((1-\nu')/2)}{\Gamma(1-\nu'/2)} \frac{d\nu'}{(ab)^{\nu'}} \\
 &= 2 I_0(ab) K_0(ab). \tag{16.27}
 \end{aligned}$$

例 16.14 根据 (15.37) 式以及例 15.20 给出的 $\mathcal{L}\{e^{\pm ib^2 x}\}$, 并应用 Γ 函数的互余宗量定理, 可以导出

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty [\sin x J_0(x) + \cos x N_0(x)] \sin \frac{a^2}{2x} \frac{dx}{x} \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \sin \frac{\nu\pi}{2} \cdot \frac{2^{1-\nu}}{\pi^{3/2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right) \Gamma(\nu) \Gamma(\nu) \\
 &\quad \times \cos \nu\pi \cos \frac{\nu\pi}{2} \cdot \left(\frac{a^2}{2}\right)^{-\nu} d\nu \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right) \Gamma(\nu) \Gamma(\nu) \Gamma(\nu) \cos \nu\pi \sin \nu\pi \frac{d\nu}{a^{2\nu}},
 \end{aligned}$$

作变换 $\nu = \nu'/2$ 后与 (15.26) 式作比较, 就能求得

$$\int_0^\infty [\sin x J_0(x) + \cos x N_0(x)] \sin \frac{a^2}{2x} \frac{dx}{x} = \pi J_0(a) N_0(a). \tag{16.28a}$$

类似地, 根据 (15.40) 式, 也能导出

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty [\sin x N_0(x) - \cos x J_0(x)] \cos \frac{a^2}{2x} \frac{dx}{x} \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \cos \frac{\nu\pi}{2} \cdot \frac{2^{1-\nu}}{\pi^{3/2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right) \\
 &\quad \times \Gamma(\nu) \Gamma(\nu) \cos \nu\pi \sin \frac{\nu\pi}{2} \cdot \left(\frac{a^2}{2}\right)^{-\nu} d\nu,
 \end{aligned}$$

与上面的结果完全相同, 所以也有

$$\int_0^\infty [\sin x N_0(x) - \cos x J_0(x)] \cos \frac{a^2}{2x} \frac{dx}{x} = \pi J_0(a) N_0(a). \tag{16.28b}$$

将 (16.28a) 与 (16.28b) 两式相加、减, 又能得到

$$\int_0^\infty \left[J_0(x) \cos\left(\frac{a^2}{2x} + x\right) - N_0(x) \sin\left(\frac{a^2}{2x} + x\right) \right] \frac{dx}{x} = 2\pi J_0(a) N_0(a), \tag{16.29a}$$

$$\int_0^\infty \left[J_0(x) \cos\left(\frac{a^2}{2x} - x\right) + N_0(x) \sin\left(\frac{a^2}{2x} - x\right) \right] \frac{dx}{x} = 0. \quad (16.29b)$$

例 16.15 由 (15.21) 式可以推出

$$\mathcal{M}\{x^2 K_0(x)\} = 2^\nu \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right),$$

所以

$$\int_0^\infty x K_0(x) \sin \frac{a^2}{2x} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{2\nu} \Gamma(\nu) \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) \sin \frac{\nu\pi}{2} \frac{d\nu}{a^{2\nu}}.$$

但因为

$$\Gamma(\nu) \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) = \frac{\nu}{2} \Gamma(\nu) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma(1+\nu) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right),$$

所以又有

$$\int_0^\infty x K_0(x) \sin \frac{a^2}{2x} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{2\nu-1} \Gamma(1+\nu) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) \sin \frac{\nu\pi}{2} \frac{d\nu}{a^{2\nu}}.$$

作变量变换 $\nu = (\nu'/2) - 1$, 并与 (15.52b) 式相比较, 即得

$$\int_0^\infty x K_0(x) \sin \frac{a^2}{2x} dx = \frac{\pi a^2}{2} J_1(a) K_1(a). \quad (16.30)$$

类似地, 还可以得到

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x K_0(x) \cos \frac{a^2}{2x} dx &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{2\nu} \Gamma(\nu) \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) \cos \frac{\nu\pi}{2} \frac{d\nu}{a^{2\nu}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{2\nu-1} \Gamma(1+\nu) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) \cos \frac{\nu\pi}{2} \frac{d\nu}{a^{2\nu}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} 2^{\nu'-2} \Gamma\left(1 + \frac{\nu'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{4}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\nu'}{4}\right) \cos \frac{\nu'\pi}{4} \frac{d\nu'}{a^{\nu'}}. \end{aligned}$$

与 (15.53) 式相比较, 也可以得到

$$\int_0^\infty x K_0(x) \cos \frac{a^2}{2x} dx = -\frac{\pi a^2}{2} N_1(a) K_1(a). \quad (16.31)$$

§16.2 两个柱函数乘积的积分

也还是先计算 $\int_0^\infty f(x)g(x)dx$ 型的积分.

例 16.16 根据 (15.3) (15.5) 式的结果, 并应用 Mellin 变换的基本性质 (见表 14.1), 我们有

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty x^{\lambda+\mu+1} J_\lambda(ax) J_\mu(bx) dx \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\lambda+\mu-1} \Gamma\left(\lambda+\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\mu+1-\frac{\nu}{2}\right) a^{-\lambda-\nu} b^{\nu-\mu-2} d\nu.
\end{aligned}$$

作变换 $\nu+2\lambda=\nu'$, 则有

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty x^{\lambda+\mu+1} J_\lambda(ax) J_\mu(bx) dx \\
&= \frac{1}{2\pi i} 2^{\lambda+\mu-1} a^\lambda b^{-2\lambda-\mu-2} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}\right) \Gamma\left(\lambda+\mu+1-\frac{\nu'}{2}\right) \left(\frac{a}{b}\right)^{\nu'} d\nu' \\
&= 2^{\lambda+\mu-1} a^\lambda b^{-2\lambda-\mu-2} \frac{\Gamma(\lambda+\mu+1)}{(1+a^2/b^2)^{\lambda+\mu+1}} \\
&= 2^{\lambda+\mu-1} \Gamma(\lambda+\mu+1) \frac{a^\lambda b^\mu}{(a^2+b^2)^{\lambda+\mu+1}}. \tag{16.32}
\end{aligned}$$

例 16.17 由 (15.3) 式以及 Mellin 变换的基本性质 (见表 14.1), 可以得出

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\{x J_{2\mu}(2ax)\} &= \frac{a^{-\nu-1}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}-\mu\right) \sin\left(\frac{1+\nu}{2}-\mu\right) \pi, \\
\mathcal{M}\{J_\mu(x^2)\} &= \frac{2^{\nu/2}}{4\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{4}+\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4}-\frac{\mu}{2}\right) \sin\left(\frac{\nu}{4}-\frac{\mu}{2}\right) \pi,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty x J_{2\mu}(2ax) J_\mu(x^2) dx \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{8\pi^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}-\mu\right) \sin\left(\frac{1+\nu}{2}-\mu\right) \pi \\
&\quad \times 2^{(1-\nu)/2} \Gamma\left(\frac{1-\nu}{4}+\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{4}-\frac{\mu}{2}\right) \sin\left(\frac{1-\nu}{4}-\frac{\mu}{2}\right) \pi \frac{d\nu}{a^{\nu+1}} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{8\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{(\nu+1)/2} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{4}+\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu}{4}-\frac{\mu}{2}\right) \sin\left(\frac{1+\nu}{4}-\frac{\mu}{2}\right) \pi \frac{d\nu}{a^{\nu+1}}.
\end{aligned}$$

在得到上面的结果时用到了 Γ 函数的倍乘公式. 令 $\nu+1=2\nu'$, 则得

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty x J_{2\mu}(2ax) J_\mu(x^2) dx \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \frac{2^{\nu'-2}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu'+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'-\mu}{2}\right) \sin\frac{\nu'-\mu}{2} \pi \frac{d\nu'}{a^{2\nu'}} \\
&= \frac{1}{2} J_\mu(a^2). \tag{16.33}
\end{aligned}$$

例 16.18 类似于例 16.17, 由

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{J_{2\mu+1}(2ax)\} &= \frac{a^{-\nu}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+2\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-2\mu-1}{2}\right) \sin \frac{\nu-2\mu-1}{2}\pi, \\ \mathcal{M}\{x^2 J_{\mu+1}(x^2)\} &= \frac{2^{\nu/2}}{2\pi} \Gamma\left(1+\frac{\nu}{4}+\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4}-\frac{\mu}{2}\right) \sin\left(\frac{\nu}{4}-\frac{\mu}{2}\right)\pi.\end{aligned}$$

出发, 我们能有

$$\begin{aligned}& \int_0^\infty x^2 J_{2\mu+1}(2ax) J_{\mu+1}(x^2) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu+2\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-2\mu-1}{2}\right) \sin \frac{\nu-2\mu-1}{2}\pi \\ &\quad \times 2^{(1-\nu)/2} \Gamma\left(1+\frac{1-\nu}{4}+\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{4}-\frac{\mu}{2}\right) \sin\left(\frac{1-\nu}{4}-\frac{\mu}{2}\right)\pi \frac{d\nu}{a^\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{(\nu-1)/2} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{4}+\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu}{4}-\frac{\mu}{2}\right) \sin\left(\frac{1+\nu}{4}-\frac{\mu}{2}\right)\pi \frac{d\nu}{a^\nu}.\end{aligned}$$

同样作变换 $\nu+1=2\nu'$, 又得到

$$\begin{aligned}& \int_0^\infty x^2 J_{2\mu+1}(2ax) J_{\mu+1}(x^2) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{a}{4\pi} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} 2^{\nu'} \Gamma\left(\frac{\nu'+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'-\mu}{2}\right) \sin \frac{\nu'-\mu}{2}\pi \frac{d\nu}{a^{2\nu'}} \\ &= \frac{a}{2} J_\mu(a^2).\end{aligned}\tag{16.34}$$

例 16.19 类似于例 16.18, 也能得到

$$\begin{aligned}& \int_0^\infty x^2 J_{2\mu+1}(2ax) J_\mu(x^2) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu+2\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-2\mu-1}{2}\right) \sin \frac{\nu-2\mu-1}{2}\pi \\ &\quad \times 2^{(1-\nu)/2} \Gamma\left(\frac{1-\nu}{4}+\frac{1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{4}-\frac{1-\mu}{2}\right) \sin\left(\frac{1-\nu}{4}+\frac{1-\mu}{2}\right)\pi \frac{d\nu}{a^\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{(\nu-1)/2} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{4}+\frac{\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu}{4}-\frac{\mu+1}{2}\right) \\ &\quad \times \sin\left(\frac{1+\nu}{4}-\frac{\mu+1}{2}\right)\pi \frac{d\nu}{a^\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{a}{4\pi} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} 2^{\nu'} \Gamma\left(\frac{\nu'+\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'-\mu-1}{2}\right) \sin \frac{\nu'-\mu-1}{2}\pi \frac{d\nu}{a^{2\nu'}} \\ &= \frac{a}{2} J_{\mu+1}(a^2).\end{aligned}\tag{16.35}$$

再来计算 $\int_0^\infty f(x)g\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x}$ 型的积分.

例 16.20 根据 (15.3) 式以及 Mellin 变换的基本性质 (见表 14.1), 可以写出

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{x J_\mu(a^2 x)\} &= \frac{2^\nu}{\pi} a^{-2\nu-2} \Gamma\left(\frac{\nu+1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1-\mu}{2}\right) \sin \frac{\nu+1}{2} \mu \pi \\ &= \frac{2^\nu}{\pi} a^{-2\nu-2} \Gamma\left(\frac{\nu+1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1-\mu}{2}\right) \cos \frac{\nu-\mu}{2} \pi, \\ \mathcal{M}\{J_\mu(b^2 x)\} &= \frac{2^{\nu-1}}{\pi} b^{-2\nu} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \sin \frac{\nu-\mu}{2} \pi.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^\infty J_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right) J_\mu(b^2 x) \frac{dx}{x^2} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\pi^2 a^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{2\nu-1} \Gamma\left(\frac{\nu+1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1-\mu}{2}\right) \\ &\quad \times \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \sin \frac{\nu-\mu}{2} \pi \cos \frac{\nu-\mu}{2} \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{a^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu+\mu) \Gamma(\nu-\mu) \sin(\nu-\mu) \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}}.\end{aligned}$$

作变换 $2\nu = \nu'$, 即得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty J_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right) J_\mu(b^2 x) \frac{dx}{x^2} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2a^2} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}-\mu\right) \sin\left(\frac{\nu'}{2}-\mu\right) \pi \frac{d\nu'}{(ab)^{\nu'}} \\ &= \frac{1}{a^2} J_{2\mu}(2ab).\end{aligned}\quad (16.36)$$

例 16.21 同样, 由

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\{N_\mu(a^2 x)\} &= -\frac{2^{\nu-1} a^{-2\nu}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \cos \frac{\nu-\mu}{2} \pi, \\ \mathcal{M}\left\{\frac{1}{x} N_\mu(b^2 x)\right\} &= -\frac{2^{\nu-2} b^{-2\nu+2}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu-1}{2}\right) \cos \frac{\nu-\mu-1}{2} \pi \\ &= -\frac{2^{\nu-2} b^{-2\nu+2}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu-1}{2}\right) \sin \frac{\nu-\mu}{2} \pi.\end{aligned}$$

也可以求出

$$\begin{aligned}\int_0^\infty J_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right) N_\mu(b^2 x) \frac{dx}{x^2} &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\pi^2 a^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2^{2\nu-1}}{\pi^2 a^2} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+\mu-1}{2}\right) \\ &\quad \times \Gamma\left(\frac{\nu-\mu-1}{2}\right) \cos^2 \frac{\nu-\mu}{2} \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi i} \frac{2}{\pi a^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu+\mu) \Gamma(\nu-\mu) \cos^2 \frac{\nu-\mu}{2} \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\pi a^2} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}-\mu\right) \left[1+\cos\left(\frac{\nu'}{2}-\mu\right)\pi\right] \frac{d\nu'}{(ab)^{\nu'}} \\
&= \frac{1}{a^2} \left[N_{2\mu}(2ab) - \frac{2}{\pi} K_{2\mu}(2ab) \right], \tag{16.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty N_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right) J_\mu(b^2 x) \frac{dx}{x^2} \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\pi^2 a^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{2\nu-1} \Gamma\left(\frac{\nu+1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1-\mu}{2}\right) \\
&\quad \times \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \sin^2 \frac{\nu-\mu}{2} \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \frac{2}{\pi a^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu+\mu) \Gamma(\nu-\mu) \sin^2 \frac{\nu-\mu}{2} \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\pi a^2} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}-\mu\right) \left[1-\cos\left(\frac{\nu'}{2}-\mu\right)\pi\right] \frac{d\nu'}{(ab)^{\nu'}} \\
&= \frac{1}{a^2} \left[N_{2\mu}(2ab) + \frac{2}{\pi} K_{2\mu}(2ab) \right], \tag{16.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty N_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right) N_\mu(b^2 x) \frac{dx}{x^2} \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\pi^2 a^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2^{2\nu-1} b^2}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu+\mu}{2}\right) \\
&\quad \times \Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right) \cos \frac{1+\nu-\mu}{2} \pi \cos \frac{\nu-\mu}{2} \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\pi a^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu+\mu) \Gamma(\nu-\mu) \sin(\nu-\mu) \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\pi a^2} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}-\mu\right) \sin\left(\frac{\nu'}{2}-\mu\right) \pi \frac{d\nu'}{(ab)^{\nu'}} \\
&= -\frac{1}{a^2} J_{2\mu}(2ab). \tag{16.39}
\end{aligned}$$

例 16.22 根据 (15.21) 式以及 Mellin 变换的基本性质 (见表 14.1), 可以写出

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\{x K_\mu(a^2 x)\} &= 2^{\nu-1} a^{-2\nu-2} \Gamma\left(\frac{\nu+1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1-\mu}{2}\right), \\
\mathcal{M}\{K_\mu(b^2 x)\} &= 2^{\nu-2} b^{-2\nu} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right),
\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty K_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right) K_\mu(b^2 x) \frac{dx}{x^2} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{a^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{2\nu-3} \Gamma\left(\frac{\nu+1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1-\mu}{2}\right) \\
&\quad \times \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{\pi}{2a^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu+\mu) \Gamma(\nu-\mu) \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{\pi}{4a^2} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}-\mu\right) \frac{d\nu'}{(ab)^{\nu'}} \\
&= \frac{\pi}{a^2} K_{2\mu}(2ab). \tag{16.40}
\end{aligned}$$

例 16.23 由例 16.22 及例 16.20 中给出的 $\mathcal{H}\{x K_\mu(a^2 x)\}$ 与 $\mathcal{H}\{J_\mu(b^2 x)\}$, 可得

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty K_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right) J_\mu(b^2 x) \frac{dx}{x^2} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\pi a^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{2\nu-2} \Gamma\left(\frac{\nu+1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1-\mu}{2}\right) \\
&\quad \times \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \sin \frac{\nu-\mu}{2} \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{a^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu+\mu) \Gamma(\nu-\mu) \sin \frac{\nu-\mu}{2} \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2a^2} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}-\mu\right) \sin \frac{\nu'-2\mu}{4} \pi \frac{d\nu'}{(ab)^{\nu'}} \\
&= \frac{i}{a^2} \left[e^{i\mu\pi/2} K_{2\mu}(2ab e^{i\pi/4}) - e^{-i\mu\pi/2} K_{2\mu}(2ab e^{-i\pi/4}) \right]. \tag{16.41}
\end{aligned}$$

同样, 根据此二例题中给出的 $\mathcal{H}\{x J_\mu(a^2 x)\}$ 及 $\mathcal{H}\{K_\mu(b^2 x)\}$, 也可以求出

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty J_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right) K_\mu(b^2 x) \frac{dx}{x^2} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\pi a^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{2\nu-2} \Gamma\left(\frac{\nu+1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1-\mu}{2}\right) \\
&\quad \times \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \cos \frac{\nu-\mu}{2} \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{a^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu+\mu) \Gamma(\nu-\mu) \cos \frac{\nu-\mu}{2} \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2a^2} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}-\mu\right) \cos \frac{\nu'-2\mu}{4} \pi \frac{d\nu'}{(ab)^{\nu'}} \\
&= \frac{1}{a^2} \left[e^{i\mu\pi/2} K_{2\mu}(2ab e^{i\pi/4}) + e^{-i\mu\pi/2} K_{2\mu}(2ab e^{-i\pi/4}) \right]. \tag{16.42}
\end{aligned}$$

例 16.24 由例 16.20 及例 16.21 给出的 $\mathcal{M}\{K_\mu(b^2x)\}$ 及 $\mathcal{M}\{xN_\mu(a^2x)\}$, 还可求出

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty N_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right)K_\mu(b^2x)\frac{dx}{x^2} &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\pi a^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{2\nu-2} \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \\
 &\quad \times \Gamma\left(\frac{\nu+\mu-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu-1}{2}\right) \sin \frac{\nu-\mu}{2} \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{a^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu+\mu) \Gamma(\nu-\mu) \sin \frac{\nu-\mu}{2} \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2a^2} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}-\mu\right) \sin \frac{\nu'-2\mu}{4} \pi \frac{d\nu'}{(ab)^{\nu'}} \\
 &= \frac{i}{a^2} \left[e^{i\mu\pi/2} K_{2\mu}(2ab e^{i\pi/4}) - e^{-i\mu\pi/2} K_{2\mu}(2ab e^{-i\pi/4}) \right].
 \end{aligned} \tag{16.43}$$

同样, 由 $\mathcal{M}\{xK_\mu(a^2x)\}$ 及 $\mathcal{M}\{N_\mu(b^2x)\}$, 也可求出

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty K_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right)N_\mu(b^2x)\frac{dx}{x^2} &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\pi a^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{2\nu-2} \Gamma\left(\frac{\nu+1+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1-\mu}{2}\right) \\
 &\quad \times \Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right) \cos \frac{\nu-\mu}{2} \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{a^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu+\mu) \Gamma(\nu-\mu) \cos \frac{\nu-\mu}{2} \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2a^2} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}-\mu\right) \cos \frac{\nu'-2\mu}{4} \pi \frac{d\nu'}{(ab)^{\nu'}} \\
 &= -\frac{1}{a^2} \left[e^{i\mu\pi/2} K_{2\mu}(2ab e^{i\pi/4}) + e^{-i\mu\pi/2} K_{2\mu}(2ab e^{-i\pi/4}) \right].
 \end{aligned} \tag{16.44}$$

例 16.25 将例 16.20 16.24 中的积分作代换 $x = 1/t$, 又可以得到一系列新的结果:

$$\int_0^\infty J_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right)J_\mu(b^2x)dx = \frac{1}{b^2} J_{2\mu}(2ab), \tag{16.45}$$

$$\int_0^\infty N_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right)J_\mu(b^2x)dx = \frac{1}{b^2} \left[N_{2\mu}(2ab) - \frac{2}{\pi} K_{2\mu}(2ab) \right], \tag{16.46}$$

$$\int_0^\infty J_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right)N_\mu(b^2x)dx = \frac{1}{b^2} \left[N_{2\mu}(2ab) + \frac{2}{\pi} K_{2\mu}(2ab) \right], \tag{16.47}$$

$$\int_0^\infty N_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right)N_\mu(b^2x)dx = -\frac{1}{b^2} J_{2\mu}(2ab), \tag{16.48}$$

$$\int_0^\infty K_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right) K_\mu(b^2x) dx = \frac{\pi}{b^2} K_{2\mu}(2ab), \quad (16.49)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right) K_\mu(b^2x) dx \\ = \frac{i}{b^2} \left[e^{i\mu\pi/2} K_{2\mu}(2ab e^{i\pi/4}) - e^{-i\mu\pi/2} K_{2\mu}(2ab e^{-i\pi/4}) \right], \end{aligned} \quad (16.50)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right) J_\mu(b^2x) dx \\ = \frac{1}{b^2} \left[e^{i\mu\pi/2} K_{2\mu}(2ab e^{i\pi/4}) + e^{-i\mu\pi/2} K_{2\mu}(2ab e^{-i\pi/4}) \right], \end{aligned} \quad (16.51)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right) N_\mu(b^2x) dx \\ = \frac{i}{b^2} \left[e^{i\mu\pi/2} K_{2\mu}(2ab e^{i\pi/4}) - e^{-i\mu\pi/2} K_{2\mu}(2ab e^{-i\pi/4}) \right], \end{aligned} \quad (16.52)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty N_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right) K_\mu(b^2x) dx \\ = -\frac{1}{b^2} \left[e^{i\mu\pi/2} K_{2\mu}(2ab e^{i\pi/4}) + e^{-i\mu\pi/2} K_{2\mu}(2ab e^{-i\pi/4}) \right]. \end{aligned} \quad (16.53)$$

例 16.26 由 (15.21) 式及 Mellin 变换的基本性质 (见表 14.1), 可以写出

$$\mathcal{M}\{x^{\mu+1} K_\mu(2b^2x)\} = \frac{1}{4} b^{-2\nu-2\mu-2} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2} + \mu\right),$$

同时根据 (15.2) 式, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{x^{-\mu-1/2} J_{\mu+1/2}(a^2x)\} \\ = \frac{2^{\nu-\mu-3/2}}{\pi} a^{-2\nu+2\mu+1} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2} - \mu\right) \sin\left(\frac{\nu-1}{2} - \mu\right) \pi, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{2\mu+1/2} J_{\mu+1/2}\left(\frac{a^2}{x}\right) K_\mu(2b^2x) dx \\ = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\pi b} \left(\frac{a}{b}\right)^{2\mu+1} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu-\mu-7/2} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2} + \mu\right) \\ \times \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2} - \mu\right) \sin\left(\frac{\nu-1}{2} - \mu\right) \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\ = \frac{1}{2\pi i} \frac{2^{-\mu-5/2}}{\sqrt{\pi} b} \left(\frac{a}{b}\right)^{2\mu+1} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2} - \mu\right) \\ \times \sin\left(\frac{\nu-1}{2} - \mu\right) \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}}. \end{aligned}$$

作变量变换 $\nu = \nu'/2$, 则可导出

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty x^{2\mu+1/2} J_{\mu+1/2} \left(\frac{a^2}{x} \right) K_\mu(2b^2x) dx \\
& - \frac{1}{2\pi i} \frac{2^{-\mu-7/2}}{\sqrt{\pi}b} \left(\frac{a}{b} \right)^{2\mu+1} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{4} + \mu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{4} - \mu - \frac{1}{2}\right) \\
& \quad \times \sin\left(\frac{\nu'}{4} - \mu - \frac{1}{2}\right) \pi \frac{d\nu'}{(ab)^{\nu'}} \\
& = \frac{\sqrt{\pi}}{b} \left(\frac{a}{b} \right)^{2\mu+1} 2^{-\mu-1/2} J_{2\mu+1}(2ab) K_{2\mu+1}(2ab). \tag{16.54}
\end{aligned}$$

例 16.27 同样, 由 (15.10) 式给出的 $\mathcal{M}\{x^{-\mu-1/2} N_{\mu+1/2}(a^2x)\}$ 以及上例中给出的 $\mathcal{M}\{x^{\mu+1} K_\mu(2b^2x)\}$, 可以推出

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty x^{2\mu+1/2} N_{\mu+1/2} \left(\frac{a^2}{x} \right) K_\mu(2b^2x) dx \\
& = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{b} \left(\frac{a}{b} \right)^{2\mu+1} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2^{\nu-\mu-7/2}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-2\mu-1}{2}\right) \\
& \quad \times \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+2\mu+1}{2}\right) \cos\frac{\nu-2\mu-1}{2} \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
& = -\frac{1}{2\pi i} \frac{2^{-\mu-5/2}}{\sqrt{\pi}b} \left(\frac{a}{b} \right)^{2\mu+1} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \Gamma\left(\frac{\nu-2\mu-1}{2}\right) \\
& \quad \times \Gamma\left(\frac{\nu+2\mu+1}{2}\right) \cos\frac{\nu-2\mu-1}{2} \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
& = -\frac{1}{2\pi i} \frac{2^{\mu-7/2}}{\sqrt{\pi}b} \left(\frac{a}{b} \right)^{2\mu+1} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{4} + \frac{2\mu+1}{2}\right) \\
& \quad \times \Gamma\left(\frac{\nu'}{4} - \frac{2\mu+1}{2}\right) \cos\left(\frac{\nu'}{4} - \frac{2\mu+1}{2}\right) \pi \frac{d\nu'}{(ab)^{\nu'/2}} \\
& = \frac{2^{-\mu}}{b} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a}{b} \right)^{2\mu+1} N_{2\mu+1}(2ab) K_{2\mu+1}(2ab). \tag{16.55}
\end{aligned}$$

利用 (15.17) 式给出的

$$\mathcal{M}\{x^{-\mu-1/2} K_{\mu+1/2}(a^2x)\} = 2^{\nu-\mu-5/2} a^{-2\nu+2\mu+1} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-2\mu-1}{2}\right),$$

也能求得

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty x^{2\mu+1/2} K_{\mu+1/2} \left(\frac{a}{x} \right) K_\mu(bx) dx \\
& = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{b} \left(\frac{a}{b} \right)^{2\mu+1} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2^{\nu-\mu-9/2}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2} - \mu\right) \\
& \quad \times \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2} + \mu\right) \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2^{-\mu-7/2}}{2\pi i} \frac{\sqrt{\pi}}{b} \left(\frac{a}{b}\right)^{2\mu+1} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}-\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}+\mu\right) \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
&= -\frac{2^{-\mu-9/2}}{2\pi i} \frac{\sqrt{\pi}}{b} \left(\frac{a}{b}\right)^{2\mu+1} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{4}+\frac{2\mu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{4}-\frac{2\mu+1}{2}\right) \frac{d\nu'}{(ab)^{\nu'}} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{b} \left(\frac{a}{b}\right)^{2\mu+1} 2^{-\mu-1/2} K_{2\mu+1}(2ab e^{i\pi/4}) K_{2\mu+1}(2ab e^{-i\pi/4}). \quad (16.56)
\end{aligned}$$

例 16.28 类似于例 16.26 和例 16.27, 还可以计算得积分

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^{-2\mu+1/2} J_{\mu-1/2}\left(\frac{a^2}{x}\right) K_\mu(2b^2x) dx \\
&= \int_0^\infty \left[x^{-\mu+1/2} J_{\mu-1/2}\left(\frac{a^2}{x}\right) \right] [x^{-\mu+1} K_\mu(2b^2x)] \frac{dx}{x}, \\
&\int_0^\infty x^{-2\mu+1/2} N_{\mu-1/2}\left(\frac{a^2}{x}\right) K_\mu(2b^2x) dx \\
&= \int_0^\infty \left[x^{-\mu+1/2} N_{\mu-1/2}\left(\frac{a^2}{x}\right) \right] [x^{-\mu+1} K_\mu(2b^2x)] \frac{dx}{x}, \\
&\int_0^\infty x^{-2\mu+1/2} K_{\mu-1/2}\left(\frac{a^2}{x}\right) N_\mu(2b^2x) dx \\
&= \int_0^\infty \left[x^{-\mu+1/2} K_{\mu-1/2}\left(\frac{a^2}{x}\right) \right] [x^{-\mu+1} N_\mu(2b^2x)] \frac{dx}{x}.
\end{aligned}$$

这时需要用到

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \left\{ x^{\mu-1/2} J_{\mu-1/2}(a^2x) \right\} &= \frac{2^{\nu+\mu-3/2} a^{-2\nu-2\mu+1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}+\mu\right) \sin \frac{\nu\pi}{2}, \\
\mathcal{M} \left\{ x^{\mu-1/2} N_{\mu-1/2}(a^2x) \right\} &= -\frac{2^{\nu+\mu-3/2} a^{-2\nu-2\mu+1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}+\mu\right) \cos \frac{\nu\pi}{2}, \\
\mathcal{M} \left\{ x^{\mu-1/2} K_{\mu-1/2}(a^2x) \right\} &= \frac{2^{\nu+\mu-5/2} a^{-2\nu-2\mu+1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}+\mu\right), \\
\mathcal{M} \left\{ x^{-\mu+1} K_\mu(2b^2x) \right\} &= \frac{b^{-2\nu+2\mu-2}}{4} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\mu\right), \\
\mathcal{M} \left\{ x^{-\mu+1} N_\mu(2b^2x) \right\} &= -\frac{b^{-2\nu+2\mu-2}}{4\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\mu\right) \cos \left(\frac{\nu+1}{2}-\mu\right)\pi.
\end{aligned}$$

这样, 根据 (14.39) 式, 并应用 Γ 函数的倍乘公式略加化简, 就能推出

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^{-2\mu+1/2} J_{\mu-1/2}\left(\frac{a^2}{x}\right) K_\mu(2b^2x) dx \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{2^{\mu-5/2}}{\sqrt{\pi b}} \left(\frac{b}{a}\right)^{2\mu-1} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\mu\right) \sin \frac{\nu\pi}{2} \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty x^{-2\mu+1/2} N_{\mu-1/2} \left(\frac{a^2}{x} \right) K_\mu(2b'x) dx \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \frac{2^{\mu-5/2}}{\sqrt{\pi b}} \left(\frac{b}{a} \right)^{2\mu-1} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\mu\right) \cos \frac{\nu\pi}{2} \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}}, \\
& \int_0^\infty x^{-2\mu+1/2} K_{\mu-1/2} \left(\frac{a^2}{x} \right) N_\mu(2b'x) dx \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{b}{a} \right)^{2\mu-1} \frac{2^{\mu-7/2}}{\sqrt{\pi b}} \\
&\quad \times \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}-\mu\right) \cos \frac{\nu-2\mu+1}{2} \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}}.
\end{aligned}$$

再作变换 $\nu = \nu'/2$, 并且把 ν' 重新记为 ν , 就得到

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty x^{-2\mu+1/2} J_{\mu-1/2} \left(\frac{a^2}{x} \right) K_\mu(2b^2x) dx \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{b}{a} \right)^{2\mu-1} \frac{2^{\mu-7/2}}{\sqrt{\pi b}} \\
&\quad \times \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4}-\frac{2\mu-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4}+\frac{2\mu-1}{2}\right) \sin \frac{\nu\pi}{4} \frac{d\nu}{(ab)^\nu} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{b}{a} \right)^{2\mu-1} \frac{2^{\mu-7/2}}{\sqrt{\pi b}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4}-\frac{2\mu-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4}+\frac{2\mu-1}{2}\right) \\
&\quad \times \left[\cos \frac{2\mu-1}{2} \pi \sin\left(\frac{\nu}{4}-\frac{2\mu-1}{2}\right) \pi + \sin \frac{2\mu-1}{2} \pi \cos\left(\frac{\nu}{4}-\frac{2\mu-1}{2}\right) \pi \right] \frac{d\nu}{(ab)^\nu} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{b} \left(\frac{b}{a} \right)^{2\mu-1} 2^{\mu-1/2} \left[\sin \mu\pi J_{2\mu-1}(2ab) + \cos \mu\pi N_{2\mu-1}(2ab) \right] K_{2\mu-1}(2ab),
\end{aligned} \tag{16.57}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty x^{-2\mu+1/2} N_{\mu-1/2} \left(\frac{a^2}{x} \right) K_\mu(2b^2x) dx \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{b}{a} \right)^{2\mu-1} \frac{2^{\mu-7/2}}{\sqrt{\pi b}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4}-\frac{2\mu-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4}+\frac{2\mu-1}{2}\right) \\
&\quad \times \left[\cos \frac{2\mu-1}{2} \pi \cos\left(\frac{\nu}{4}-\frac{2\mu-1}{2}\right) \pi - \sin \frac{2\mu-1}{2} \pi \sin\left(\frac{\nu}{4}-\frac{2\mu-1}{2}\right) \pi \right] \frac{d\nu}{(ab)^\nu} \\
&= 2^{\mu-1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{b} \left(\frac{b}{a} \right)^{2\mu-1} \left[\sin \mu\pi N_{2\mu-1}(2ab) - \cos \mu\pi J_{2\mu-1}(2ab) \right] K_{2\mu-1}(2ab),
\end{aligned} \tag{16.58}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty x^{-2\mu+1/2} K_{\mu-1/2} \left(\frac{a^2}{x} \right) N_\mu(2b^2x) dx \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \frac{2^{\mu-9/2}}{\sqrt{\pi}b} \left(\frac{b}{a} \right)^{2\mu-1} \\
&\quad \times \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4} - \frac{2\mu-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4} + \frac{2\mu-1}{2}\right) \cos\left(\frac{\nu}{4} - \frac{2\mu-1}{2}\right) \pi \frac{d\nu}{(ab)^\nu} \\
&= 2^{\mu-3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{b} \left(\frac{b}{a} \right)^{2\mu-1} N_{2\mu-1}(2ab) K_{2\mu-1}(2ab). \tag{16.59}
\end{aligned}$$

例 16.29 和例 16.28 类似的积分还有

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty x^{-2\mu+1/2} J_{-\mu+1/2} \left(\frac{a^2}{x} \right) J_\mu(2b^2x) dx \\
&= \int_0^\infty \left[x^{-\mu+1/2} J_{-\mu+1/2} \left(\frac{a^2}{x} \right) \right] [x^{-\mu+1} J_\mu(2b^2x)] \frac{dx}{x}.
\end{aligned}$$

由 (15.5a) 式及 (15.2a) 式, 有

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M} \{ x^{1-\mu} J_\mu(2b^2x) \} = \frac{b^{-2\nu+2\mu-2}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2} - \mu\right) \sin\left(\frac{\nu+1}{2} - \mu\right) \pi, \\
& \mathcal{M} \{ x^{\mu-1/2} J_{-\mu+1/2}(a^2x) \} \\
&= \frac{2^{\nu+\mu-3/2}}{\pi} a^{-2\nu-2\mu+1} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2} + \mu\right) \sin\left(\frac{\nu-1}{2} + \mu\right) \pi,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty x^{-2\mu+1/2} J_{-\mu+1/2} \left(\frac{a^2}{x} \right) J_\mu(2b^2x) dx \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{b}{a} \right)^{2\mu-1} \frac{1}{b} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2^{\nu+\mu-5/2}}{\pi^2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2} + \mu\right) \\
&\quad \times \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2} - \mu\right) \sin\left(\frac{\nu-1}{2} + \mu\right) \pi \sin\left(\frac{\nu+1}{2} - \mu\right) \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{b}{a} \right)^{2\mu-1} \frac{2^{\mu-5/2}}{\pi^{3/2}b} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2} - \mu\right) \\
&\quad \times [\cos(2\mu-1)\pi - \cos \nu\pi] \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{b}{a} \right)^{2\mu-1} \frac{2^{\mu-7/2}}{\pi^{3/2}b} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{4} + \frac{2\mu-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{4} - \frac{2\mu-1}{2}\right) \\
&\quad \times \left(\cos 2\mu\pi + \cos \frac{\nu'\pi}{2} \right) \frac{d\nu'}{(ab)^{\nu'}}.
\end{aligned}$$

再应用 Mellin 变换公式^①

$$\begin{aligned} & \mathcal{M} \left\{ e^{-i\mu\pi} J_{2\mu-1}(xe^{i\pi/4}) K_{2\mu-1}(xe^{i\pi/4}) + e^{i\mu\pi} J_{2\mu-1}(xe^{-i\pi/4}) K_{2\mu-1}(xe^{-i\pi/4}) \right\} \\ &= \frac{2^{\nu-3}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4} + \frac{2\mu-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4} - \frac{2\mu-1}{2}\right) \left(\cos 2\mu\pi + \cos \frac{\nu\pi}{2}\right), \quad (16.60) \end{aligned}$$

就计算出^②

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^{-2\mu+1/2} J_{-\mu+1/2}\left(\frac{a^2}{x}\right) J_\mu(2b^2x) dx \\ &= -\frac{2^{\mu-1/2}}{\sqrt{\pi}b} \left(\frac{b}{a}\right)^{2\mu-1} \left[e^{-i\mu\pi} J_{2\mu-1}(2ab e^{i\pi/4}) K_{2\mu-1}(2ab e^{i\pi/4}) \right. \\ & \quad \left. + e^{i\mu\pi} J_{2\mu-1}(2ab e^{-i\pi/4}) K_{2\mu-1}(2ab e^{-i\pi/4}) \right] \quad (16.61a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2^{\mu-3/2}\sqrt{\pi}}{b} \left(\frac{b}{a}\right)^{2\mu-1} \frac{1}{i \sin 2\mu\pi} \left[e^{i2\mu\pi} J_{1-2\mu}(2ab e^{i\pi/4}) J_{2\mu-1}(2ab e^{-i\pi/4}) \right. \\ & \quad \left. - e^{-i2\mu\pi} J_{1-2\mu}(2ab e^{-i\pi/4}) J_{2\mu-1}(2ab e^{i\pi/4}) \right]. \quad (16.61b) \end{aligned}$$

§16.3 三个柱函数乘积的积分

例 16.30 根据 (15.51a) 式及 Mellin 变换的基本性质 (见表 14.1), 有

$$\begin{aligned} & \mathcal{M} \{ x^3 J_\mu(2ax) K_\mu(2ax) \} \\ &= \frac{a^{-\nu-3}}{8\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+3}{4} + \frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+3}{4} - \frac{\mu}{2}\right) \sin\left(\frac{\nu+3}{4} - \frac{\mu}{2}\right)\pi, \end{aligned}$$

① (16.60) 式的证明如下: 由 (15.51b) 式, 有

$$\mathcal{M} \{ J_{2\mu-1}(x) K_{2\mu-1}(x) \} = \frac{2^{\nu-3}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4} + \frac{2\mu-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4} - \frac{2\mu-1}{2}\right) \cos\left(\frac{\nu}{4} - \mu\right)\pi.$$

再应用 §15.1 中 (见 448 页) 介绍的延拓方法, 就得到

$$\begin{aligned} & \mathcal{M} \left\{ J_{2\mu-1}(xe^{i\pi/4}) K_{2\mu-1}(xe^{i\pi/4}) \right\} \\ &= \frac{2^{\nu-3}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4} + \frac{2\mu-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4} - \frac{2\mu-1}{2}\right) e^{-i\pi\nu/4} \cos\left(\frac{\nu}{4} - \mu\right)\pi, \\ & \mathcal{M} \left\{ J_{2\mu-1}(xe^{-i\pi/4}) K_{2\mu-1}(xe^{-i\pi/4}) \right\} \\ &= \frac{2^{\nu-3}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4} + \frac{2\mu-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4} - \frac{2\mu-1}{2}\right) e^{i\pi\nu/4} \cos\left(\frac{\nu}{4} - \mu\right)\pi. \end{aligned}$$

将此二式分别乘以 $e^{-i\mu\pi}$ 和 $e^{i\mu\pi}$, 再相加, 即可证得 (16.60) 式.

② 这个结果也与 I. S. Gradshteyn 和 I. M. Ryzhik 在 *Table of Integrals, Series, and Products* 一书中收录的结果 (见该书 689 页公式 6.591 6) 不一致. 作为 (16.61b) 式的特殊情形: $\mu = 1/4$, 其结果与 (16.45) 式一致. 这或许可作为此结果正确性的佐证.

又根据 (15.3a) 式及 Mellin 变换的基本性质, 得

$$\mathcal{M}\{J_\mu(x^2)\} = \frac{2^{\nu/2}}{4\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{4} + \frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4} - \frac{\mu}{2}\right) \sin\left(\frac{\nu}{4} - \frac{\mu}{2}\right)\pi,$$

所以就能够得到

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^3 J_\mu(2ax) K_\mu(2ax) J_\mu(x^2) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{32\pi^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{(1-\nu)/2} a^{-(\nu+3)} \Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+3}{4} + \frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+3}{4} - \frac{\mu}{2}\right) \\ &\quad \times \sin\left(\frac{\nu+3}{4} - \frac{\mu}{2}\right)\pi \cdot \Gamma\left(\frac{1-\nu}{4} + \frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{4} - \frac{\mu}{2}\right) \sin\left(\frac{1-\nu}{4} - \frac{\mu}{2}\right)\pi d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{32} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{(1-\nu)/2} a^{-(\nu+3)} \Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right) d\nu. \end{aligned}$$

令 $\nu+3 = 2\nu'$, 则会计算得

$$\int_0^\infty x^3 J_\mu(2ax) K_\mu(2ax) J_\mu(x^2) dx = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma(\nu') (2a^2)^{-\nu'} d\nu' = \frac{1}{4} e^{-2a^2}. \quad (16.62)$$

例 16.31 根据 (15.3a) 式及 (15.58b) 式, 并应用表 14.1 中给出的 Mellin 变换的基本性质, 可以写出

$$\mathcal{M}\{x J_{4\mu}(4bx)\} = \frac{2^{-\nu-2}}{\pi} b^{-\nu-1} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2} + 2\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2} - 2\mu\right) \sin\left(\frac{\nu+1}{2} - 2\mu\right)\pi,$$

$$\mathcal{M}\{K_\mu(x^2) I_\mu(x^2)\} = \frac{1}{8\pi^{3/2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{4} - \mu\right) \sin\left(\frac{\nu}{4} - \mu\right)\pi.$$

于是就能得到

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x K_\mu(x^2) I_\mu(x^2) J_{4\mu}(4bx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{32\pi^{5/2}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{-\nu} b^{-\nu-1} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2} + 2\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2} - 2\mu\right) \sin\left(\frac{\nu+1}{2} - 2\mu\right)\pi \\ &\quad \times \Gamma\left(\frac{1-\nu}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1-\nu}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{4} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{4} - \mu\right) \sin\left(\frac{1-\nu}{4} - \mu\right)\pi d\nu. \end{aligned}$$

利用 Γ 函数的倍乘公式及互余宗量定理, 还可以将上式化为

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x K_\mu(x^2) I_\mu(x^2) J_{4\mu}(4bx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{32\pi^{3/2}} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{4}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{4} + \mu\right) \\ &\quad \times \Gamma\left(\frac{\nu+1}{4} - \mu\right) \sin\left(\frac{\nu+1}{4} - \mu\right)\pi \frac{d\nu}{b^{\nu+1}}. \end{aligned}$$

作变换 $\nu+1=2\nu'$, 即得

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty x K_\mu(x^2) I_\mu(x^2) J_{4\mu}(4bx) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{16\pi^{3/2}} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}+\mu\right) \\
 & \quad \times \Gamma\left(\frac{\nu'}{2}-\mu\right) \sin\left(\frac{\nu'}{2}-\mu\right) \pi \frac{d\nu'}{b^{2\nu'}} \\
 &= \frac{1}{4} K_\mu(b^2) I_\mu(b^2).
 \end{aligned} \tag{16.63}$$

例 16.32 根据 (15.26) 及 (15.21) 两式以及 Mellin 变换的基本性质 (见表 14.1), 有

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}\{J_\mu(a^2x) N_\mu(a^2x)\} &= -\frac{a^{-2\nu}}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\nu/2) \Gamma(\mu+\nu/2)}{\Gamma((1+\nu)/2) \Gamma(1+\mu-\nu/2)}, \\
 \mathcal{M}\{x K_0(b^2x)\} &= 2^{\nu-1} b^{-2\nu-2} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right).
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty J_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right) N_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right) K_0(b^2x) dx \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{\pi}b^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu-2} \frac{\Gamma(\nu/2) \Gamma(\mu+\nu/2)}{\Gamma(1+\mu-\nu/2)} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\pi b^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) \sin\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
 &= -\frac{2^2}{b} J_{2\mu}(2ab) K_{2\mu}(2ab).
 \end{aligned} \tag{16.64}$$

类似的结果还有

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \left[K_\mu\left(\frac{a^2}{x}\right) \right]^2 K_0(b^2x) dx \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{b^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2^{2\nu-4}}{\Gamma(\nu)} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right) \\
 & \quad \times \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\pi}{4b^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\
 &= \frac{2\pi}{b^2} K_{2\mu}(2ab e^{i\pi/4}) K_{2\mu}(2ab e^{-i\pi/4}).
 \end{aligned} \tag{16.65}$$

最后一步用到了 (15.61) 式.

例 16.33 用与例 16.32 相同的方法还可计算积分

$$\int_0^\infty H_\mu^{(1)}\left(\frac{a^2}{x}\right) H_\mu^{(2)}\left(\frac{a^2}{x}\right) J_0(b^2 x) dx.$$

根据 (15.30) 式以及由 (15.5a) 导出的 $\not\equiv \{x J_0(b^2 x)\}$, 就能计算得

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty H_\mu^{(1)}\left(\frac{a^2}{x}\right) H_\mu^{(2)}\left(\frac{a^2}{x}\right) J_0(b^2 x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\cos \mu\pi}{\pi^{7/2} b^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} 2^{\nu-1} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) \\ & \quad \times \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \sin \frac{\nu+1}{2} \pi \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\cos \mu\pi}{\pi^2 b^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(\nu) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+\mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}-\mu\right) \frac{d\nu}{(ab)^{2\nu}} \\ &= \frac{16}{\pi^2} \frac{\cos \mu\pi}{b^2} K_{2\mu}(2ab e^{i\pi/4}) K_{2\mu}(2ab e^{-i\pi/4}). \end{aligned} \quad (16.66)$$

§16.4 积分值不连续的情形

例 16.34 利用 (15.3b) 式的结果, 根据 (14.37) 式, 可以写出

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty J_\mu(ax) J_{\mu+1}(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} 2^{\nu-1} \frac{\Gamma((\mu+\nu)/2)}{\Gamma(1+(\mu-\nu)/2)} \cdot 2^{-\nu} \frac{\Gamma(1+(\mu-\nu)/2)}{\Gamma(1+(\mu+\nu)/2)} \frac{d\nu}{a^\nu} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma'-i\infty}^{\sigma'+i\infty} \frac{1}{\mu+\nu} \frac{d\nu}{a^\nu}. \end{aligned}$$

这里的积分路径应满足 $\sigma' > -\mu$. 为了计算出这个积分值, 需要补上辅助路径以构成闭合围道而应用留数定理. 若 $a > 1$, 应补上右半圆, 这时被积函数在围道内无奇点, 且当半圆弧的半径趋于 ∞ 时, 沿半圆弧的积分值趋于 0, 故上述积分值为 0; 若 $0 < a < 1$, 则应补上左半圆, 这时当半圆弧的半径趋于 ∞ 时, 沿半圆弧的积分值仍趋于 0, 但被积函数在围道内有一个奇点 (一阶极点 $\nu = -\mu$), 故上述积分值 $= a^\mu$; 当 $a = 1$ 时, 则应取左、右极限的平均值 $1/2$. 因此, 最后结果就是

$$\int_0^\infty J_\mu(ax) J_{\mu+1}(x) dx = \begin{cases} a^\mu, & 0 < a < 1, \\ \frac{1}{2}, & a = 1, \\ 0, & a > 1. \end{cases} \quad (16.67)$$

例 16.35 计算积分 $\int_0^\infty [1 - J_0(ax)]J_0(bx) \frac{dx}{x}$.

解 首先要求出 $U(\nu, a) \equiv \mathcal{M} \left\{ \frac{1 - J_0(ax)}{x} \right\}$. 容易看出

$$\frac{dU(\nu, a)}{da} = \mathcal{M} \{J_1(ax)\} = \frac{2^{\nu-1}}{\pi} a^{-\nu} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) \sin \frac{\nu-1}{2} \pi.$$

所以

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \left\{ \frac{1 - J_0(ax)}{x} \right\} &= \frac{2^{\nu-1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) \sin \frac{\nu-1}{2} \pi \int_0^a \alpha^{-\nu} d\alpha \\ &= \frac{2^{\nu-1}}{\pi} \frac{a^{1-\nu}}{1-\nu} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) \sin \frac{\nu-1}{2} \pi, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 1. \end{aligned} \quad (16.68)$$

根据 (14.37) 式, 我们现在就有

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty [1 - J_0(ax)]J_0(bx) \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\pi^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{a^{1-\nu}}{1-\nu} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) \sin \frac{\nu-1}{2} \pi \\ &\quad \times b^{\nu-1} \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \sin \frac{1-\nu}{2} \pi d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{a}{b}\right)^{1-\nu} \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \sin \frac{\nu-1}{2} \pi d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{(1-\nu)^2} \left(\frac{a}{b}\right)^{1-\nu} d\nu. \end{aligned}$$

考虑到 $\mathcal{M} \{J_0(bx)\}$ 的成立条件是 $0 < \operatorname{Re} \nu < 3/2$, 因此上述积分的积分路径应位于 $-1 < \operatorname{Re} \nu < 1$ 与 $0 < \operatorname{Re} (1-\nu) < 3/2$ 的公共区域 (即 $-1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1$) 内. 可以用留数定理计算出这个积分. 当 $a/b > 1$ 时, 应补上右半圆, 考虑到围道为顺时针方向, 故此积分值即为被积函数在奇点 $\nu = 1$ (二阶极点) 处留数的负值, 即

$$\int_0^\infty [1 - J_0(ax)]J_0(bx) \frac{dx}{x} = -\frac{d}{d\nu} \left(\frac{a}{b}\right)^{1-\nu} \Big|_{\nu=1} = \ln \frac{a}{b}, \quad \frac{a}{b} > 1; \quad (16.69a)$$

当 $(a/b) < 1$ 时, 应补上左半圆, 而被积函数在右半平面无奇点, 故

$$\int_0^\infty [1 - J_0(ax)]J_0(bx) \frac{dx}{x} = 0, \quad \frac{a}{b} < 1. \quad (16.69b)$$

例 16.36 同样可以计算积分 $\int_0^\infty [1 - J_0(ax)]J_1(bx) \frac{dx}{x^2}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty [1-J_0(ax)]J_1(bx) \frac{dx}{x^2} &= \int_0^\infty \frac{1-J_0(ax)}{x} \frac{J_1(bx)}{x} dx \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{a^{1-\nu}}{1-\nu} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) \sin \frac{\nu-1}{2}\pi \\
&\quad \times b^\nu \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{1+\nu}{2}\right) \sin \frac{1+\nu}{2}\pi d\nu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{a}{4\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{1-\nu} \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{1+\nu}{2}\right) \sin \frac{1+\nu}{2}\pi \left(\frac{b}{a}\right)^\nu d\nu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{a}{(\nu-1)^2(\nu+1)} \left(\frac{b}{a}\right)^\nu d\nu.
\end{aligned}$$

仿照例 16.35, 可以决定此积分路径应位于区域 $-1 < \operatorname{Re} \nu < 1$ 内. 仍然可以采用用留数定理计算此积分. 当 $b/a > 1$ 时, 应补上左半圆, 于是积分值即为围道内奇点 $\nu = -1$ (一阶极点) 处的留数, 即

$$\int_0^\infty [1-J_0(ax)]J_1(bx) \frac{dx}{x^2} = \frac{a}{4} \left(\frac{b}{a}\right)^{-1} = \frac{1}{4} \frac{a^2}{b}, \quad \frac{b}{a} > 1; \quad (16.70a)$$

当 $b/a < 1$ 时, 应补上右半圆, 积分围道内有唯一奇点 $\nu = 1$ (二阶极点), 因此积分值即为该点处留数的负值, 即

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty [1-J_0(ax)]J_1(bx) \frac{dx}{x^2} &= -\frac{d}{d\nu} \frac{a}{1+\nu} \left(\frac{b}{a}\right)^\nu \Big|_{\nu=1} \\
&= \frac{b}{4} \left(1+2\ln \frac{a}{b}\right), \quad \frac{b}{a} < 1. \quad (16.70b)
\end{aligned}$$

例 16.37 计算积分 $\int_0^\infty J_0^2(ax)J_1(bx) dx$, 其中 $a > 0, b > 0$.

根据 (15.24b) 及 (15.3a) 两式, 有

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\{J_0^2(ax)\} &= \frac{a^{-\nu}}{2\pi^{5/2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sin^2 \frac{\nu\pi}{2}, \quad 0 < \operatorname{Re} \nu < 1. \\
\mathcal{H}\{J_1(bx)\} &= \frac{2^{\nu-1}b^{-\nu}}{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) \sin \frac{\nu-1}{2}\pi, \quad -1 < \operatorname{Re} \nu < 3/2,
\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty J_0^2(ax)J_1(bx) dx \\
&= -\frac{1}{4\pi i} \frac{1}{\pi^{5/2}b} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \sin^2 \frac{\nu\pi}{2} \left(\frac{b}{2a}\right)^\nu d\nu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{\pi}b} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{\nu} \frac{\Gamma((1-\nu)/2)}{\Gamma(1-\nu/2)} \left(\frac{b}{2a}\right)^\nu d\nu,
\end{aligned}$$

这里的积分路径应该在 $0 < \sigma < 1$ 及 $-1 < 1 - \sigma < 3/2$ 的公共区域内, 即 $0 < \sigma < 1$ 内. 应用留数定理计算此积分. 当 $b/(2a) > 1$ 时, 应补上左半圆, 被积函数在围道内只有一个奇点 $\nu = 0$, 所以

$$\int_0^\infty J_0^2(ax) J_1(bx) dx = \frac{1}{b}, \quad b > 2a. \quad (16.71a)$$

当 $b/(2a) < 1$ 时, 应补上右半圆, 这时在围道内有奇点 $\nu = 2n+1, n = 0, 1, 2, \dots$, 故

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J_0^2(ax) J_1(bx) dx &= - \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{res} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi} b} \frac{1}{\nu} \frac{\Gamma((1-\nu)/2)}{\Gamma(1-\nu/2)} \left(\frac{b}{2a}\right)^\nu \right\}_{\nu=2n+1} \\ &= - \frac{1}{\sqrt{\pi} b} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{\Gamma(-n+1/2)} \frac{(-1)^{n+1} 2}{n!} \left(\frac{b}{2a}\right)^{2n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{\pi b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{n!} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{b}{2a}\right)^{2n+1} \\ &= \frac{2}{\pi b} \arcsin \frac{b}{2a}, \quad b < 2a. \end{aligned} \quad (16.71b)$$

例 16.38 对于积分 $\int_0^\infty x J_0(ax) N_0(ax) J_0(bx) dx$, 因为根据 (15.26) 和 (15.5a) 二式, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{J_0(ax) N_0(ax)\} &= -\frac{a^{-\nu}}{2\pi^{5/2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \sin \frac{\nu\pi}{2} \sin \frac{1-\nu}{2}\pi, \\ \mathcal{M}\{x J_0(bx)\} &= \frac{2^\nu}{\pi} b^{-\nu-1} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \sin \frac{1+\nu}{2}\pi, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x J_0(ax) N_0(ax) J_0(bx) dx &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\pi^{7/2} b^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \sin \frac{\nu\pi}{2} \\ &\quad \times \sin \frac{1-\nu}{2}\pi \Gamma\left(1-\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{\nu}{2}\right) \sin\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\pi \left(\frac{b}{2a}\right)^\nu d\nu \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\pi^{3/2} b^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \cos \frac{\nu\pi}{2} \left(\frac{b}{2a}\right)^\nu d\nu, \end{aligned}$$

其中 $1/2 < \operatorname{Re} \nu < 2$. 为了计算在复平面上的这个积分^①, 当 $b/(2a) > 1$ 时, 应补上左半圆, 这时被积函数在围道内有奇点 $\nu = -2n, n = 0, 1, 2, \dots$, 留数为

$$\frac{2}{n!} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2a}{b}\right)^{2n},$$

① 直接与例 15.27 或例 16.3 中已经给出的 $\mathcal{M}\left\{\frac{\eta(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}\right\}$ 相比较, 当然也会得到同样结果.

因此

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x J_0(ax) N_0(ax) J_0(bx) dx &= -\frac{2}{\pi^{3/2} b^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{n!} \left(\frac{2a}{b}\right)^{2n} \\ &= -\frac{2}{\pi b^2} \left[1 - \left(\frac{2a}{b}\right)^2\right]^{-1/2} = -\frac{2}{\pi b \sqrt{b^2 - 4a^2}}, \quad \frac{b}{2a} > 1; \end{aligned} \quad (16.72a)$$

当 $b/(2a) < 1$ 时, 应补上右半圆, 此时被积函数在围道内解析 ($\nu = 2n+1$ 为可去奇点), 所以又有

$$\int_0^\infty x J_0(ax) N_0(ax) J_0(bx) dx = 0, \quad \frac{b}{2a} < 1. \quad (16.72b)$$

例 16.39 根据 (15.58) 及 (15.5a) 两式, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\{I_\mu(ax) K_\mu(ax)\} &= \frac{a^{-\nu}}{4\pi^{3/2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \sin\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \pi, \\ \mathcal{H}\{x J_{2\mu}(bx)\} &= \frac{2^\nu}{\pi} b^{-\nu-1} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2} - \mu\right) \sin\left(\frac{1+\nu}{2} - \mu\right) \pi. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x I_\mu(ax) K_\mu(ax) J_{2\mu}(bx) dx &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2\pi^{5/2} b^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \mu\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \sin\left(\frac{\nu}{2} - \mu\right) \pi \\ &\quad \times \Gamma\left(1 - \frac{\nu}{2} + \mu\right) \Gamma\left(1 - \frac{\nu}{2} - \mu\right) \sin\left(1 - \frac{\nu}{2} - \mu\right) \pi \left(\frac{b}{2a}\right)^\nu d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi^{1/2} b^2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \left(\frac{b}{2a}\right)^\nu d\nu, \end{aligned}$$

这里的积分路径应满足 $1/2 < \operatorname{Re} \nu < 1$. 同样根据留数定理可知^①, 当 $b/(2a) > 1$ 时, 此积分值应等于积分路径左方诸奇点处的留数和, 此时奇点为 $\nu = -2n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (均为一阶极点), 留数为 $\frac{(-1)^n 2}{n!} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{b}{2a}\right)^{-2n}$, 因此

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x I_\mu(ax) K_\mu(ax) J_{2\mu}(bx) dx &= \frac{1}{\pi^{1/2} b^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{b}{2a}\right)^{-2n} \\ &= \frac{1}{b^2} \left[1 + \left(\frac{2a}{b}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{1}{b \sqrt{b^2 + 4a^2}}, \quad \frac{b}{2a} > 1. \end{aligned} \quad (16.73a)$$

^① 当然也可直接援引本书第十四章中例 14.7 的结果, 从而写出最后结果.

当 $b/(2a) < 1$ 时, 此积分值则应等于积分路径右方诸奇点处留数和的负值, 此时奇点为 $\nu = 2n+1, n = 0, 1, 2, \dots$ (亦均为一阶极点), 留数为

$$-\frac{(-1)^n 2}{n!} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{b}{2a}\right)^{2n+1},$$

因此又可求得

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x I_\mu(ax) K_\mu(ax) J_{2\mu}(bx) dx &= \frac{1}{\pi^{1/2} b^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{b}{2a}\right)^{2n+1} \\ &= \frac{1}{b^2} \frac{b}{2a} \left[1 + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{1}{b} \frac{1}{\sqrt{b^2 + 4a^2}}, \quad \frac{b}{2a} < 1. \end{aligned} \quad (16.73b)$$

和前几个例子不同的是, 尽管在计算积分时需要分别考虑 $b/(2a) > 1$ 及 $b/(2a) < 1$ 这两种情形, 但所得的积分值却完全相同.

参 考 文 献

1. 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论. 北京: 科学出版社, 1965.
2. Whittaker E T, Watson G N. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927.
3. Erdélyi A, et al. *Higher Transcendental Functions*. New York: McGraw-Hill, 1953.
爱尔台里. 高级超越函数. 张致中, 译. 上海: 科学技术出版社, 1957.
4. Bromwich T J I'A. *An Introduction to the Theory of Infinite Series*. London: Macmillan, 1931.
5. Knopp K. *Theory and Application of Infinite Series*. New York: Dover, 1989.
6. MacRobert T M. *Functions of a Complex Variable*. London: Macmillan, 1954.
7. Titchmarsh E C. *The Theory of Functions*. Oxford: Oxford Univ. Press, 1962.
梯其玛希. 函数论. 吴锦, 译. 北京: 科学出版社, 1964.
8. Courant R, Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. Vol. I. New York: Interscience Publishers, 1962.
柯朗, 希尔伯特. 数学物理方法. 第一卷. 钱敏, 郭敦仁, 译. 北京: 科学出版社, 1958.
9. Courant R, Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. Vol. II. New York: Interscience Publishers, 1962.
柯朗, 希尔伯特. 数学物理方法. 第二卷. 振翔, 杨应辰, 译. 北京: 科学出版社, 1977.
10. Morse P M, Feshbach H. *Methods of Theoretical Physics*. New York: McGraw-Hill, 1953.
11. Titchmarsh E C. *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*. Oxford: Clarendon Press, 1948.
12. Churchill R V. *Operational Mathematics*. New York: McGraw-Hill, 1958.
13. Erdélyi A. *Tables of Integral Transforms*. New York: McGraw-Hill, 1954.
14. Churchill R V. *Fourier Series and Boundary Value Problems*. New York: McGraw-Hill, 1941.
15. Hobson E W. *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1931.

16. Watson G N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1944.
17. Abramowitz M, Stegun I A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Washington, D C: U. S. National Bureau of Standards, 1965.
18. Gradshteyn I S, Ryzhik I M. *Table of Integrals, Series, and Products*. Singapore: Elsevier, 2007.
19. 普里瓦洛夫. 复变函数引论. 北京大学数学力学系数学分析教研组, 译. 北京: 商务印书馆, 1953.
20. 沙巴特, 拉甫伦捷夫. 复变函数论方法. 施祥林, 夏定中, 译. 北京: 人民教育出版社, 1956.

索引

B

- Bernoulli 数 114, 115, 259, 262
 广义 \sim 16, 17
 Bessel 方程 90, 410ff
 Bessel 函数 124
 \sim 的积分表示 412, 445
 \sim 的卷积 419ff
 \sim 的生成函数 228
 对于 \sim 阶的积分 381ff
 Bessel 不等式 335, 336
 B 函数 314, 331
 导致 B 函数的积分 317ff
 导致 B 函数的级数 320, 330
 半纯函数的有理分式展开 236
 倍乘公式 47ff, 69ff, 123ff
 Bessel 函数的 \sim 77ff, 124ff
 Gegenbauer 函数的 \sim 73, 74
 Hermite 函数的 \sim 76
 Jacobi 多项式的 \sim 73, 74
 Legendre 函数的 \sim 73, 74
 Neumann 函数的 \sim 78ff
 Taylor 展开的 \sim 48ff
 Whittaker 函数的 \sim 49, 76, 77
 不完全 Γ 函数的 \sim 50, 75ff
 超几何函数的 \sim 48, 72, 123, 124
 广义 Laguerre 多项式的 \sim 75
 合流超几何函数的 \sim 49, 75
 抛物线柱函数的 \sim 76
 虚宗量柱函数的 \sim 78ff, 131
 指数积分的 \sim 76
 不完全 Γ 函数 50, 64ff, 75ff

C

Cantor 函数 2

- Cauchy 定理 5, 8, 12ff, 16
 Cauchy 积分公式 13, 15, 43
 Cauchy-Riemann 方程 12ff
 Cauchy 判别法 25
 常微分方程的广义函数解 11
 常微分方程的经典解 11
 特解 11
 通解 11
 常微分方程的幂级数解法
 Bessel 方程 90
 方程的常点 98, 103, 110
 方程的奇点 85ff
 方程的非正则奇点 85, 89
 方程的正则奇点 85, 89, 95, 97, 101
 连带 Legendre 方程 88
 展开系数的递推关系 32, 34, 95, 98, 101, 103, 106, 111
 正则解 95
 指标方程 95, 101, 106
 超几何函数 36, 38, 41, 53ff, 86

D

- δ 型函数族 352
 d'Alembert 判别法 25
 Darboux 中值定理 3
 Dirac δ 函数 134ff, 352, 358, 359, 364, 388, 416
 单侧函数 382
 导致虚宗量柱函数的积分 458ff, 478, 480ff
 初等函数的 Mellin 变换 458ff
 初等函数的积分 460ff, 466ff, 473ff
 特殊函数的积分 478, 480ff, 490ff, 500ff

- 导致柱函数的积分 458ff
 初等函数的 Mellin 变换 458ff
 初等函数的积分 460ff, 465, 468ff, 474ff
 特殊函数的积分 478ff, 483ff, 500ff,
 递推关系 39, 42, 48ff, 63ff
 Bernoulli 数的 \sim 262
 Pollaczek 多项式的 \sim 39, 42
 Whittaker 函数的 \sim 49, 50, 66ff
 不完全 Γ 函数的 \sim 50, 64ff
 超几何函数的 \sim 48, 53ff
 合流超几何函数的 \sim 49, 60ff
 广义 Laguerre 函数的 \sim 63
 抛物线柱函数的 \sim 65
 虚宗量 Bessel 函数的 \sim 78
 柱函数的 \sim 77, 124
 多项式 17, 30
 Abel \sim 46
 Bernoulli \sim 115, 259, 261
 Chebyshev \sim 60
 Euler \sim 115
 Gould \sim 45
 Jacobi \sim 58
 Laguerre \sim 117
 Legendre \sim 44
 Mittag-Leffler \sim 30
 Narumi \sim 17
 Newton \sim 114
 Pollaczek \sim 39ff
 广义 Bernoulli \sim 17, 45
 广义 Laguerre \sim 34, 35
 廣 Laguerre \sim 38

E

- Euler 常数 53
 Euler 数 115
 二阶线性常微分方程 85ff
 Bessel 方程 90
 Fuchs 型方程 85, 86

- Legendre 方程 86
 不变式 87
 超几何方程 86
 合流超几何方程 89
 连带 Legendre 方程 88

F

- Fourier 变换 351ff
 $\operatorname{arccot} px$ 及 $\operatorname{arccot} px^2$ 的 \sim 353
 \sim 的反演 351, 358, 383
 \sim 方法计算定积分 360ff, 364ff
 \sim 方法解积分方程 387ff
 Fourier 余弦变换 352
 Fourier 正弦变换 352
 Γ 函数的 \sim 370ff
 Parseval 公式 358ff
 $\operatorname{si}(px)$, $\operatorname{ci}(px)$ 的 \sim 354ff
 单侧函数的 \sim 385ff
 复平面上的 \sim 383ff
 卷积公式 364
 Fourier 积分 351, 391ff, 413ff
 Dirichlet 核 352
 Riemann-Lebesgue 定理 357
 Riemann 和 351
 收敛性定理 357ff
 Fourier 级数 332ff
 Bessel 不等式 335
 Dirichlet 核 333, 338
 Fejer 定理 343
 Fejer 核 342
 \sim 的 Abel 和 343ff
 \sim 的 Casàro 和 342ff
 \sim 的复数形式 332
 Fourier 系数 332
 Gibbs 现象 341
 Lipschitz 条件 334, 340
 Parseval 恒等式 336, 339
 Poisson 核 344

Riemann-Lebesgue 引理 335
 和函数的光滑性 336
 平均收敛 338, 343, 344
 三角多项式 334, 340
 三角级数 332
 收敛性 333
 收敛性基本定理 335
 一致收敛性 339ff, 343, 344

G

Γ 函数 52, 307ff,
 ~ 的 Fourier 变换 370
 ~ 的 Weierstrass 无穷乘积表示 307
 ~ 的幂级数展开 309ff
 ~ 的奇点 10, 312
 ~ 在复平面上的积分 441ff
 导致 ~ 的积分 314ff
 Gegenbauer 函数 57, 58
 Goursat 定理 13
 广义 Laguerre 函数 63
 广义 Riemann ζ 函数 52, 69, 308ff
 广义超几何级数 35, 434
 广义函数 360, 386, 413, 416, 459, 468

H

Hankel 函数 447, 448, 450, 453, 455, 456
 Heaviside 单位阶跃函数 12, 320, 341, 353,
 360, 370, 384, 475
 Hermite 函数 65, 76, 82
 函数的连续与可导 2, 12
 处处连续而不可导 2
 分段连续 335
 绝对连续 2
 平方可积 91
 合流超几何函数 60ff, 89
 ~ Kummer 公式 62, 435

J

Jacobi 多项式 58ff
 积分围道 4, 8, 15ff
 半圆形 ~ 18, 163ff, 182, 188, 190ff,
 200ff, 216ff, 225ff, 322, 384, 385, 424
 矩形 ~ 138, 152ff, 259, 387
 哑铃形 ~ 185, 412
 扇形 ~ 150, 314, 315
 缺形 ~ 180, 186, 189, 318, 431
 圆形 ~ 140ff, 197ff, 204, 207ff
 加法公式 79ff
 Bessel 函数 83ff
 Gegenbauer 函数 81
 Hermite 函数 82
 Jacobi 函数 81
 Legendre 函数 80
 Neumann 函数 83ff
 Whittaker 函数 82, 83
 不完全 Γ 函数 82
 超几何函数 79, 80
 广义 Laguerre 函数 81, 82
 合流超几何函数 81
 连带 Legendre 函数 80
 抛物线柱函数 82
 虚宗量柱函数 83ff
 指数积分 82
 柱函数 130ff
 解析函数的幂级数展开 29ff, 47ff, 94ff
 解析延拓 448, 459
 卷积 113, 134, 364, 419
 Bessel 函数的 ~ 419ff
 Fresnel 积分的 ~ 419
 卷积型积分的 Möbius 反演 134
 卷积型级数的 Möbius 反演 113ff
 Γ 函数 117

- Bessel 函数 124ff
 Laguerre 多项式 117
 Lommel 函数 122
 Möbius 反演系数 113ff
 Neumann 函数 129ff
 倍乘公式的 Möbius 反演 123
 不完全 Γ 函数 125
 超几何函数 120, 123, 124
 合流超几何函数 121, 122
 连带 Legendre 函数 119
 球 Bessel 函数 116
 虚宗量柱函数 131ff
- L**
- Lagrange 展开公式 43ff
 Lambert 的 W 函数 46
 Laplace 变换 10, 391, 397ff
 Bessel 函数的 \sim 405, 420
 Fresnel 积分的 \sim 404ff
 Laguerre 多项式的 \sim 403
 \sim 的反演 10, 406ff
 \sim 的卷积定理 419ff
 \sim 方法解 Bessel 方程 410ff
 初等函数的 \sim 397ff
 正弦积分的 \sim 402
 余弦积分的 \sim 402
 正则半平面 397
 正则横标 397
 像函数的必要条件 413ff
 像函数的充分条件 416ff
 Laplace 积分 391ff
 \sim 的解析性 395ff
 绝对收敛半平面 393
 绝对收敛横标 393
 收敛半平面 394
 收敛横标 394
 Laurent 展开 309, 312, 391, 409
- Legendre 多项式 44
 生成函数 44
 微分表示 44
 Legendre 函数 433, 435, 458
 l'Hôpital 法则 4, 363, 407, 429
 Lobachevskiy 函数 287
 Lommel 函数 122
 Looman-Menchoff 定理 13
 连带 Legendre 函数 56ff, 124
- M**
- Mellin 变换 423ff
 Legendre 函数的 \sim 433
 初等函数的 \sim 423, 426ff, 457ff, 461ff
 存在的常用条件 423
 定义 423
 基本性质 425
 卷积公式 436ff
 收敛横标 423
 超几何函数的 \sim 435
 合流超几何函数的 \sim 435
 球 Bessel 函数的 \sim 446
 虚宗量柱函数的 \sim 448
 虚宗量柱函数乘积的 \sim 453ff
 虚宗量柱函数与初等函数乘积的 \sim 455, 456, 457
 余误差函数 $\operatorname{erfc} x$ 的 \sim 433
 正弦积分的 \sim 433
 柱函数的 \sim 445ff
 柱函数乘积的 \sim 449ff
 柱函数与初等函数乘积的 \sim 451, 456
 柱函数与虚宗量柱函数乘积的 \sim 454ff
 Mellin 变换应用于计算定积分 437ff, 458, 460ff, 477ff
 Γ 函数的积分 441ff
 Legendre 多项式与 Bessel 函数乘积的积分 458

初等函数的积分 437ff, 460ff
 积分值不连续的情形 501ff
 虚宗量柱函数乘积的积分 490, 493, 494, 500
 虚宗量柱函数与初等函数乘积的积分 457, 480, 484, 486
 柱函数乘积的积分 482, 486ff, 497, 501ff
 柱函数与初等函数乘积的积分 456, 477ff
 柱函数与虚宗量柱函数乘积的积分 491, 499ff, 505ff
 Mittag-Leffler 定理 236
 幂级数的收敛半径 25ff
 Cauchy-Hadamard 公式 25

N

Neumann 函数 77ff, 83ff, 129ff, 447, 450ff, 455, 459ff, 468, 475

P

Parseval 公式 336, 339, 358
 Poisson 分布函数 423
 Poisson 公式 344
 ψ 函数 20ff, 52, 69
 ~ 的渐近展开 20
 ~ 的幂级数展开 307, 309
 ~ 的奇点 309
 导致 ~ 的积分 20ff, 205, 213ff, 279, 281ff, 285ff, 290, 292ff, 303ff, 322, 432
 导致 ~ 的级数 319ff, 329ff
 含 ~ 的级数 288, 298ff, 302ff, 323ff
 抛物线柱函数 64ff, 75ff
 平均收敛 338, 343ff

Q

氢原子问题 91
 球 Bessel 函数 116

R

Riemann P -方程 112
 Riemann ζ 函数 117ff, 288ff, 298ff, 307ff, 316

S

生成函数 33ff, 39, 42, 44, 47, 228, 261

T

Taylor 展开 29ff, 47ff, 94ff
 Taylor 展开公式的变型 69ff
 Bessel 函数 77ff
 Γ 函数 69
 Gegenbauer 函数 73, 74
 Hermite 函数 76
 Jacobi 多项式 73, 74
 Legendre 函数 73, 74
 Neumann 函数 78ff
 ψ 函数 69
 Whittaker 函数 76, 77
 不完全 Γ 函数 75ff
 超几何函数 72
 广义 Laguerre 函数 75
 合流超几何函数 75
 抛物线柱函数 76
 虚宗量 Bessel 函数 78ff
 指数积分 76
 Taylor 展开公式的特殊形式 51ff
 Γ 函数 52
 Gegenbauer 函数 57ff
 Hermite 函数 65
 Jacobi 多项式 58ff
 Legendre 函数 55ff
 ψ 函数 53
 Whittaker 函数 66ff
 不完全 Γ 函数 64ff
 超几何函数 53ff

- 广义 Laguerre 函数 63ff
 合流超几何函数 60ff
 抛物线柱函数 64ff
- ### W
- Weierstrass 函数 2
 Whittaker 函数 66ff
 Wronski 行列式 93
 无穷级数 19
 Abel 定理 29, 342
 Abel 收敛因子法 28
 Cauchy 判别法 25
 d'Alembert 判别法 25
 Weierstrass M -检验法 336
 绝对收敛 5ff
 收敛 5ff, 19
 收敛区域 6
 \sim 的 Abel 和 29, 343ff
 \sim 的 Cesàro 和 28, 342ff
- ### X
- 虚宗量柱函数 389, 448
 积分表示 389
 虚宗量柱函数的积分 454, 480, 484, 486, 490ff, 505ff
 两个虚宗量柱函数乘积的积分 490, 493, 494
 三个虚宗量柱函数乘积的积分 500
 虚宗量柱函数与初等函数乘积的积分 480, 484, 486
 柱函数与虚宗量柱函数乘积的积分 491ff, 499ff, 505ff
- ### Y
- 引理 136ff, 174, 224, 225
 Jordan 引理 8, 9, 136ff, 418
 补充引理 174
- 大圆弧引理 136
 小圆弧引理 136
 有限远处出现本性奇点 224, 225
 应用留数定理计算定积分 8, 140ff, 180ff, 224ff
 半圆形围道 144ff, 163, 166ff, 182ff, 188, 190ff, 200ff, 216ff, 225ff, 322
 多值函数的积分 180ff, 238ff
 含 $\arctan x$ 的积分 217ff
 含 $\ln \sin \theta, \ln \cos \theta$ 的积分 206ff, 282, 287ff, 289ff, 303ff
 含 $\ln \tan \theta$ 的积分 200, 204ff, 279ff
 非常规方式 248ff
 积分围道上有一阶极点 142, 150ff, 159ff, 238, 241ff, 246ff, 253
 进一步演绎出的结果 263ff
 矩形围道 152, 159, 161, 165, 259
 扇形围道 150, 314, 315
 哑铃形围道 185
 有限远处有本性奇点 224ff, 263ff, 275ff
 块形围道 180, 186, 189, 318
 圆形围道 140ff, 197ff, 204, 207ff
 余弦积分 356ff, 362ff, 402
- ### Z
- 正弦积分 341, 356ff, 362ff, 402
 柱函数的积分 477ff
 积分值不连续的情形 501ff
 两个柱函数乘积的积分 482, 486ff, 497, 501ff
 三个柱函数乘积的积分 501, 503ff
 柱函数与初等函数乘积的积分 456, 477ff
 柱函数与虚宗量柱函数乘积的积分 491ff, 499ff, 505ff

[General Information]

□ □ ≡ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ ≡ □ □ □ □

□ □ ≡ 514

SS□ ≡ 13343404

DX□ =

□ □ □ □ ≡ 2013. 07

□ □ □ ≡ □ □ □ □ □ □

□ □

□ □

□ □

□ □

□ □

□ □ □ □ □ □ □

1.1 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

1.2 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

1.3 Cauchy □ □ □ Cauchy □ □ □ □

□ □ □ □ □ □ □

2.1 □ □ □ □ □ □ □ □

2.2 □ □ □ □ □ □ □ □

2.3 □ □ □ □ □ Cesaro □ □ Abel □

2.4 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

2.5 □ □ □ □ □ □

2.6 Lagrange □ □ □ □

2.7 Taylor □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ □ Taylor □ □ □ □ □ □ □ □

3.1 Taylor □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

3.2 □ □ □ □ □ □

3.3 □ □ □ □ □ □ □ □

3.4 □ □ □ □ □ □ □ □

3.5 Whittaker □ □ □

3.6 Taylor □ □ □ □ □ □ □ □

3.7 □ □ □

3.8 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

4.1 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

4.2 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

4.3 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

4.4 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ □ □ □ □ □ □ □ Mbi us □ □

5.1 □ □

5.2 □ □

5.3 □ □ □ □ □ Mbi us □ □ □ □ □ □

5.4 □ □ □ □ □ □ □ □ Mbi us □ □

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

6.1 □ □ □ □

6.2 □ □ □ □

6.3 □ □ □ □ □ □ □ □ □

6.4 □ □ □ □

6.5 □ □ □ □ □ □ □ □

6.6 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

7.1 □ □ □ □ □ □ □ □

7.2 □ □ □ □ □ □ □ □

7.3 □ $\ln \tan \theta$ □ □ □

7.4 □ $\ln \sin \theta$ □ $\ln \cos \theta$ □ □ □

7.5 □ $\arctan x$ □ □ □

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

8.1 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

8.2 □ □ □ □ □ □ □ □

8.3 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

9.1 □ □ □ □ □ □ □ □ □

9.2 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

9.3 □ □ □ □ $\ln \tan \theta$ □ □ □

9.4 □ □ □ □ $\ln \sin \theta$ □ □ □

□ □ □ □ Γ □ □ □

10.1 □ Γ □ □ □ □ □ □ □ □ □

10.2 □ □ Γ □ □ □ □ B □ □ □ □ □

10.3 □ ψ □ □ □ □ □ □

□ □ □ □ Fourier □ □ □

11.1 Fourier □ □ □

11.2 Fourier □ □ □ □ □ □

11.3 Fourier □ □ □ Cesaro □ □ Abel □

□ □ □ □ Fourier □ □ □ Fourier □ □ □

12.1 Fourier □ □ □

12.2 Fourier □ □ □ Parseval □ □

12.3 Fourier □ □ □ □ □ □ □ □

12.4 Γ □ □ □ Fourier □ □ □

12.5 □ □ □ □ □ Fourier □ □ □

- 12.6 Fourier $\square \square \square \square \square \square \square$
- $\square \square \square$ Laplace \square
- 13.1 Laplace \square
- 13.2 Laplace $\square \square \square \square \square \square$
- 13.3 Laplace $\square \square \square \square$
- 13.4 Laplace $\square \square$
- 13.5 Laplace $\square \square \square$
- 13.6 Laplace $\square \square \square \square \square \square \square$
- 13.7 Laplace $\square \square \square \square \square \square \square$
- 13.8 Laplace $\square \square \square \square \square \square \square$
- $\square \square \square$ Mellin \square
- 14.1 Mellin $\square \square \square \square$
- 14.2 Mellin $\square \square \square$
- 14.3 $\square \square \square \square$ Mellin \square
- 14.4 Mellin $\square \square \square \square \square$
- $\square \square \square \square$ $\square \square \square \square$ Mellin \square
- 15.1 $\square \square \square \square$ Mellin \square
- 15.2 $\square \square \square \square \square$ Mellin \square
- 15.3 $\square \square \square \square \square \square \square \square$ Mellin \square
- 15.4 $\square \square \square \square \square \square \square \square \square$
- $\square \square \square \square$ $\square \square$ Mellin $\square \square \square \square \square \square \square \square \square \square$
- 16.1 $\square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \square$
- 16.2 $\square \square \square \square \square \square \square \square \square$
- 16.3 $\square \square \square \square \square \square \square \square \square$
- 16.4 $\square \square \square \square \square \square \square \square$
- $\square \square \square \square$
- $\square \square$